Penerapan Teori Graf untuk Mencari *Eksentrik Digraf dari Graf Star*, *Graf Double Star* dan *Graf Komplit Bipartit*

Ivan Saputra – 13505091

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
E-mail : if115091@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang kajian teori baru yaitu *eksentrik digraf dari graf star, graf double star dan graf komplit bipartit* dengan mengacu pada teori graf yang didapat di mata kuliah Matematika Diskrit. Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain. *Jarak* (*distance*) $d(u,v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G. Jika tidak ada lintasan dari u ke v, maka $d(u,v) = \infty$. *Eksentrisitas* titik v di graf G, dinotasikan $ec(v)$ adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik di G. Titik v adalah *titik eksentrik* dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v, u) = ec(u)$. *Eksentrik digraf pada graf* $ED(G)$ didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G atau $V(ED(G)) = V(G)$ dimana arc menghubungkan titik u ke v, jika v adalah titik eksentrik dari u. Masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah menentukan eksentrik digraf dari graf star, graf double star dan graf komplit bipartit. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut. Eksentrik digraf dari graf star $ED(S_m)$ adalah graf komplit K_m yang mempunyai arah dan eksentrik digraf dari graf double star $ED(S_{n,m})$ adalah digraf bipartit $D(B_{n,m})$. Selanjutnya eksentrik digraf dari graf komplit bipartit $ED(K_{m,n})$ adalah digraf komplemen $K_{m,n} = D(\overline{K}_{m,n})$.

Kata kunci *: graf star, graf double star, graf komplit bipartit, jarak, eksentrisitas, titik eksentrik dan eksentrik digraf.*

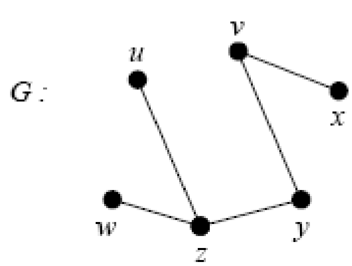
1. Pendahuluan

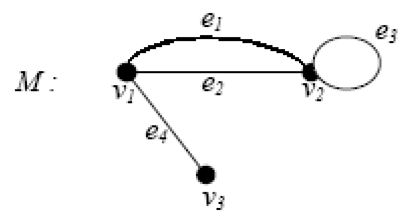
Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas titik pada graf.
Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jarak $d(u,v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka kita definisikan jarak $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas $ec(v)$ pada sebuah titik v dalam graf G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G, dapat dituliskan $ec(v) = max\{d(v,u)|u \in V(G)\}$. *Radius* $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $r(G) = min\{ec(v)|v \in V\}$ sedangkan *diameter* dari G, dinotasikan $dia(G)$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $dia\ (G) = maks\{ec(v)|v \in V\}$. Titik v disebut *titik central* jika $ec(v) = r(G)$.
Eksentrik digraf diperkenalkan pertama kalinya oleh Fred Buckley pada tahun 90-an.
Eksentrik digraf $ED(G)$ pada graf G didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G))=V(G)$, dimana arc menghubungkan titik u ke v jika v adalah titik eksentrik dari u. Pada papernya [1] Buckley memberikan kesimpulan bahwa hampir setiap

graf G, eksentrik digrafnya adalah $ED(G) = (\overline{G})*$, dimana $(\overline{G})*$ adalah graf komplemen dari G yang setiap sisinya diganti dengan dua arc (sisi berarah) yang simetrik.
Pada skripsi ini, kita tertarik untuk membahas eksentrik digraf dari graf komplit bipartit, graf star, dan graf double star.

2. Dasar Graf

Graf tak berarah G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) (selanjutnya akan ditulis uv) dari titik u, v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Untuk selanjutnya graf tak berarah G akan disebut *graf* G saja. Sebagai contoh, gambar 2.1 (*a*) adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, x, y, z, w\}$dan himpunan sisi $E(G) = \{vx, vy, yz, zu, zw\}$.
Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, yakni $e = uu$ disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edge*). Pada gambar 2.1 (*b*), sisi e_3 adalah loop dan sisi e_1, e_2 adalah sisi rangkap. Graf yang tidak mempunyai loop dan sisi rangkap disebut *graf sederhana*.
Order n dari graf G adalah banyaknya titik di G, yakni $n = |V|$. Graf yang ordernya hingga disebut dengan *graf hingga*. Sebagai contoh, gambar 2.1 (*a*) adalah graf yang mempunyai order 6. Pada skripsi ini, graf yang kita bahas adalah graf sederhana dan graf hingga.

