

PENGEMBANGAN METODE INDUKSI MATEMATIKA DAN PENERAPANNYA DALAM RUANG LINGKUP MATEMATIKA DISKRIT

Dimas Yusuf Danurwenda – NIM : 13505002

*Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
E-mail : if15002@students.if.itb.ac.id*

Abstrak

Proposisi dalam matematika hadir dalam dua bentuk: proposisi umum, yang menyatakan bahwa suatu pernyataan adalah benar untuk *semua* nilai x dalam suatu himpunan yang ditentukan, dan proposisi eksistensi, yang menyatakan bahwa *ada* suatu nilai x dalam suatu himpunan yang ditentukan, sehingga suatu pernyataan benar untuk nilai x tersebut. Dalam makalah ini kita akan meninjau suatu teknik yang sangat penting berkaitan dengan bentuk proposisi umum, yaitu prinsip induksi matematika.

Induksi matematika adalah suatu hal yang sederhana namun sangat ampuh untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam banyak ruang lingkup, seperti aritmatik, aljabar, dan geometri. Kebanyakan buku teks untuk pelajaran sekolah yang membahas induksi matematika terbatas hanya pada proposisi-proposisi yang berkaitan dengan teori bilangan, semisal rumus untuk jumlah suatu deret. Di sisi lain, buku-buku teks untuk perkuliahan yang membahas induksi matematika biasanya hanya terbatas sebagai menggunakan prinsip induksi sebagai aksioma untuk menunjukkan kebenaran dari beberapa sifat bilangan bulat. Sebenarnya prinsip ini dapat digunakan dalam ruang lingkup yang sangat luas, bergantung dari seberapa lihai kita melihat celah untuk penggunaan induksi matematika.

Metode dalam menggunakan induksi matematika sangat bervariasi dan tidak kaku. Tiap-tiap metode memiliki tipe penerapan tersendiri. Makalah ini akan membahas beberapa pengembangan metode untuk induksi matematika dan tidak lupa menyertakan contoh penggunaan metode-metode tersebut dalam menyelesaikan masalah pada ruang lingkup matematika diskrit dan ruang lingkup lainnya.

Kata kunci: Induksi Matematika, Prinsip Aturan Rapi, proposisi.

1. Pendahuluan

Banyak proposisi-proposisi dalam matematika memiliki bentuk proposisi umum, yaitu tingkat kebenarannya dijamin untuk semua elemen dari sebuah himpunan. Untuk membuktikan kebenaran dari proposisi tersebut, tentunya diperlukan suatu metode yang efektif dan tidak cenderung untuk mengecek kebenaran proposisi pada *setiap* elemen himpunan tersebut. Hal ini masih mungkin dilakukan jika himpunan ruang lingkup proposisi tersebut memiliki banyak elemen berhingga, namun bagaimana dengan himpunan yang memiliki tak hingga banyaknya elemen, seperti himpunan seluruh bilangan asli atau himpunan seluruh graf planar? Untuk membuktikan proposisi-proposisi dalam ruang lingkup himpunan sedemikian, muncullah suatu metode pembuktian yang dinamakan Prinsip Induksi Matematika.

Pada awalnya Prinsip Induksi Matematika hanya mengambil pada ruang lingkup proposisi-proposisi yang benar-benar berkaitan pada bilangan bulat, seperti jumlah dari suatu deret sepanjang n suku. Dengan berkembangnya metode dalam induksi matematika ini, induksi menjadi salah satu metode yang ampuh dalam menyelesaikan masalah-masalah yang tidak hanya berkaitan dengan bilangan bulat. Contohnya induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan identitas-identitas dalam peluang (kombinatorial), graf, bahkan geometri.

Prinsip Induksi Matematika sendiri berdiri sebagai sebuah aksioma, artinya kita menerima kebenaran dari prinsip tersebut tanpa meminta buktinya, dan memang pada kenyataannya, Prinsip Induksi Matematika dianggap sebagai salah satu dasar aksioma dalam beberapa teori matematika yang melibatkan bilangan asli. [2]

2. Varian-varian Prinsip Induksi Matematika

Dalam makalah ini, Prinsip Induksi Matematika kita kembangkan menjadi tujuh varian, yaitu:

1. Prinsip Induksi Matematika (PIM) Dasar
2. PIM yang Dirampatkan
3. PIM Berjeda Tak-satu
4. Prinsip Aturan Rapi (PAR)
5. PIM Kuat
6. PIM Bekerja Mundur
7. PIM Bentuk Umum

Tiap-tiap varian akan dijelaskan beserta contoh-contoh penerapannya dalam menyelesaikan masalah.

2.1 PIM Dasar

Perhatikan sebuah barisan tak-hingga dari proposisi-proposisi matematika

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

Jika

1. $P(1)$ benar (dapat dibuktikan), dan
2. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ (kita dapat membuktikan $P(m+1)$ dengan asumsi $P(m)$ benar)

Maka semua proposisi dalam barisan tersebut adalah benar, dengan kata lain, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

PIM Dasar ini diterima sebagai sebuah aksioma, dan digunakan untuk membuktikan kebenaran dari varian-varian lain induksi matematika. Sekarang marilah kita melihat beberapa contoh penggunaan PIM Dasar dalam menyelesaikan masalah.

Contoh 2.1.1 Tunjukkan bahwa

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

SOLUSI. Pertama-tama, kita gunakan PMI Dasar untuk membuktikan bahwa

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Untuk $n = 1$, kita punya $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ benar. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2},$$

maka

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + m + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2}, \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan PMI Dasar, klaim awal kita telah terbukti.

Sekarang kita menggunakan PMI Dasar lagi untuk membuktikan bahwa

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Untuk $n = 1$, kita punya $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ benar. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

maka

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + m^3 + (m+1)^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\ &= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan PMI Dasar, klaim kita terbukti.

Menggabungkan dua klaim kita, kita dapatkan

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \dots + n)^2. \square$$

Terkadang pemilihan $P(n)$ tidak tampak secara eksplisit dari permasalahan yang diberikan [3]. Hal ini menuntut kita untuk berpikir kreatif dalam menentukan $P(n)$. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.1.2 [Kasus khusus dari Pertidaksamaan Bernoulli] Tunjukkan bahwa jika x suatu bilangan real positif, maka $(1+x)^n \geq nx^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

SOLUSI. Yang mungkin langsung terbersit dalam pikiran kita adalah menetapkan $P(n)$ sebagai proposisi " $(1+x)^n \geq nx^n$ ". Marilah kita lihat bagaimana pemilihan $P(n)$ ini tidak bekerja sebagaimana mestinya.

$P(1)$ benar karena $1+x \geq x$. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ benar. Maka

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \geq mx(1+x).$$

Tapi kita tidak dapat langsung menyimpulkan (untuk membuktikan $P(m+1)$ benar) bahwa $mx(1+x) \geq (m+1)x$ (sebagai contoh, $m = 1$ dan $x = 0.5$). Jadi pengerjaan kita terhenti sampai di sini.

Kita jangan langsung menyimpulkan bahwa PIM tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah ini. Sebenarnya PIM bisa digunakan asalkan kita melakukan pemilihan $P(n)$ yang tepat. Memang terkadang pemilihan $P(n)$ sedemikian kurang jelas

terlihat dari permasalahan, namun hal ini akan menunjukkan betapa PIM sangat mumpuni dalam menyelesaikan masalah.

Marilah kita tentukan $P(n)$ sebagai pernyataan “ $(1+x)^n \geq nx+1$ ”. $P(1)$ benar karena $1+x \geq x+1$. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ benar. Maka

$$\begin{aligned} (1+x)^{m+1} &= (1+x)^m(1+x) \\ &\geq (mx+1)(1+x) \\ &= mx^2 + (m+1)x + 1 \\ &\geq (m+1)x + 1, \end{aligned}$$

yang berarti $P(m+1)$ benar. Berdasarkan PMI Dasar, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Untuk melengkapi penyelesaian masalah, perhatikan bahwa $(n+1)x+1 > (n+1)x$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi permasalahan pada soal telah selesai. \square

Sekarang akan diberikan dua contoh penggunaan PIM Dasar dalam ruang lingkup pokok bahasan Matematika Diskrit. Kali ini kita mengambil topik Kombinatorial dan Graf.