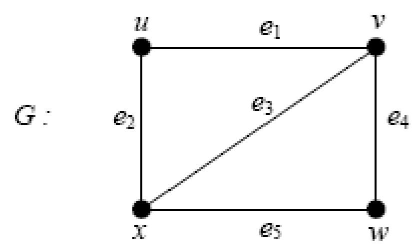




(*b*)

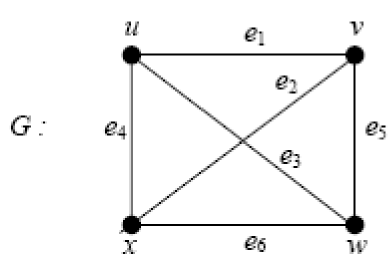
Gambar 2.1 Contoh Graf

Misal u dan v titik pada graf G. Titik v dikatakan *tetangga* (*adjacent*) u jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v, yaitu $e = uv$. Himpunan semua tetangga dari titik v dinotasikan dengan $N(v)$. Jika $e = uv$ adalah sisi pada graf G maka e dikatakan *menempel* (*incident*) pada titik u dan v. Contohnya pada gambar 2.2 , titik u adalah adjacent titik v dan x tetapi titik u bukan adjacent titik w, titik u dan sisi e_1 adalah incident tetapi titik w dan sisi e_1 bukan incident.



Gambar 2.2 Adjacent dan incident

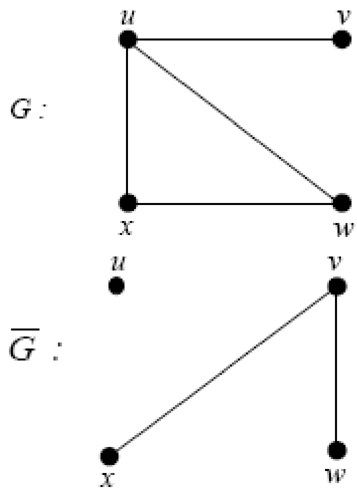
Derajat (*degree*) dari titik v di G adalah jumlah sisi yang berhubungan dengan v. Jika setiap titik v pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf G disebut *graf reguler*. Sebuah graf G dikatakan r-reguler atau reguler pada derajat r, jika setiap titik pada G mempunyai derajat r. Sebagai contoh pada gambar 2.3, graf G adalah graf 3 – reguler.



Gambar 2.3 Graf Reguler

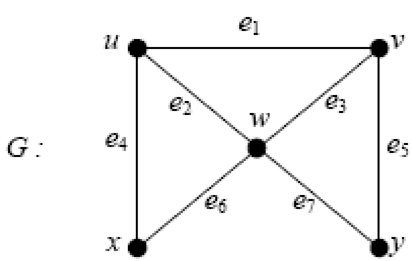
Komplemen dari graf $\overline{G}$ dinotasikan $\overline{G}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(\overline{G}) = V(G)$

dimana titik u, v tetangga pada $\overline{G}$ jika dan hanya jika titik u,v bukan tetangga pada G. Contoh graf dan komplemennya dapat dilihat pada gambar 2.4.



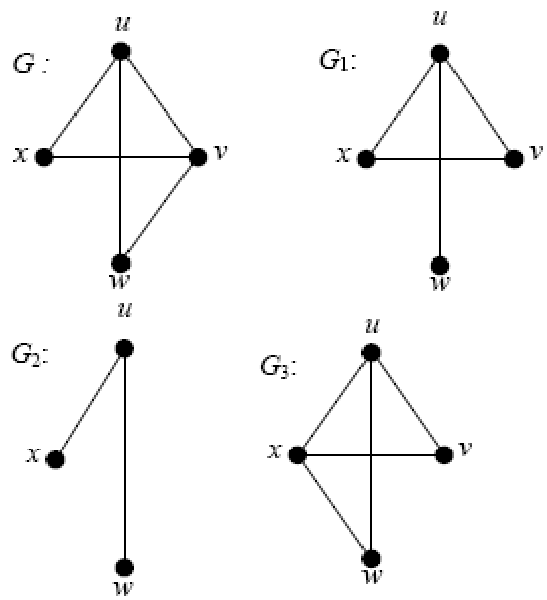
Gambar 2.4 Graf dan Komplemennya

Jalan (*walk*) W dengan panjang n dari titik a ke b pada graf G adalah barisan titik $a = v_o$, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, …, v_{n-1}, e_n, $v_n = b$ ($n \geq 0$) yang terdiri dari titik dan sisi di G yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n$-1. Jalan ini menghubungkan titik v_o dan v_n, dan dapat juga dinotasikan sebagai v_o-v_1-...-v_n. Jalan dikatakan tertutup jika $a = b$ dan terbuka jika $a \neq b$. Sebagai contoh pada gambar 2.5, *x-w-y-v-u-x* adalah jalan tertutup dengan panjang 5 dan *u-v-w-x-u-v-y* adalah jalan terbuka dengan panjang 6. *Jejak* (*trail*) adalah jalan dimana tidak ada sisi yang berulang. Jalan dikatakan *lintasan* (*path*) jika semua titiknya berbeda. Lintasan adalah jejak, akan tetapi tidak semua jejak adalah lintasan. Sedangkan lintasan tertutup dinamakan *sikel* (*cycle*). Pada gambar 2.5, jalan *x-w-v-u-w-y* adalah jejak tetapi bukan lintasan, sedangkan *u-x-w-v-y* adalah lintasan, dan *u-w-y-v-u* adalah sikel.



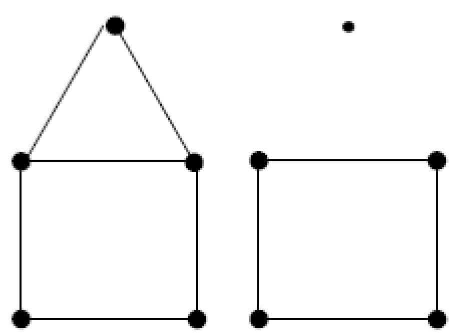
Gambar 2.5 Walk pada Graf

Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Sebagai contoh pada gambar 2.6, $G1$ dan $G2$ adalah subgraf dari G tetapi $G3$ bukan subgraf dari G karena ada sisi *xw* di $E(G3)$ yang bukan elemen dari $E(G)$.



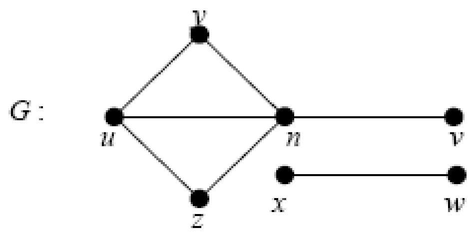
Gambar 2.6 Graf dan Subgrafnya

Komponen dari G adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen dan untuk graf tak terhubung mempunyai sedikitnya dua komponen. Gambar 2.7 (*a*) adalah graf terhubung dan 2.7 (*b*) adalah graf tak terhubung dengan dua komponen.



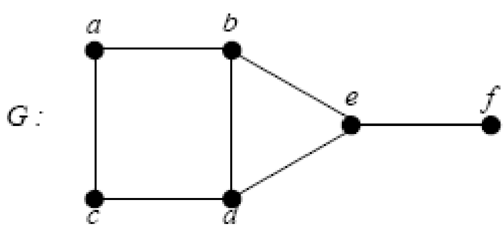
Gambar 2.7 Graf terhubung dan graf tak terhubung

Jarak $d(u,v)$ antara dua titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka kita definisikan jarak $d(u,v) = \infty$. Sebagai contoh, graf pada gambar 2.8, $d(u,v) = 2$ sedangkan $d(v, w) = \infty$.



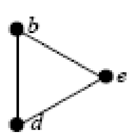
Gambar 2.8 Jarak pada Graf

Eksentrisitas $ec(v)$ pada titik v dalam graf G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G, dapat dituliskan $ec(v) = max\{d(v,u)|u \in V(G)\}$. *Radius* $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $r(\mathrm{G}) = min\{ec(v)|v\in V\}$ dan *diameter* dari G, dinotasikan $dia(G)$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $dia\ (G) = maks\{ec(v)|v\in V\}$, titik v disebut *titik central* jika $ec(v) = r(G)$, center dinotasikan $cen(G)$ adalah subgraf pada G yang terbentuk dari titik central. Titik v dikatakan *titik eksentrik* dari u jika jarak dari v ke u sama dengan titik eksentrik dari u, dapat dituliskan $d(v,u) = ec(u)$. Eksentrisitas titik, titik eksentrik, radius, diameter dan center dari graf pada gambar 2.9 adalah sebagai berikut :

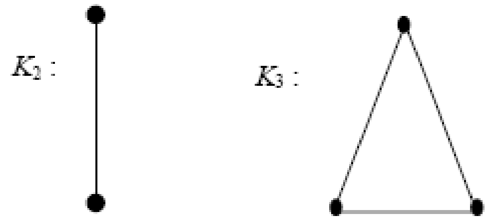


Gambar 2.9 Eksentrisitas

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
a	$ec(a) = 3$	*f*
b	$ec(b) = 2$ *c,*	*f*
c	$ec(c) = 3$	*f*
d	$ec(d) = 2$ *a,*	*f*
e	$ec(e) = 2$ *a,*	*c*
f	$ec(f) = 3$ *a,*	*c*

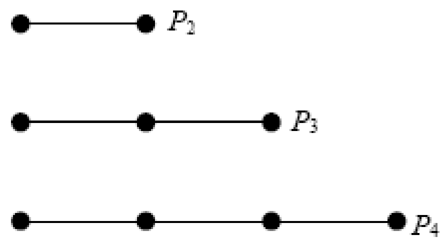
Jadi $r(G) = 2$, $dia\ (G) = 3$, $cen(G) =$ 

Graf yang setiap dua titik yang berbeda adalah tetangga disebut *graf komplit*. Graf komplit dengan n titik dinotasikan K_n. Contoh graf komplit K_2 dan K_3 ditunjukkan pada gambar 2.10.