Aplikasi 2.1.1 *Gunakan induksi matematika untuk membuktikan teorema binomial:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

dimana $n \in \mathbb{N}$.

SOLUSI. Mudah untuk melihat bahwa teorema tersebut benar untuk $n=1$. Sekarang asumsikan teorema tersebut benar untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Mengalikan kedua sisi dengan $(a+b)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} (a+b)^m(a+b) &= \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^i b^{m-i} \right] (a+b) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^{i+1} b^{m-i} + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^i b^{m-i+1}. \end{aligned}$$

Pada notasi sigma yang pertama, gunakan variabel pengganti $j=i+1$, sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} a^j b^{m+1-j} + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^i b^{m-i+1} \\ &= \left[\sum_{j=1}^m \binom{m}{j-1} a^j b^{m+1-j} + a^{m+1} \right] \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} a^i b^{m-i+1} + b^{m+1} \right] \\ &= a^{m+1} + \left[\sum_{i=1}^m \left[\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} \right] a^i b^{m-i+1} \right] + b^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^{m+1} + \left[\sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} a^i b^{m-i+1} \right] + b^{m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} a^i b^{m+1-i} \end{aligned}$$

yang merupakan bentuk teorema binomial untuk $m+1$. Berdasarkan PIM Dasar, teorema ini benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

Aplikasi 2.1.2 *Diberikan sebuah graf sederhana dengan $2n$ simpul dan n^2+1 sisi. Tunjukkan bahwa terdapat 3 simpul sedemikian sehingga ketiga simpul tersebut saling terhubung.*

SOLUSI. Pertama-tama kita nyatakan “segitiga” sebagai himpunan 3 simpul sedemikian sehingga ketiga simpul tersebut saling terhubung. Kita akan membuktikan kontraposisi dari pernyataan pada soal. Nyatakan $P(n)$ sebagai pernyataan “sebuah graf sederhana dengan $2n$ titik dan tidak mengandung segitiga memiliki paling banyak n^2 sisi”.

$P(1)$ jelas benar. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(m+1)$ juga benar.

Misalkan G adalah sebuah graf dengan $2m+2$ simpul dan tidak mengandung segitiga. Ambil dua simpul terhubung A, B dari G . Abaikan A, B dan semua garis yang terhubung dengan A atau B . Yang tersisa adalah sebuah graf G' dimana G' memiliki $2m$ simpul dan tidak mengandung segitiga. Berdasarkan asumsi bahwa $P(m)$ benar, maka G' memiliki paling banyak m^2 sisi.

Sekarang kita menghitung berapa banyak sisi yang mungkin dimiliki oleh G . Perhatikan bahwa tidak ada simpul C pada G sehingga A dan B terhubung ke C . Jadi jika A terhubung ke x simpul di G' , maka B terhubung ke paling banyak $2m-x$ simpul di G' . Jadi (dengan tidak melupakan sisi AB) G paling banyak memiliki $n^2 + (2n-x) + x + 1 = (n+1)^2$ sisi. Berdasarkan PMI Dasar, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Karena nilai kebenaran sebuah kontraposisi dari sebuah proposisi sama dengan nilai kebenaran dari proposisi tersebut, maka masalah dalam soal telah kita selesaikan. \square

2.2 PIM yang Dirampatkan

Perhatikan sebuah barisan tak-hingga dari proposisi-proposisi matematika

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

Misalkan $k \in \mathbb{N}$. Jika

1. $P(k)$ benar (dapat dibuktikan), dan
2. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}, m \geq k$, $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ (kita dapat membuktikan $P(m+1)$ dengan asumsi $P(m)$ benar)

Maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq k$.

BUKTI. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, nyatakan $Q(n) = P(n+k-1)$. Dapat dilihat bahwa $Q(1), Q(2), Q(3), \dots$ memenuhi kondisi PMI Dasar, maka kita simpulkan $Q(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, yang mengakibatkan $P(n)$ benar untuk semua $n \geq k$. \square

Contoh 2.2.1 Tunjukkan bahwa setiap segitiga tidak sama sisi dapat dibagi menjadi n ($n \geq 4$) segitiga samakaki.

SOLUSI. Kita tunjukkan dengan menggunakan induksi. Nyatakan $P(n)$ sebagai “setiap segitiga tidak sama sisi dapat dibagi menjadi n ($n \geq 4$) segitiga samakaki”.

Jika $n = 4$, maka kita cukup menarik garis tinggi dari salah satu sudut sehingga garis tinggi tersebut berpotongan dengan sisi di hadapan sudut tersebut bukan pada perpanjangannya, sehingga kita membagi segitiga tersebut menjadi dua segitiga siku-siku, sedangkan setiap segitiga siku-siku itu dapat kita bagi menjadi dua buah segitiga samakaki, sehingga pada akhirnya kita membagi segitiga tersebut menjadi empat segitiga samakaki. Jadi $P(4)$ benar.

Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}, m \geq 4$ $P(m)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(m+1)$ juga benar. Misalkan segitiga yang akan dibagi adalah segitiga ABC dan panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b, c , di mana $a \leq b \leq c$. Karena segitiga ABC tidak samasisi maka kita bisa memilih dua sisi yang tidak sama panjang, misalkan sisi-sisi tersebut adalah a dan c . Sekarang kita bagi segitiga ABC menjadi segitiga samakaki DCB dan segitiga DCA , dimana D terletak pada sisi AB , dan $BC = BD$. Sekarang berdasarkan asumsi induksi, segitiga DCA dapat dibagi menjadi m buah segitiga samakaki (karena DCA bukan segitiga samasisi). Sehingga kita dapat menarik kesimpulan bahwa segitiga ABC dapat dibagi menjadi $m+1$ buah segitiga samakaki. Jadi $P(m+1)$ juga benar. Berdasarkan PMI yang Dirampatkan, maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. \square

Contoh 2.2.2 Tunjukkan bahwa $3^n > n^3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

SOLUSI. Jika $n = 4$, maka ketaksamaan jelas benar karena $81 > 64$. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \geq 4, 3^m > m^3$. Maka

$$\begin{aligned} 3^{m+1} &= 3(3^m) > 3m^3 = m^3 + m^3 + m^3 \\ &> m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\ &= (m+1)^3, \end{aligned}$$

karena $m > 3$ dan $m(m-3) > 1$, sehingga $m^3 > 3m^2$ dan $m^3 > m^2 > 3m + 1$. Berdasarkan PIM yang Dirampatkan, $3^n > n^3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. \square

Sekarang kita akan melihat contoh penggunaan PIM yang Dirampatkan ini pada salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit, kali ini kita mengambil topik Teori Bilangan.

Aplikasi 2.2.1 [Bulgaria 1996 Mathematical National Contest] Tunjukkan bahwa terdapat bilangan-bilangan ganjil x dan y sehingga $2^n = 7x^2 + y^2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

SOLUSI. Sebelum menetapkan $P(n)$, marilah kita mencari pola x dan y untuk beberapa nilai n yang kecil. Untuk lebih mudahnya, perhatikan Tabel 1, dimana nilai-nilai x dan y dalam tabel tersebut diperoleh hanya dengan menduga-duga tanpa rumus tertentu.

Tabel 1. Nilai-nilai x, y untuk $3 \leq n \leq 10$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	1	1	3	1	5	7	3
y	1	3	5	1	11	9	13	31

Kita akan mencari bagaimana pola untuk (x', y') untuk suatu $n+1$ dihasilkan oleh nilai-nilai (x, y) untuk nilai n . Mari kita mulai dengan mencari pola untuk x . Untuk $n = 4, x'$ dapat kita peroleh dengan menarik rata-rata aritmatik dari x dan y . Untuk $n = 5$, kita peroleh rata-rata aritmatik dari $(1, 3)$ adalah 2, bukan suatu bilangan ganjil. Mari kita coba dengan $\frac{|x-y|}{2}$, kali ini pemilihan pola kita berhasil. Dengan meninjau untuk nilai-nilai n selanjutnya, kita dapat menyimpulkan bahwa $x' = \frac{x+y}{2}$ jika x' ganjil, jika tidak maka ambil $x' = \frac{|x-y|}{2}$.

Setelah menemukan pola untuk x , mari sekarang kita mencari pola untuk y . Jelas bahwa pola untuk x tidak berlaku di sini. Mengingat pada soal terdapat angka 7 sebagai koefisien x^2 , kita coba pola yang mirip dengan pola untuk x , namun kita tambahkan koefisien 7 pada x . Jadi kita mencoba pola $y' = \frac{7x+y}{2}$ jika y' ganjil, jika tidak maka ambil $y' = \frac{|7x-y|}{2}$.

Dengan meninjau nilai-nilai pada tabel, terlihat pola untuk y ini memang memenuhi.

Untuk lebih meyakinkan kita akan bekerjanya pola ini, perhatikan bahwa tepat satu dari $\frac{x+y}{2}$ atau $\frac{|x-y|}{2}$ ganjil karena $\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x, y)$. Begitu pula tepat satu dari $\frac{7x+y}{2}$ atau $\frac{|7x-y|}{2}$ ganjil karena $\frac{7x+y}{2} + \frac{|7x-y|}{2} = \max(7x, y)$. Selanjutnya, perhatikan bahwa x' berbentuk rataan aritmatik jika dan hanya jika y' berbentuk nilai mutlak. Jika $\frac{x+y}{2}$ ganjil, maka $\frac{|7x-y|}{2} = \left| 4x - \frac{x+y}{2} \right|$ yang pasti ganjil, sedangkan jika $\frac{|x-y|}{2}$ ganjil, maka $\frac{7x+y}{2} = 4x - \frac{x-y}{2}$ yang juga pasti ganjil.

Jadi sekarang kita memiliki transformasi-transformasi berikut untuk membangkitkan pasangan bilangan (x', y') :

$$S: (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{|7x-y|}{2} \right), \text{ dan}$$

$$T: (x, y) \mapsto \left(\frac{|x-y|}{2}, \frac{7x+y}{2} \right).$$

Sekarang barulah kita menggunakan PIM yang dirampatkan untuk menyelesaikan soal ini. Nyatakan $P(n)$ sebagai proposisi “terdapat bilangan-bilangan ganjil x dan y sehingga $2^n = 7x^2 + y^2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ”. Dengan melihat tabel, kita dapatkan $P(3)$ benar. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(m+1)$ juga benar. Dengan menggunakan transformasi S , kita punya

$$\begin{aligned} 7 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 + \left(\frac{7x-y}{2} \right)^2 &= 14x^2 + 2y^2 \\ &= 2(7x^2 + y^2) = 2(2^m) \\ &= 2^{m+1}. \end{aligned}$$

Cara yang sama dapat kita lakukan terhadap transformasi T . Kedua transformasi membangkitkan solusi yang benar, sehingga berdasarkan PMI yang Dirampatkan, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. \square

2.3 PIM Berjeda Tak-satu

Perhatikan sebuah barisan tak-hingga dari proposisi-proposisi matematika

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

Misalkan $a, d \in \mathbb{N}$. Jika

1. $P(a)$ benar (dapat dibuktikan), dan
2. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $P(a + (m-1)d) \Rightarrow P(a + md)$ (kita dapat membuktikan

$$P(a + md) \text{ dengan asumsi } P(a + (m-1)d) \text{ benar}$$

Maka $P(a + (n-1)d)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

BUKTI. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, nyatakan $Q(n) = P(a + (n-1)d)$. Dapat dilihat bahwa $Q(1), Q(2), Q(3), \dots$ memenuhi kondisi PMI Dasar, maka kita simpulkan $Q(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, yang mengakibatkan $P(a + (n-1)d)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

Salah satu contoh kegunaan PIM Berjeda Tak-satu ini adalah untuk membuktikan proposisi yang berlaku untuk semua bilangan genap, yaitu dengan menyulihkan $a = 2$ dan $d = 2$.

Contoh 2.3.1 [UTS Matematika Diskrit Semester Ganjil 2006/2007] Buktikan dengan induksi matematika bahwa semua bilangan berbentuk $x = 11 \dots 1_n$ (n adalah jumlah pengulangan angka 1, misalnya $n = 4$ maka $x = 1111$) pasti kongruen dengan $0 \pmod{11}$ atau $1 \pmod{11}$ (misalnya $111 \equiv 1 \pmod{11}$ dan $111111 \equiv 0 \pmod{11}$).

SOLUSI. Kita akan menggunakan PIM Berjeda Tak-satu sebanyak 2 kali secara terpisah namun dengan $P(n)$ yang sama. Nyatakan $P(n)$ sebagai “bilangan $11 \dots 1_n$ kongruen dengan $0 \pmod{11}$ atau $1 \pmod{11}$ ”. Disini kita akan membuktikan 2 klaim:

- i. Jika n bilangan ganjil positif, maka $11 \dots 1_n \equiv 1 \pmod{11}$.
- ii. Jika n bilangan genap positif, maka $11 \dots 1_n \equiv 0 \pmod{11}$.

$P(1)$ benar karena $1 \equiv 1 \pmod{11}$. Jadi kita memiliki basis untuk klaim (i). $P(2)$ juga benar karena $11 \equiv 0 \pmod{11}$, jadi kita memiliki basis untuk klaim (ii). Sekarang asumsikan bahwa untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(a + 2(m-1))$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(a + 2m)$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 11 \dots 1_{a+2m} &= 100 \times 11 \dots 1_{a+2(m-1)} + 11 \\ &\equiv 11 \dots 1_{a+2(m-1)} \pmod{11}, \end{aligned}$$

karena $100 \equiv 1 \pmod{11}$ dan $11 \equiv 0 \pmod{11}$. Jadi jika $11 \dots 1_{a+2(m-1)} \equiv 0 \pmod{11}$, maka $11 \dots 1_{a+2m} \equiv 0 \pmod{11}$. Begitupula jika $11 \dots 1_{a+2(m-1)} \equiv 1 \pmod{11}$, maka $11 \dots 1_{a+2m} \equiv 1 \pmod{11}$. Jadi terbukti jika $P(a + 2(m-1))$ benar, maka $P(a + 2m)$ juga benar.

Dengan menyulihkan $a = 1$, maka berdasarkan PIM Berjeda Tak-satu, klaim (i) kita terbukti, dan dengan menyulihkan $a = 2$, maka berdasarkan PIM Berjeda Tak-satu, klaim (ii) kita terbukti. Karena kita telah membuktikan untuk semua bilangan ganjil dan semua

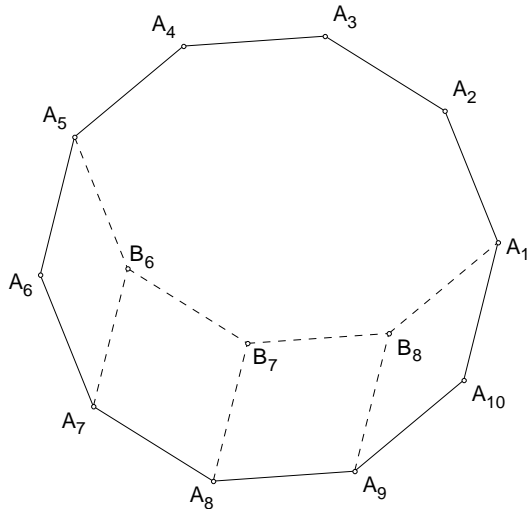
bilangan genap $P(n)$ benar, maka kita simpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

Contoh 2.3.2 [International Mathematical Olympiad 1979] Sebuah poligon konveks dengan jumlah sisi genap, semua sisi memiliki panjang yang sama, dan setiap sisi paralel dengan sisi di hadapannya kita namakan parpoligon. Tunjukkan bahwa sebarang parpoligon dapat diiris-iris sehingga setiap potongannya berbentuk belah ketupat.

SOLUSI. Nyatakan $P(n)$ sebagai “sebuah parpoligon bersisi n dapat diiris-iris sehingga setiap potongannya berbentuk belah ketupat”. Kita akan menggunakan PIM Berjeda Tak-satu dengan $a = 4$ dan $d = 2$. $P(4)$ benar karena sebuah parpoligon dengan 4 sisi itu sendiri pastilah sebuah belah ketupat. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(2m + 2)$ benar.