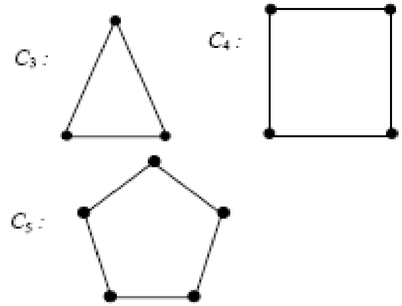
Gambar 2.10 Graf komplit

Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut *graf lintasan*. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n. Contoh graf lintasan P_2, P_3 dan P_4 dapat dilihat pada gambar 2.11.



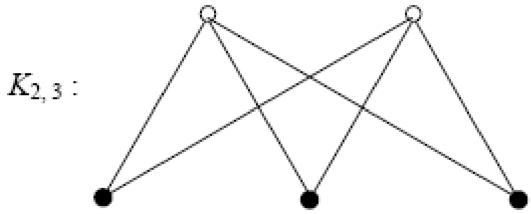
Gambar 2.11 Graf Lintasan

Sebuah graf yang terdiri dari satu lingkaran disebut *graf sikel*. Graf sikel dengan n titik dinotasikan C_n. Pada gambar 2.12 dapat dilihat graf lingkaran C_3, C_4 dan C_5.



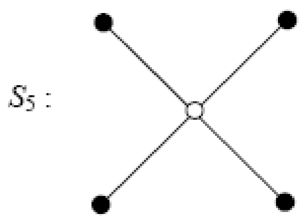
Gambar 2.12 Graf Sikel

Graf G dikatakan *bipartit* jika himpunan titik-titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V1(G)$ dan $V2(G)$. Jika setiap pasang titik di $V1$ dan $V2$ saling terhubung maka graf tersebut dinamakan *graf komplit bipartit*. Jika $|V1| = m$ dan $|V2| = n$, graf komplit bipartit dinotasikan Km,n. Graf star adalah graf komplit bipartit $K1,n$ atau $K_n,1$. Untuk pembahasan selanjutnya graf star $K1,n$ atau $Kn,1$ akan dinotasikan dengan S_m, dimana $m = n + 1$ Contoh graf komplit bipartit $K_{2,3}$ dan graf star S_5 dapat dilihat pada gambar 2.13.



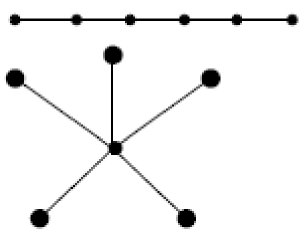
Gambar 2.13 Graf Komplit Bipartit

Graf star adalah graf komplit bipartit $K1,n$ atau $Kn,1$. Untuk pembahasan selanjutnya graf star $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$ akan dinotasikan dengan S_m, dengan $m = n + 1$, dimana 1 titik berderajat n disebut titik central dan n titik berderajat 1 disebut titik daun. Contoh graf star S_5 dapat dilihat pada gambar 2.14.



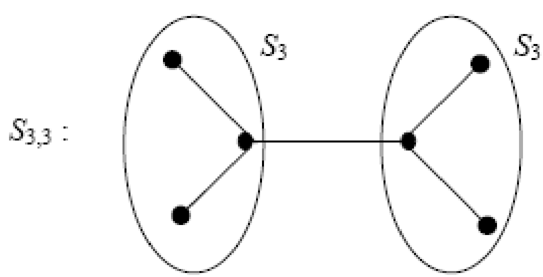
Gambar 2.14 Graf Star

Sebuah pohon (tree) T adalah graf terhubung yang tidak memuat sikel (*cycle*). Sebagai contoh, pada gambar 2.15 adalah pohon dengan order 6.



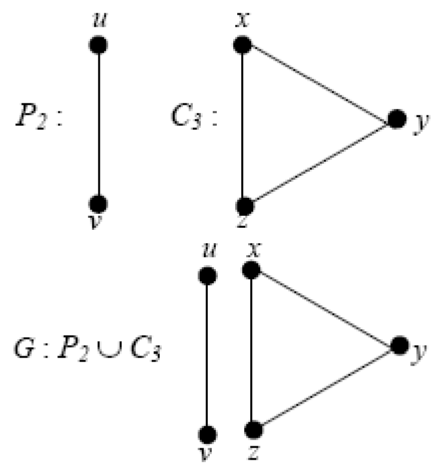
Gambar 2.15 Pohon

Pohon T dikatakan *double star* jika terdiri dari dua graf star S_n dan S_m, dimana kedua titik centralnya saling bertetangga, dinotasikan Sn,m (selanjutnya akan ditulis graf double star). Contoh graf double star $S_{3,3}$ dapat dilihat pada gambar 2.16.