Perhatikan sebuah parpoligon dengan $(2m + 4)$ sisi dan titik sudut-titik sudut $A_1, A_2, \dots, A_{2m+4}$. Konstruksi titik-titik $B_{m+3}, B_{m+4}, \dots, B_{2m+2}$ pada bagian dalam parpoligon sehingga sisi-sisi

$A_{m+2}A_{m+3}, B_{m+3}A_{m+4}, \dots, B_{2m+2}A_{2m+3}$ saling paralel satu sama lain dan memiliki panjang yang sama. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 1 untuk contoh kasus $m = 3$.



Gambar 1. Parpoligon dengan 10 sisi

Sekarang mudah untuk melihat bahwa

$A_1A_2 \dots A_{m+2}B_{m+3}B_{m+4} \dots B_{2m+2}$ membentuk sebuah parpoligon dengan $2m + 2$ sisi, dan dengan asumsi induksi, dapat dibagi menjadi belah ketupat-belah ketupat. Perhatikan pula bahwa segiempat-segiempat

$$\begin{aligned} &A_{m+2}A_{m+3}A_{m+4}B_{m+3}, \\ &\quad \vdots, \\ &B_{2m+1}A_{2m+2}A_{2m+3}B_{2m+2}, \end{aligned}$$

$B_{2m+2}A_{2m+3}A_{2m+4}A_1$ seluruhnya adalah belah ketupat, sehingga parpoligon dengan titik sudut-titik sudut

$$A_1A_2, \dots, A_{2m+4}$$

dapat diiris menjadi belah ketupat-belah ketupat. Berdasarkan PMI Berjeda Tak-satu, $P(n)$ benar untuk semua n bilangan genap positif. \square

Sekarang mari kita tinjau satu contoh penggunaan PIM Berjeda Tak-satu dalam ruang lingkup Graf.

Aplikasi 2.3.1 Tunjukkan bahwa graf sederhana dengan n simpul, k sisi, dan tidak mengandung K_4 memenuhi ketaksamaan $k \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

SOLUSI. Nyatakan $P(n)$ sebagai pernyataan “graf sederhana dengan n simpul, k sisi, dan tidak mengandung K_4 memenuhi ketaksamaan $k \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ ”. Sebagai basis induksi, akan kita tunjukkan bahwa $P(1), P(2)$, dan $P(3)$ benar. Kemudian sebagai tahap induksi, kita gunakan PIM Berjeda Tak-satu dengan $d = 3$.

$P(1)$ jelas benar karena $k = 0 \leq \lfloor \frac{1^2}{3} \rfloor$. $P(2)$ benar karena $k \leq 1 \leq \lfloor \frac{2^2}{3} \rfloor$. $P(3)$ juga benar karena $k \leq 3 \leq \lfloor \frac{3^2}{3} \rfloor$. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(a + 3(m - 1))$ benar.

Perhatikan sebuah graf G dengan $a + 3m$ simpul. Jika pada G tidak terdapat lintasan segitiga, maka kita bisa menambahkan sisi-sisi secukupnya sehingga terdapat segitiga pada G namun tetap tidak terdapat K_4 . Ambil tiga simpul dari G yang membentuk segitiga, namakan simpul-simpul A, B , dan C . Abaikan A, B, C , dan semua sisi yang terhubung dengan mereka. Yang tersisa adalah graf G' dengan $a + 3(m - 1)$ simpul dan tidak mengandung K_4 . Berdasarkan asumsi induksi, banyaknya sisi pada G' tak lebih dari $\lfloor \frac{(a+3(m-1))^2}{3} \rfloor$.

Sekarang kita menghitung berapa banyak sisi yang mungkin dimiliki oleh G . Perhatikan bahwa agar tidak terdapat K_4 pada G , sebuah simpul pada G' paling banyak hanya terhubung ke 2 dari 3 simpul $\{A, B, C\}$. Jadi total banyaknya sisi di luar G' yang mungkin adalah $3 + 2(a + 3(m - 1))$. Menjumlahkan ini dengan jumlah sisi maksimal yang mungkin di G' , kita dapatkan jumlah sisi maksimal yang mungkin di G adalah

$$\left\lfloor \frac{(a + 3(m - 1))^2}{3} \right\rfloor + 3 + 2(a + 3(m - 1)) = \left\lfloor \frac{(a + 3m)^2}{3} \right\rfloor.$$

Jadi $P(a + 3m)$ juga benar. Berdasarkan PIM Berjeda Tak-satu, $P(a + 3(n - 1))$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Dengan menyulihkan $a = 1, 2, 3$, kita simpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

2.4 Prinsip Aturan Rapi

Misalkan S adalah suatu himpunan bilangan asli tidak kosong. Maka S memiliki elemen terkecil: terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $s \in \mathbb{N}$, $m \leq s$.

BUKTI. Misalkan S adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga tidak terdapat elemen terkecil. Akan ditunjukkan bahwa S adalah himpunan kosong. Nyatakan $P(n)$ sebagai “jika k bilangan asli sehingga $k \leq n$, maka $k \notin S$ ”. Sekarang perhatikan bahwa $P(1)$ benar, karena jika $1 \in S$, maka 1 akan menjadi elemen terkecil mengingat setiap bilangan asli adalah lebih besar atau sama dengan 1. Sekarang asumsikan $P(m)$ benar untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Untuk membentuk kontradiksi, asumsikan $P(m + 1)$ salah. Karena $P(m)$ benar dan $P(m + 1)$ salah, maka $m + 1 \in S$. Lalu, berdasarkan asumsi, S tidak memiliki elemen terkecil, berarti ada $k \in S$ sehingga $k < m + 1$. Tapi jika demikian, $k \leq m$, kontradiksi dengan asumsi kita bahwa $P(m)$ benar. Jadi $P(m + 1)$ juga pasti benar. Berdasarkan PMI Dasar, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, mengakibatkan S haruslah sebuah himpunan kosong. \square

Salah satu contoh penggunaan PAR yang paling umum adalah suatu metode yang disebut “*method of infinite descent*”. Misalkan kita memiliki barisan proposisi

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

yang ingin kita tunjukkan kebenarannya. Jika kita dapat menunjukkan bahwa “untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ sehingga $P(k)$ salah, terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $P(m)$ salah dan $m < k$ ”. Maka kita dapat menyimpulkan dengan PAR bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Sebab jika tidak demikian, maka himpunan k sehingga $P(k)$ salah tidak kosong, yang dengan pernyataan di atas, tidak memiliki elemen terkecil, berlawanan dengan PAR. Berikut disajikan beberapa contoh penggunaan metode ini.

Contoh 2.4.1 [USA Mathematical Olympiad, 1978] Sebuah bilangan bulat n dikatakan baik jika kita dapat menuliskan n sebagai

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n,$$

dimana a_1, a_2, \dots, a_k adalah bilangan bulat positif (tidak harus berbeda) sehingga

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Diketahui bahwa seluruh bilangan bulat dari 33 hingga 73 adalah baik, tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat lebih besar dari 32 adalah baik.

SOLUSI. Sebuah bilangan bulat kita katakan *buruk* jika tidak baik. Apa yang ingin kita buktikan adalah tidak ada bilangan buruk yang lebih besar dari 32. Untuk membentuk kontradiksi, andaikan himpunan S dengan elemen bilangan-bilangan buruk lebih besar dari 32 adalah tidak kosong. Berdasarkan PAR, himpunan ini memiliki elemen terkecil, katakanlah m . Dengan informasi yang diberikan, kita ketahui bahwa $m \geq 74$.

Sekarang andaikan m genap. Misalkan $p = \frac{m-8}{2}$. Kita punya $p \geq 33$, dan karena m adalah elemen terkecil di S , dan $p < m$, maka p adalah bilangan baik. Jadi terdapat

$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad \text{sehingga} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k = p,$$

dan

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Perhatikan bahwa

$$4 + 4 + 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k = m,$$

dan

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \dots + \frac{1}{2a_k} = 1,$$

yang berarti m adalah bilangan baik, kontradiksi dengan asumsi semula.

Dengan cara serupa, kita bisa mencapai kontradiksi yang sama jika m ganjil. Kali ini dengan mengambil $p = \frac{m-9}{2}$, menggunakan fakta bahwa $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ serta

$$3 + 6 + 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k = m.$$

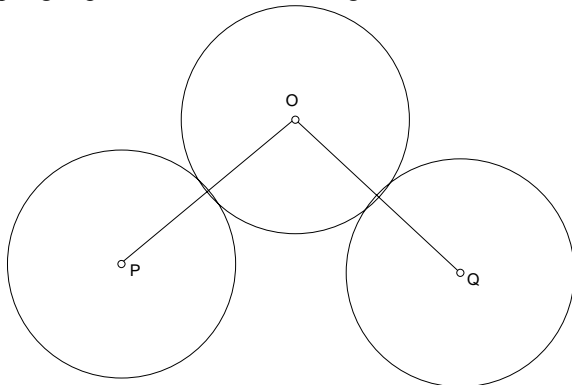
Jadi kedua kasus membawa kita pada kontradiksi, sehingga kita simpulkan S adalah himpunan kosong, yang berarti semua bilangan bulat lebih besar daripada 32 adalah baik. \square

Contoh 2.4.2 Beberapa koin serupa diletakkan di atas meja sehingga ada koin-koin yang saling menyentuh namun tidak bertindihan. Buktikan bahwa koin-koin ini dapat diwarnai hanya dengan 4 warna sehingga tidak ada pasangan koin yang bersentuhan memiliki warna yang sama.

SOLUSI. Kasus ini sebenarnya hanyalah sebuah representasi kasus khusus dari pewarnaan graf planar. Kita gunakan PAR untuk membuktikannya.

Untuk membangun kontradiksi, kita andaikan terdapat pengaturan koin-koin sehingga membutuhkan lebih dari 4 warna. Misalkan S adalah himpunan bilangan asli n sehingga terdapat pengaturan n koin yang membutuhkan lebih dari 4 warna. Berdasarkan PAR, himpunan S memiliki elemen terkecil, katakanlah elemen ini m . Perhatikan bahwa $m > 4$. Sekarang perhatikan sebuah pengaturan m koin yang membutuhkan pewarnaan lebih dari 4 warna. Perhatikan titik pusat dari koin-koin itu, dan seluruh garis yang menghubungkan antar titik pusat ini.

Perhatikan bahwa pasti terdapat suatu subset dari garis-garis ini yang membentuk poligon yang memuat seluruh garis lainnya (istilah poligon ini dalam matematika adalah *convex hull*). Setidaknya terdapat satu titik sudut pada poligon ini yang memiliki besar sudut kurang dari 180° . Sebutlah titik ini titik O . Sekarang jika koin dengan titik pusat O bersentuhan dengan 2 koin lainnya yang berpusat di P dan Q , maka karena $PQ > PO$ dan $PQ > QO$, kita dapatkan $\angle POQ \geq 60^\circ$ (gambar 2). Sekarang perhatikan bahwa koin dengan pusat O hanya dapat bersentuhan dengan paling banyak satu koin lainnya, sehingga total banyaknya koin yang mungkin bersentuhan dengan O adalah 3 buah, sebab jika koin O bersentuhan dengan sedikitnya 4 koin, sudut poligon pada O akan tidak kurang dari 180° .



Gambar 2. Koin O sebagai titik sudut *convex hull*

Sekarang kita ambil koin dengan pusat O tersebut. Berdasarkan asumsi, susunan yang sekarang dapat diwarnai hanya dengan 4 warna, karena jumlah koin kurang dari m . Tapi jika susunan yang sekarang ini dapat diwarnai hanya dengan 4 warna, tentunya susunan awal juga dapat diwarnai dengan 4 warna, yaitu dengan mewarnai koin yang berpusat di O dengan sebarang warna yang tidak digunakan oleh koin-koin yang bersentuhan dengannya. Karena paling banyak ada 3 koin tetangga, maka pasti ada warna yang belum dipakai oleh koin-koin itu. Tapi fakta ini bertentangan dengan asumsi bahwa $m \in S$,

jadi S haruslah himpunan kosong. Berdasarkan PAR, pernyataan pada soal telah selesai kita buktikan. \square

Sekarang kita akan mencoba menggunakan PAR untuk membuktikan salah satu contoh soal dalam (3).

Aplikasi 2.4.1 *Buktikan pernyataan “Untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen”.*

SOLUSI. Nyatakan S sebagai himpunan bilangan asli $x \geq 8$ dimana kita tidak dapat melakukan pembayaran sebanyak x sen hanya dengan satuan 3 sen dan 5 sen. Akan ditunjukkan bahwa S adalah suatu himpunan kosong. Andaikan S tidak kosong, maka berdasarkan PAR, S memiliki elemen terkecil, katakanlah elemen ini m . Tapi karena $8=3+5$, $9=3+3+3$, dan $10=5+5$, berarti $m \geq 11$, yang ekuivalen dengan $m - 3 \geq 8$. Sekarang andaikan kita bisa melakukan pembayaran sebanyak $m - 3$ sen, dengan menambahkan sebuah koin 3 sen kita bisa melakukan pembayaran sebanyak m sen. Bertentangan dengan asumsi semula bahwa kita tidak bisa melakukan pembayaran sebanyak m sen. Berarti haruslah $m - 3 \in S$, tapi hal ini kontradiksi dengan pemilihan m sebagai elemen terkecil. Jadi S haruslah sebuah himpunan kosong, dan kesimpulan mengikuti. \square

2.5 PIM Kuat

Perhatikan sebuah barisan tak-hingga dari proposisi-proposisi matematika

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

Jika

1. $P(1)$ benar (dapat dibuktikan), dan
2. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $[P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m) \Rightarrow P(m + 1)]$ (kita dapat membuktikan $P(m + 1)$ dengan asumsi $P(1), P(2), \dots, P(m)$ seluruhnya benar)

Maka semua proposisi dalam barisan tersebut adalah benar, dengan kata lain, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

BUKTI. Nyatakan $Q(1)$ sebagai pernyataan $P(1)$, $Q(2)$ sebagai “ $P(1) \wedge P(2)$ ”, $Q(3)$ sebagai “ $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$ ” dan seterusnya. Dapat dilihat bahwa barisan $Q(1), Q(2), Q(3), \dots$ memenuhi kondisi untuk PIM Dasar, sehingga $Q(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya hal ini mengakibatkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, karena untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow P(n)$. \square

PIM Kuat menuntut kita untuk menjamin kebenaran dari proposisi-proposisi untuk *semua* nilai yang lebih kecil dari nilai yang akan kita tunjukkan kebenarannya. PIM varian ini disebut PIM Kuat karena argumen yang digunakan dalam tahap induksi lebih kuat, mencakup semua kebenaran pada proposisi untuk nilai yang lebih kecil.

Contoh 2.5.1 [Asian Pacific Mathematical Olympiad 1999] Misalkan a_1, a_2, \dots sebuah barisan bilangan real yang memenuhi $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ untuk semua $i, j = 1, 2, \dots$. Buktikan bahwa

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

untuk setiap bilangan bulat positif n .

SOLUSI. Untuk kasus $n = 1$, ketaksamaan jelas berlaku karena $a_1 \geq a_1$. Sekarang asumsikan ketaksamaan berlaku untuk $n = 1, 2, \dots, m$. Maka kita punya barisan ketaksamaan berikut:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_1 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} &\geq a_2 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} &\geq a_3 \\ &\vdots \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_m}{m} &\geq a_m. \end{aligned}$$

Menjumlahkan m buah ketaksamaan tersebut menghasilkan

$$ma_1 + (m-1)\frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_m}{m} \geq \sum_{i=1}^m a_i,$$

yang ekuivalen dengan

$$(m+1) \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i} \geq 2 \sum_{i=1}^m a_i.$$

Berdasarkan informasi yang diberikan, kita punya $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ untuk semua $i, j = 1, 2, \dots$. Jadi

$$2 \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m (a_i + a_{m+1-i}) \geq ma_{m+1}.$$

Menggabungkan kedua ketaksamaan yang kita punya, kita dapatkan

$$(m+1) \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i} \geq 2 \sum_{i=1}^m a_i \geq ma_{m+1},$$

yang ekuivalen dengan

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_{m+1}}{m+1} \geq a_{m+1}.$$

Jadi ketaksamaan juga berlaku untuk $n = m + 1$. Berdasarkan PIM Kuat, ketaksamaan berlaku untuk semua bilangan bulat positif n . \square

Kita tentunya telah mengenal barisan Fibonacci yang didefinisikan secara rekursif sebagai $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Sekarang mari kita tinjau sebuah identitas pada barisan Fibonacci ini menggunakan PIM Kuat.