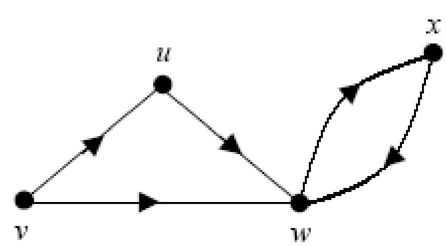
Gambar 2.16 Graf double Star

Misal ada dua graf G_1 dan G_2 dimana himpunan titik $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ saling asing begitu juga himpunan sisi $E(G_1)$ dan $E(G_2)$, maka *gabungan graf* dinotasikan $G_1 \cup G_2$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Sebagai contoh, pada gambar 2.17 graf $G = P_2 \cup C_3$ adalah gabungan graf lintasan P_2 dan graf lingkaran C_3.



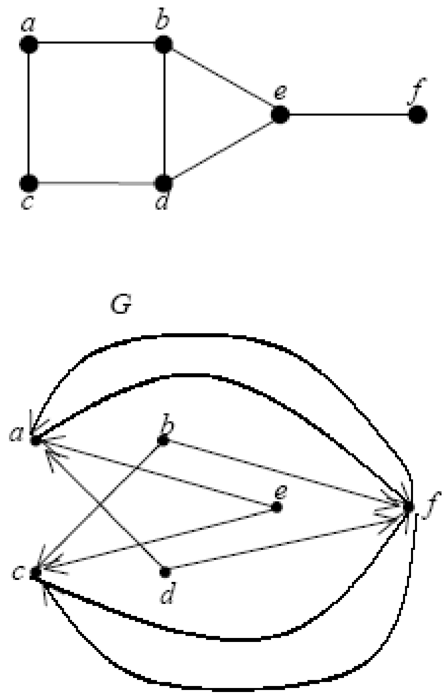
Gambar 2.17 Graf gabungan

Digraf D adalah pasangan himpunan (V, A) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* dan A adalah himpunan dari pasangan terurut (u, v) dari titik u, v di V yang disebut *arc*. Pada gambar 2.18 menunjukkan sebuah graf berarah dengan himpunan titik $V(D) = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan arc $A(D) = \{(u, w), (v, u), (v, w), (w, x), (x, w)\}$.



Gambar 2.18 Digraf

Eksentrik Digraf $ED(G)$ didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G))=V(G)$, dimana arc menghubungkan titik u ke v jika v adalah titik eksentrik dari u. Contoh graf dan eksentrik digrafnya diberikan pada gambar 2.19.



Gambar 2.19 Graf dan eksentrik digrafnya

3. Eksentrik Digraf

Eksentrik Digraf dari Graf Star.

Misal graf star *Sm* mempunyai himpunan titik $V(S_m) = \{v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ dimana *v*o adalah titik central dan $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ adalah titik daun, dan himpunan sisi $E(S_m) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$ dimana sisi $e_i = v_o v_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Sifat *3.1* *Eksentrisitas titik* vi *pada graf star* Sm *adalah sebagai berikut*

$$ec(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0 \\ 2 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Dari *definisi* graf star, dimana v_o adalah titik central dan v_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ adalah titik daun, maka dapat diketahui jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik central adalah semua titik daun, yaitu dengan jarak 1. Jadi eksentrisitas titik $ec(v_o) = 1$. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun adalah titik daun lainnya, yaitu dengan jarak 2. Jadi eksentrisitas titik $ec(v_i) = 2$.

Akibat 3.1 *Titik eksentrik pada graf star Sm adalah sebagai berikut*

$$\text{titik eksentrik dari } v_i = \begin{cases} v_j \text{ untuk } i = 0 \\ \qquad\qquad j = 1,2,3,\ldots,m-1 \\ v_j \text{ untuk } i,j = 1,2,3,\ldots,m-1 \\ \qquad\qquad i \neq j. \end{cases}$$

Dari *sifat* 3.1, eksentrisitas dari titik central *v*o adalah 1, maka titik eksentriknya adalah semua titik daun v_j untuk setiap $j = 1, 2, 3, \ldots, m-1$. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun v_i adalah 2 untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ maka titik eksentriknya adalah semua titik daun v_j untuk setiap $j = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ dengan $i \neq j$.

Dari eksentrisitas titik $ec(v_i)$ dan titik eksentrik pada graf star S_m, selanjutnya kita mempunyai sifat berikut:

***Sifat* 3.2** *Eksentrik digraf dari graf star ED(Sm) adalah digraf dengan himpunan titik* $V(ED(S_m)) = \{v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ *dan himpunan arc*

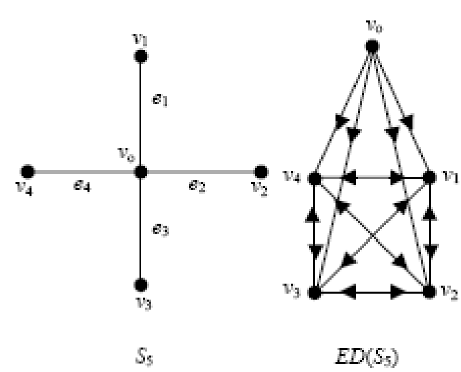
$$A(ED(S_m)) = \begin{cases} v_o v_j \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \ldots, m-1 \\ v_i v_j \text{ untuk } i, j = 1, 2, 3, \ldots, m-1 \\ \qquad\qquad i \neq j. \end{cases}$$

Dari *akibat* 3.1, titik eksentrik dari titik central *v*o adalah titik daun *vj* untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, m-1$, sehingga ada arc dari v_o ke v_j yaitu $v_o v_j$. Demikian juga untuk titik daun v_i untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m-1$ titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, m-1$ dengan $i \neq$ j, sehingga ada arc dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$.