Contoh 2.5.2 Buktikan untuk $n, m \in \mathbb{N}, n > 1$ berlaku identitas

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

SOLUSI. Kita gunakan PIM Kuat dengan parameter m . Untuk $m = 1$,

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = F_{n-1}F_1 + F_nF_2$$

adalah benar untuk sebarang nilai n . Sedangkan untuk $m = 2$,

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_{n-1} + 2F_n = F_{n-1}F_2 + F_nF_3$ juga benar untuk sebarang nilai n . Sekarang asumsikan identitas berlaku untuk semua $m \leq k$, untuk suatu $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Maka

$$\begin{aligned} F_{n+k+1} &= F_{n+k} + F_{n+k-1} \\ &= F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} + F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k \\ &= F_{n-1}(F_k + F_{k-1}) + F_n(F_{k+1} + F_k) \\ &= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}, \end{aligned}$$

yang berarti identitas juga berlaku untuk $m = k + 1$. Berdasarkan PIM Kuat, identitas berlaku untuk sebarang nilai $m, n \in \mathbb{N}, n > 1$. \square

Perhatikan bahwa dalam persoalan yang baru saja kita selesaikan, terdapat suatu hal yang menarik dimana terdapat lebih dari satu parameter dalam proposisi. Hal ini mungkin cukup membingungkan kita dalam memilih parameter yang akan digunakan sebagai parameter induksi. Tapi perhatikan bahwa dalam identitas tersebut, kedua parameter m dan n muncul secara *simetri*, yang berarti kita bebas memilih salah satu dari keduanya untuk dijadikan parameter induksi.

Bagaimanapun, ada kasus-kasus dimana parameter yang terlibat cukup banyak dan induksi yang kita lakukan adalah tidak valid jika kita hanya memperhatikan salah satu parameter. Kasus-kasus seperti ini akan kita bahas lebih lanjut dalam sub-bab 2.7.

Sekarang marilah kita meninjau suatu aplikasi PIM Kuat dalam ruang lingkup Himpunan.

Aplikasi 2.5.1 [Tournament of Towns, 1979] Perhatikan semua subset dari himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$ yang tidak mengandung bilangan-bilangan yang berurutan. Untuk setiap subset sedemikian, kuadratkan hasil kali dari elemen-elemennya. Buktikan bahwa jumlah dari kuadrat-kuadrat ini adalah $(n+1)! - 1$. (Contoh: $n = 3$. Maka $1^2 + 2^2 + 3^2 + (1 \cdot 3)^2 = 23 = 4! - 1$.)

SOLUSI. Untuk memudahkan, kita nyatakan S_n sebagai jumlah dari kuadrat dari elemen-elemen subset dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang tidak mengandung bilangan-bilangan yang berurutan. Untuk $n = 1$, satu-satunya subset yang memenuhi adalah $\{1\}$ itu sendiri, dan kita punya $1^2 = 1 = 2! - 1$. Sekarang asumsikan pernyataan dalam soal benar untuk $n = 1, 2, \dots, m$. Akan ditunjukkan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = m + 1$.

Dari semua subset yang memenuhi dari $\{1, 2, \dots, m + 1\}$, kita bagi subset-subset tersebut menjadi 2 kelompok: satu yang mengandung $m + 1$ dan satu yang tidak mengandung $m + 1$. Berdasarkan asumsi induksi, kelompok subset yang tidak mengandung $m + 1$ akan memiliki jumlah dari kuadrat-kuadrat sebesar S_m . Sekarang kita perhatikan kelompok subset yang mengandung $m + 1$. Dalam kelompok ini terdapat elemen $\{m + 1\}$, yang berarti ada sumbangan jumlah kuadrat sebesar $(m + 1)^2$. Lalu perhatikan subset-subset yang mengandung elemen lain selain $(m + 1)$. Subset-subset ini akan menyumbang jumlah kuadrat sebesar $(m + 1)^2 S_{m-1}$. Dengan menjumlahkan semua nilai-nilai ini, kita simpulkan bahwa

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= S_m + (m + 1)^2 S_{m-1} + (m + 1)^2 \\ &= (m + 1)! - 1 + (m + 1)^2 (m! - 1 + 1) \\ &= (m + 1)! - 1 + (m + 1)! (m + 1) \\ &= (m + 2)(m + 1)! - 1 \\ &= (m + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Jadi pernyataan juga benar untuk $n = m + 1$. Dan berdasarkan PIM Kuat, pernyataan benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

2.6 PIM Bekerja Mundur

Perhatikan sebuah barisan tak-hingga dari proposisi-proposisi matematika

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

Jika

1. Untuk suatu subset tak-hingga S dari \mathbb{N} , $P(s)$ benar untuk semua $s \in S$, dan
2. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $P(m + 1) \Rightarrow P(m)$ (kita dapat membuktikan $P(m)$ dengan asumsi $P(m + 1)$ benar)

Maka semua proposisi dalam barisan tersebut adalah benar, dengan kata lain, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

BUKTI. Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, dan tanpa kehilangan keumuman kita asumsikan $x_1 < x_2 < \dots$. Kita dapat mengatur barisan pernyataan sebagai berikut:

$$P(x_1), P(x_1 - 1), \dots, P(1), P(x_2), P(x_2 - 1), \dots, P(x_1 + 1), P(x_3), \dots$$

Sekarang misalkan $Q(1) = P(x_1)$, $Q(2) = P(x_1 - 1)$ dan seterusnya. Secara umum, $Q(n)$ adalah proposisi ke- n pada barisan di atas. Dapat dilihat bahwa barisan $Q(1), Q(2), Q(3), \dots$ memenuhi kondisi untuk PIM Dasar, sehingga $Q(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, yang mengakibatkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

Pada umumnya, PIM Bekerja Mundur digunakan sebagai berikut: Gunakan varian-varian PIM lainnya untuk menunjukkan bahwa proposisi berlaku untuk suatu himpunan S (biasanya S ini berisi kelipatan atau pangkat dari sebuah bilangan bulat), lalu untuk membuktikan $P(m + 1) \Rightarrow P(m)$ kita tunjukkan secara langsung.

Contoh 2.6.1 [Ketaksamaan Rataan Aritmatik-Rataan Geometrik] Tunjukkan bahwa

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dimana x_1, x_2, \dots, x_n adalah bilangan-bilangan real positif.

SOLUSI. Nyatakan $P(n)$ sebagai proposisi " $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ ". Pertama-tama kita akan menggunakan PIM Dasar untuk menunjukkan bahwa $P(s)$ benar untuk semua $s \in \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$, yang tak lain adalah himpunan pangkat dari 2.

$P(1)$ jelas benar karena $\frac{x}{1} \geq x^{\frac{1}{1}}$. Bahkan kesamaan selalu tercapai. $P(2)$ benar karena $\frac{x_2 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$ ekuivalen dengan $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, yang pasti benar berdasarkan prinsip bahwa tidak ada bilangan kuadrat dari sebuah bilangan real adalah negatif.

Sekarang asumsikan $P(2^m)$ benar untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Maka

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^m}}{2^m} + \frac{x_{2^{m+1}} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^m}}{2^m} \times \frac{x_{2^{m+1}} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}} \\ &\geq \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_{2^m})^{\frac{1}{2^m}} \times (x_{2^{m+1}} x_{2^{m+2}} \dots x_{2^{m+1}})^{\frac{1}{2^m}}} \\ &= (x_1 x_2 \dots x_{2^{m+1}})^{\frac{1}{2^{m+1}}}. \end{aligned}$$

Jadi $P(2^{m+1})$ juga benar, dan berdasarkan PIM Dasar, $P(s)$ benar untuk semua $s \in \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

Sekarang kita akan menggunakan PIM Bekerja Mundur. Misalkan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $P(m+1)$ benar. Diberikan bilangan-bilangan real positif x_1, x_2, \dots, x_m , nyatakan variabel baru x_{m+1} sebagai $\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}$. Karena x_{m+1} adalah rataan aritmatik

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{m+1}}{m+1},$$

Sehingga

$$x_{m+1} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{m+1}}{m+1} \geq (x_1x_2\dots x_{m+1})^{\frac{1}{m+1}} \text{ karena } P(m+1) \geq (x_1x_2\dots x_m)^{\frac{1}{m+1}}(x_{m+1})^{\frac{1}{m+1}}.$$

Membagi kedua ruas ketaksamaan dengan $(x_{m+1})^{\frac{1}{m+1}}$ menghasilkan

$$(x_{m+1})^{\frac{m}{m+1}} \geq (x_1x_2\dots x_m)^{\frac{1}{m+1}},$$

yang ekuivalen dengan

$$x_{m+1} \geq (x_1x_2\dots x_m)^{\frac{1}{m}},$$

sehingga

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m} \geq (x_1x_2\dots x_m)^{\frac{1}{m}}.$$

Jadi $P(m)$ benar, dan berdasarkan PIM Berkerja Mundur, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. \square

Berikut diberikan suatu contoh penggunaan induksi matematika pada suatu permasalahan dengan satu parameter, namun dalam proses induksi tidak menggunakan parameter tersebut sebagai parameter induksi. Hal ini sekali lagi menuntut kejelian kita dalam menentukan parameter induksi dari sebuah permasalahan.

Contoh 2.6.2 [Tournament of Towns, 1987] Untuk semua $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan ketaksamaan berikut selalu berlaku:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < 3.$$

SOLUSI. Mungkin kita akan langsung terpikirkan untuk menggunakan PIM Dasar dan menggunakan parameter induksi n dalam menyelesaikan soal ini. Tapi kalau kita telah mengetahui bahwa

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(m-1)\sqrt{m}}}}}} < 3,$$

kita tidak dapat menyimpulkan apa-apa tentang

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{m\sqrt{m+1}}}}}}.$$

Disini terlihat bahwa pemilihan n sebagai parameter induksi tidak membawa hasil yang diharapkan.

Alih-alih membuktikan ketaksamaan di atas, kita akan membuktikan ketaksamaan yang lebih umum. Terkadang membuktikan hal yang lebih umum bisa menjadi lebih mudah daripada membuktikan suatu kasus. Kita akan membuktikan ketaksamaan

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < m+1$$

berlaku untuk $m \geq 2$ dengan PIM Bekerja Terbalik. Kali ini kita akan membuktikan bahwa ketaksamaan berlaku untuk $m = n$ lalu mundur hingga ke $m = 2$.

Untuk $m = n$, ketaksamaan jelas berlaku karena $\sqrt{n} < n+1$. Sekarang asumsikan untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, ketaksamaan berlaku untuk $m = k+1$, yaitu

$$\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\dots\sqrt{n}}}} < k+2,$$

maka

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{\dots\sqrt{n}}}} < \sqrt{k(k+2)} < k+1.$$

Jadi ketaksamaan juga berlaku untuk $m = k$. Berdasarkan PIM Bekerja Mundur, kita simpulkan ketaksamaan berlaku untuk semua $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Ketaksamaan pada soal adalah kasus khusus dimana $m = 2$. \square

Sebagai contoh aplikasi PIM Bekerja Mundur pada ruang lingkup Matematika Diskrit, kita akan membuktikan generalisasi dari Aplikasi 2.4.1.

Aplikasi 2.6.1 [Generalisasi dari Aplikasi 2.4.1] Buktikan sebarang nilai n sen dapat kita bayar hanya dengan uang satuan a sen dan b sen, jika $PBB(a,b) = 1$ dan n adalah bilangan bulat lebih besar dari $ab - a - b$.

SOLUSI. Nyatakan $P(n)$ sebagai pernyataan “Kita dapat membayar sebesar n sen hanya dengan uang satuan a sen dan b sen”. Akan kita tunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n > ab - a - b$. Pertama-tama perhatikan bahwa $P(s)$ benar untuk semua

$s \in \{a, 2a, 3a, \dots\}$. Sekarang asumsikan untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $m > ab - a - b$, kita punya $P(m+1)$ benar, yang berarti terdapat bilangan-bilangan bulat tak-negatif x, y sehingga $ax + by = m + 1$. Sekarang kita punya $m + 1 \geq ab - a - b + 2$, yang berarti $ax + by - 1 \geq ab - a - b + 1$. Karena $PBB(a, b) = 1$, maka terdapat bilangan-bilangan asli p, q sehingga $pa + qb = 1$ [4]. Jadi $ax + by - pa - qb + a + b \geq ab + 1$, yang mengakibatkan

$$\frac{x-p+1}{b} - \frac{q-y-1}{a} \geq 1 + \frac{1}{ab} > 1.$$

Jadi pasti terdapat bilangan bulat t sehingga

$$\frac{x-p+1}{b} > t > \frac{q-y-1}{a}.$$

Perhatikan bahwa ketaksamaan di atas mengakibatkan $at - q + y \geq 0$ dan $x - p - bt \geq 0$. Padahal

$$\begin{aligned} & a(x-p-bt) + b(at-q+y) \\ &= ax + by - (ap + bq) \\ &= (m+1) - 1 \\ &= m. \end{aligned}$$

Jadi kita simpulkan $P(m)$ juga benar. Berdasarkan PIM Bekerja Mundur, kita simpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n > ab - a - b$. \square

2.7 PIM Bentuk Umum

Hingga saat ini kita selalu menerapkan metode induksi hanya untuk permasalahan dengan parameter induksi berupa bilangan bulat positif yang tentu saja sifat-sifat keterurutannya dapat kita telusuri dengan mudah. Sebenarnya PIM dapat digunakan dalam himpunan obyek yang lebih umum, hanya saja kita harus menjamin bahwa himpunan obyek tersebut memiliki sifat keterurutan dan memiliki elemen terkecil. [4]

Definisi 2.7.1 Relasi biner “ $<$ ” pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik bila memiliki properti berikut:

- i. Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.
- ii. Diberikan $x, y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar: $x < y$, $x > y$, atau $x = y$.
- iii. Jika A adalah himpunan bagian tak kosong dari X , terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X memiliki “elemen terkecil”.

Sekarang kita siap untuk memberi penjabaran mengenai PIM General Set

Perhatikan sebuah himpunan X dan barisan dari proposisi-proposisi matematika

$$P(x_0), P(x_1), P(x_2), \dots$$

dimana $x_0, x_1, \dots \in X$.

Jika

1. X terurut dengan baik oleh “ $<$ ”,
2. $P(x_0)$ benar, dimana x_0 adalah elemen terkecil di X , dan
3. Untuk semua $x > x_0$, $x \in X$, jika $P(y)$ benar untuk semua $y < x$, maka $P(x)$ benar

Maka semua proposisi dalam barisan tersebut adalah benar, dengan kata lain, $P(x)$ benar untuk semua $x \in X$.

Contoh 2.7.1 Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{1,1} = 5,$$

dan untuk semua pasang bilangan bulat positif (m, n) , kecuali $(1,1)$ didefinisikan

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2, & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2, & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n) ,

$$S_{m,n} = 2(m+n) + 1$$

SOLUSI. Nyatakan $P(m, n)$ sebagai pernyataan “untuk suatu pasangan bilangan bulat positif (m, n) , $S_{m,n} = 2(m+n) + 1$ ”. Sebagai basis induksi, kita punya $(1,1)$ adalah elemen terkecil dalam himpunan pasangan bilangan bulat positif, dan kita punya $5 = S_{1,1} = 2(1+1) + 1$. Jadi $P(1,1)$ benar.