Dari *sifat* 3.2 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf star *ED*(*Sm*) adalah graf komplit K_m dimana arc dari titik central adjacent keluar ke semua titik daun dan arc dari setiap titik daun adjcent keluar ke setiap titik daun lainnya dengan jumlah arc

$|A(K_m)| = |A(ED(S_m))| = (m-1)^2$.

Contoh eksentrik digraf dari graf star S_m diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Garf S_5 dan eksentrik digrafnya

Eksentrik Digraf dari Graf Double Star.

Graf double star $S_{n,m}$ adalah graf yang terdiri dari dua graf star S_n dan S_m, dimana kedua titik centralnya saling bertetangga. Misal graf double star $S_{n,m}$ mempunyai himpunan titik

$$V(S_{n,m}) = \begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ V_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+m}\} \end{cases}$$

dimana : v_1 adalah titik central di V_1, v_2, v_3, …, vn adalah titik daun di V_1, v_{n+1} adalah titik central di V_2 dan v_{n+2}, v_{n+3}, …, v_{n+m} adalah titik daun di V_2, dan himpunan sisi

$$E(S_{n,m}) = \begin{cases} E_1 = \{e_0\} & \text{dimana } e_0 = v_1v_{n+1} \\ E_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} & \text{dimana } e_i = v_1v_{i+1} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \\ E_3 = \{e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m-2}\} & \text{dimana } e_{n-1+i} = v_{n+1}v_{n+1+i} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, m\text{-}1. \end{cases}$$

***Sifat* 3.3** *Eksentrisitas titik v_i pada graf double star $S_{n,m}$ adalah sebagai berikut*

$$ec(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ untuk } i = 1, n+1 \\ 3 \text{ untuk } i = 2, 3, \ldots, n, n+2, \ldots, n+m \end{cases}$$

Dari *definisi* graf double star $S_{n,m}$, dimana v_1 dan v_{n+1} adalah titik central dan v_i untuk setiap i = 2, 3, …, n, n+2, …, $n+m$ adalah titik daun, maka jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik central v_1 di V_1 adalah semua titik daun di V_2 dan jarak terjauh dari titik central v_{n+1} di V_2 adalah semua titik daun di V_1 yaitu dengan jarak 2. Jadi eksentrisitas titik $ec(v_1) = ec(v_{n+1}) = 2$. Demikian juga jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik daun di V_1 adalah semua titik daun di V_2 dan jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) titik daun di V_2 adalah semua titik daun di V_1 yaitu dengan jarak 3. Jadi eksentrisitas titik $ec(v_2) = ec(v_3) = \ldots = ec(v_n) = ec(v_{n+2}) = ec(v_{n+3}) = \ldots = ec(v_{n+m}) = 3$.

Akibat 3.2 *Titik eksentrik pada graf double star $S_{n,m}$ adalah sebagai berikut:*

$$\text{titik eksentrik dari } vi = \begin{cases} vj & \text{untuk } i = 1 \\ & j = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ vj & \text{untuk } i = n+1, \\ & j = 2, 3, \ldots, n \\ vj & \text{untuk } i = 2, 3, \ldots, n \\ & j = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ vj & \text{untuk } i = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ & j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

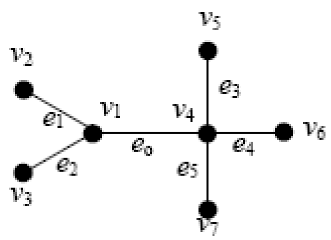
Dari *sifat* 3.3, eksentrisitas dari titik central v_1 di V_1 adalah 2, maka titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap $j = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2 dan eksentrisitas dari titik central v_{n+1} di V_2 adalah 2, maka titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap j = 2, 3, …, n di V_1. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun vi untuk setiap i = 2, 3, …, n di V_1 adalah 3 sehingga titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap $j = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2 dan eksentrisitas dari titik daun vi untuk setiap $i = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2 adalah 3 sehingga titik eksentriknya adalah titik daun v_j untuk setiap j = 2, 3, …, n di V_1.
Eksentrisitas titik $ec(v_i)$ dan titik eksentrik dari graf double star kita peroleh, maka kita mempunyai:

***Sifat* 3.4** *Eksentrik digraf dari graf double star ED(Sn,m) adalah digraf dengan himpunan titik V(ED(Sn,m)) = {v1, v2, v3, …, vn, vn+1, vn+2, …, vn+m} dan himpunan arc*

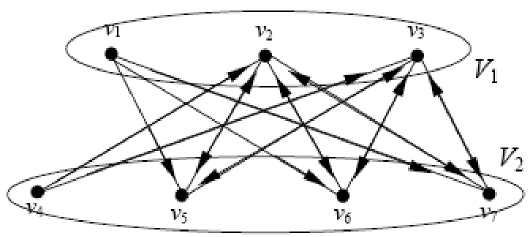
$$A(ED(S_{n,m})) = \begin{cases} v_1vj & \text{untuk } j = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ v_{n+1}vj & \text{untuk } j = 2, 3, \ldots, n \\ v_ivj & \text{untuk } i = 2, 3, \ldots, n \\ & j = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ v_ivj & \text{untuk } i = n+2, n+3, \ldots, n+m \\ & j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Dari *akibat* 3.2, dimana titik eksentrik dari titik central v_1 di V_1 adalah titik daun v_j untuk setiap $j = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2, sehingga ada arc dari v_1 ke v_j yaitu v_1v_j dan titik eksentrik dari titik central v_{n+1} di V_2 adalah titik daun v_j untuk setiap j = 2, 3, …, n di V_1, sehingga ada arc dari v_{n+1} ke v_j yaitu $v_{n+1}v_j$. Demikian juga titik eksentrik dari titik daun vi untuk setiap i = 2, 3, …, n di V_1 adalah titik daun v_j untuk setiap $j = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2, sehingga ada arc dari vi ke vj yaitu $vivj$ dan titik eksentrik dari titik daun vi untuk setiap $i = n+2, n+3, \ldots, n+m$ di V_2 adalah titik daun vj untuk setiap j = 2, 3, …, n di V_1, sehingga ada arc dari v_i ke v_j yaitu v_iv_j.
Dari *sifat* 3.4 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf double star $ED(S_{n,m})$ adalah digraf bipartit $D(B_{n,m})$ yang mempunyai dua himpunan titik yaitu $V_1(B_n)$ dan $V_2(B_m)$, dengan $V_1(B_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$dan $V_2(B_m) = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+m}\}$, dimana arc dari titik central v_1 di V_1 adjacent keluar ke titik daun di V_2 dan arc dari titik central v_{n+1} di V_2 adjacent keluar ke titik daun di V_1, demikian juga arc dari titik daun V_1 adjacent keluar ke titik daun di V_2 dan arc dari

titik daun V_2 adjacent keluar ke titik daun di V_1 dengan jumlah arc
$|A(ED(S_{n,m}))| = [(n-1)m + (m-1)n]$.
Contoh, eksentrik digraf dari graf double star $S_{n,m}$ diberikan pada Gambar 3.2.



$(S_{3,4})$



$ED(S_{3,4}) = D(B_{3,4})$

Gambar 3.2 Graf $S_{3,4}$ dan eksentrik diagrafnya

Eksentrik Digraf dari Graf Komplit Bipartit.

Misal graf komplit bipartit $K_{m,n}$ mempunyai himpunan titik

$$V(K_{m,n}) = \begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \\ V_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{m+n}\} \end{cases}$$

dan himpunan sisi $E(K_{m,n}) = \{e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{n1}, e_{12}, \ldots, e_{n2}, \ldots, e_{nm}\}$ dimana $e_{ij} = v_j v_{m+i}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, m$.

***Sifat* 3.5** *Eksentrisitas titik v_i pada graf komplit bipartit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:*
$ec(v_i) = 2$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, m+n$
Dari *definisi* graf komplit bipartit, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ di V_1 adalah semua titik di V_1 kecuali dirinya sendiri, demikian juga jarak terjauh dari vi untuk setiap $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ di V_2 adalah semua titik di V_2 kecuali dirinya sendiri, yaitu dengan jarak 2. Jadi $ec(v_i) = 2$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m+n$.

Akibat 3.5 *Titik eksentrik pada graf komplit bipartit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:*

titik eksentrik di V_1 dari $v_i = v_j$ untuk $i, j = 1, 2, \ldots, m$
$j \neq i$,

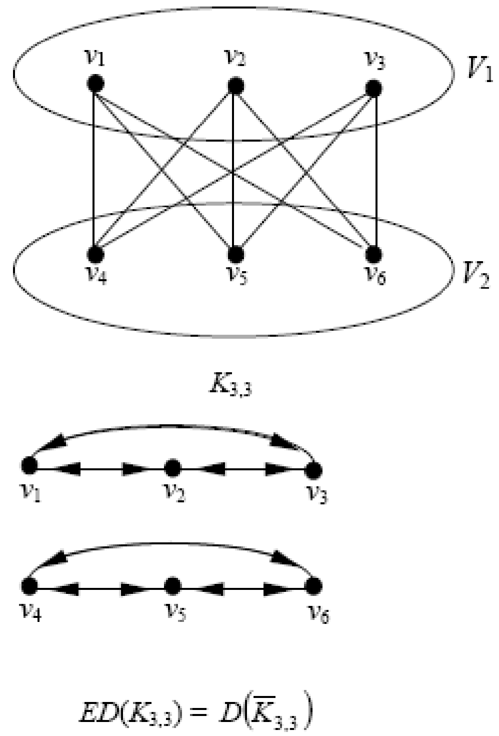
titik eksentrik di V_2 dari $v_i = v_j$ untuk $i, j = m+1, m+2, \ldots, m+n$
$j \neq i$.