Sekarang asumsikan untuk semua $(m', n') < (m, n)$, $P(m', n')$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(m, n)$ juga benar. Kita bagi ke dalam 2 kasus:

1. Jika $n = 1$, maka sesuai definisi kita punya $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 2$. Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka $S_{m-1,n} = 2(m-1+n) + 1$. Jadi $S_{m,n} = 2(m-1+n) + 1 = 2(m+n) + 1$. Dalam kasus ini, $P(m, n)$ terbukti benar.
2. Jika $n \neq 1$, maka sesuai definisi kita punya $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 2$. Karena $(m, n-1) < (m, n)$, maka $S_{m,n-1} = 2(m+n-1) + 1$. Jadi $S_{m,n} = 2(m+n-1) + 1 = 2(m+n) + 1$. Dalam kasus ini, $P(m, n)$ juga terbukti benar.

Dalam kedua kasus, telah kita tunjukkan bahwa $P(m, n)$ benar, yang berarti $P(m, n)$ benar untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n) .

Terkadang beberapa permasalahan yang melibatkan lebih dari satu parameter dapat kita selesaikan dengan induksi menggunakan hanya satu parameter.

Parameter induksi ini dapat berupa jumlah atau hasil kali dari parameter-parameter persoalan. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.7.2 [*International Mathematical Olympiad, 1988*] Misalkan a, b adalah bilangan-bilangan bulat positif sehingga $ab + 1$ membagi $a^2 + b^2$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

adalah bilangan kuadrat sempurna.

SOLUSI. Karena a dan b muncul secara simetri, maka tanpa kehilangan keumuman kita bisa berasumsi $a \leq b$. Nyatakan $q = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ dan S sebagai himpunan semua pasangan bilangan bulat **tak-negatif** (a, b) sehingga q bulat (karena bilangan bulat tak-negatif mencakup bilangan asli, maka pengerjaan kita tetap valid). Perhatikan bahwa jika $(a, b) \in S$, maka $(a, aq - b) \in S$ (fakta ini dapat diperoleh dengan menetapkan nilai a lalu menganggap persamaan untuk q adalah suatu persamaan kuadrat dalam b). Lebih lanjut, nilai q yang kita dapatkan dari pasangan $(a, aq - b)$ sama dengan nilai q yang didapat dari pasangan (a, b) . Mendapatkan fakta ini, kita terdorong untuk mencari besaran-besaran apa yang sama dari pasangan bilangan (a, b) dan $(a, aq - b)$. Setelah mencoba-coba pada beberapa nilai, kita dapatkan $PBB(a, b) = P(a, aq - b)$. Dari sini kita membuat suatu klaim bahwa $q = PBB(a, b)^2$. Induksi yang akan kita lakukan adalah induksi dengan memanfaatkan sifat keterurutan pada S . Dalam permasalahan ini $(k, l) < (m, n)$ jika $kl < mn$.

Sebagai basis, kita ambil elemen S yang memenuhi $ab = 0$. Dalam kasus ini, klaim jelas terbukti. Sekarang asumsikan $ab > 0$ dan klaim kita benar untuk semua pasangan (a', b') dimana $a'b' < ab$. Kita lihat kembali pasangan $(a, aq - b)$. Kita sudah dapatkan sebelumnya fakta-fakta bahwa jika $(a, b) \in S$, maka $(a, aq - b) \in S$ serta $PBB(a, b) = P(a, aq - b)$. Jadi tinggal kita buktikan bahwa $0 \leq aq - b \leq b$, sehingga dengan demikian kita punya $(a, aq - b) < (a, b)$, yang dengan asumsi hipotesis, klaim kita benar untuk (a, b) .

Perhatikan bahwa

$$q = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

yang mengakibatkan

$$aq < \frac{a^2}{b} + b \leq \frac{b^2}{b} + b = 2b \Rightarrow aq - b < b.$$

Untuk menunjukkan bahwa $aq - b \geq 0$, perhatikan bahwa

$$q = \frac{a^2 + (aq - b)^2}{a(aq - b) + 1}.$$

Karena q dan $a^2 + (aq - b)^2$ keduanya lebih besar daripada nol, maka kita simpulkan $a(aq - b) + 1 > 0 \Rightarrow aq - b > \frac{-1}{a} \Rightarrow aq - b \geq 0$.

Jadi terbukti bahwa $0 \leq aq - b < b$, sehingga berdasarkan asumsi induksi, klaim kita benar untuk semua elemen S . \square

Sekarang kita akan menggunakan PIM Bentuk Umum ini untuk membuktikan salah satu identitas dalam Graf, yaitu Rumus Euler pada graf bidang.

Aplikasi 2.7.1 Buktikan jumlah wilayah (f) pada graf bidang adalah $e - n + 2$, dimana e menyatakan jumlah sisi dan n menyatakan jumlah simpul.

SOLUSI. Ide utama dalam pembuktian ini adalah menyadari bahwa setiap graf bidang terhubung dapat dibangun dari simpul tunggal, kemudian melakukan suatu barisan dari konstruksi-konstruksi berikut, dimana setiap konstruksi membuat graf tetap terhubung:

- i. Menambahkan simpul pada sisi yang sudah ada.
- ii. Menambahkan sisi dari satu simpul ke simpul itu lagi (membentuk gelang).
- iii. Menambahkan sisi dari satu simpul ke simpul lain.
- iv. Menarik sebuah sisi dari suatu simpul dan menambahkan simpul baru di ujung sisi tersebut.

Kita akan melakukan induksi dengan parameter graf bidang. Sebagai basis kita ambil graf yang hanya terdiri dari satu simpul tanpa sisi. Untuk graf ini, $e = 0$, $n = 1$, dan memang banyaknya wilayah yang kita miliki adalah $1 = 0 - 1 + 2$.

Sekarang kita akan buat sistem keterurutan dalam himpunan graf bidang S . Misalkan $G_1, G_2 \in S$. Kita nyatakan $G_1 < G_2$ jika kita dapat memperoleh G_2 dari G_1 dengan melakukan suatu runtunan konstruksi. Misalkan kita memiliki sebuah graf bidang G dan kita asumsikan (sebagai hipotesis induksi) bahwa untuk semua $G' \in S$, dimana $G' < G$ berlaku Rumus Euler. Perhatikan tabel 2 untuk melihat perubahan dari banyaknya wilayah, sisi dan simpul.

Karena dalam setiap operasi, perubahan banyaknya wilayah (f) selalu sama dengan perubahan dari $(e - n)$, maka kita simpulkan apapun operasi yang

kita lakukan untuk membangun G dari G' , Rumus Euler tetap berlaku, dan berdasarkan PIM Bentuk Umum, Rumus Euler berlaku untuk semua elemen S .

Tabel 2. Perbandingan perubahan f , e dan n dalam setiap operasi konstruksi

Operasi	Δf	Δe	Δn	$\Delta(e - n)$
i	0	1	1	0
ii	1	1	0	1
iii	1	1	0	1
iv	0	1	1	0

3. Kesimpulan

Dari segala yang telah dipaparkan sebelumnya, ada beberapa kesimpulan yang dapat ditarik tentang metode induksi dan penerapannya:

1. Prinsip Induksi Matematika merupakan metode yang handal dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam matematika, mencakup namun tidak terbatas pada bidang teori bilangan, aljabar, kombinatorik dan geometri.
2. PIM dapat diterapkan secara bervariasi dan tidak kaku. Sejauh apa kita dapat menggunakan PIM bergantung pada kreativitas kita dan kebutuhan dari permasalahan yang akan dipecahkan.
3. Dalam beberapa persoalan, tidak semua parameter yang terlibat dapat dijadikan parameter induksi. Kita harus memilih parameter yang dapat mempermudah kita dalam menyelesaikan masalah.
4. PIM dapat digunakan dalam himpunan obyek yang lebih umum, hanya saja kita harus menjamin bahwa himpunan obyek tersebut memiliki sifat keterurutan dan memiliki elemen terkecil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Engel, Arthur.** *Problem-Solving Strategies*. Ann Arbor : Springer-Verlag, 1998.
- [2]. **Jacobs, David.** *Mathematical Induction for the Olympiade Enthusiast*. Cape Town : Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, 1996.
- [3]. **Larson, Loren C.** *Problem-Solving Through Problems*. Ann Arbor : Springer-Verlag, 1983.
- [4]. **Munir, Rinaldi.** *Diktat Kuliah Matematika Diskrit*. Bandung : Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2005.