Dari *sifat* 3.5, titik eksentrik dari vi di $V1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah vj di $V1$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, m$ dan $j \neq i$ dan titik eksentrik dari vi di $V2$ untuk $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ adalah vj di $V2$ untuk $j = m+1, m+2, \ldots, m+n$ dan $j \neq i$.

***Sifat* 3.6** *Eksentrik digraf dari graf komplit bipartit ED(Km,n) adalah digraf dengan himpunan titik V(ED(Km,n)) = {v1, v2, v3,…, vm+n} dan himpunan arc*

$$A(ED(K_{m,n})) = \begin{cases} v_i v_j \text{ untuk } i, j = 1, 2, 3, \ldots, m \\ \quad j \neq i \\ v_i v_j \text{ untuk } i, j = m+1, m+2, \ldots, m+n \\ \quad j \neq i \end{cases}$$

Dari *akibat* 3.3, titik eksentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah v_j di V_1 untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, m$ dengan $j \neq i$, sehingga ada arc dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$ dan titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk setiap $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ adalah v_j di V_2 untuk setiap $j = m+1, m+2, \ldots, m+n$ dengan $j \neq i$, sehingga ada arc dari titik v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$.
Dari *sifat* 3.6 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf komplit bipartit $ED(K_{m,n})$ adalah digraf komplemen $K_{m,n} = D(\overline{K}_{m,n})$ dengan himpunan titik $V(D(\overline{K}_{m,n})) = V(K_{m,n})$ dimana arc dari V_1 adjacent keluar ke semua titik di V_1 demikian juga di V_2 dengan jumlah arc
$|A(ED(K_{m,n}))| = [(m^2 + n^2) - (m + n)]$.
Contoh, graf komplit bipartit $K_{m,n}$ dan eksentrik digrafnya diberikan pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Graf komplit bipartit $K_{3,3}$ dan eksentrik diagraf

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai eksentrik digraf dari graf star, graf double star dan graf komplit bipartit adalah sebagai berikut:

1. Eksentrik digraf dari graf star $ED(S_m)$ adalah graf komplit K_m, dimana arc dari titik central adjacent keluar ke titik daun dan arc dari titik daun adjcent keluar ke titik daun lainnya dengan jumlah arc $|A(Km)| = |A(ED(Sm))| = (m\text{-}1)^2$.
2. Eksentrik digraf dari graf double star $ED(S_{n,m})$ adalah digraf bipartit $D(B_{n,m})$, dengan himpunan titik $V_1(B_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$dan $V_2(B_m) = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{n+m}\}$, dimana arc dari titik central v_1 di V_1 adjacent keluar ke titik daun di V_2, arc dari titik central v_{n+1} di V_1 adjacent keluar ke titik daun di V_2, arc dari titik central v_{n+1} di V_2 adjacent keluar ke titik daun di V_1, arc dari titik daun V_1 adjacent keluar ke titik daun di V_2 adjacent keluar ke titik daun di V_1 dengan jumlah arc $|A(ED(S_{n,m}))| = [(n-1)m + (m-1)n]$.
3. Eksentrik digraf dari graf komplit bipartit $ED(K_{m,n})$ adalah digraf komplemen $D(\overline{K}_{m,n})$, dengan himpunan titik $V(D(\overline{K}_{m,n}))= V(Km,n)$, dimana arc dari $V1$ adjacent keluar ke semua titik di $V1$ dan arc dari $V2$ adjacent keluar ke semua titik di $V2$ dengan jumlah arc $|A(ED(Km,n))| = [(m^2 + n^2) - (m + n)]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Nugroho, Kustanto Widi. 2002 . *http://www.unej.ac.id/fakultas/mipa/skripsi/widi.pdf* . Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 17:00.

[2] Munir, Rinaldi. 2006. Matematika Diskrit Edisi Keempat. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[3] Gary Chartrand & Ortrud R. O. 1993. *Apllied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw. Hill, Inc.

[4] Townsend, Michael . 1987 . *Discrete Mathemathic : Applied Combinatorics and Graph Theory* . The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

[5] Wilson , Robin J. & John J. Watkins . 1990 . *Graphs an Introductory Approach* . John Wiley & Sons, Inc.

[6] Buckley, F. ---- . *The Eccentric Digraph of a Graph*, preprint.

[7] Chartrand, G. and Lesniak . 1996 . *Graphs & Digraphs*, 3rd ed . Chapman & Hill.