

IMPLEMENTASI GRAF DALAM BIDANG PERHUBUNGAN

Arian Ichsan – NIM : 13505034

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if15034@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang pemanfaatan representasi graf untuk diterapkan di masalah kehidupan nyata, dalam hal ini masalah perhubungan. Kegunaan dari graf adalah untuk merepresentasikan suatu struktur. Adapun *goal* yang diinginkan dalam masalah perhubungan adalah bagaimana menghubungkan suatu lokasi dengan lokasi lainnya seefektif mungkin. Jumlah penduduk yang semakin bertambah menyebabkan masalah perhubungan semakin kompleks dan dibutuhkan suatu metode yang tepat untuk menghindari kesalahan dalam menentukan keputusan yang disebabkan oleh kompleksitas dari masalah yang ada.

Graf merupakan salah satu cabang dari ilmu dalam ilmu matematika yang mengulas masalah titik dan garis. Dalam hal ini, teori graf dapat dimanfaatkan untuk merancang sistem prasarana transportasi, seperti membuat lintasan jalan raya yang efektif. Masalah yang paling sering ingin dipecahkan adalah bagaimana mencari lintasan terpendek yang menghubungkan beberapa wilayah yang memiliki jarak yang berbeda-beda.

Aplikasi teori graf bisa kita saksikan bila kita mengendarai mobil atau menumpangi angkot Bandung. Kita punya banyak alternatif jalan untuk sampai ke tujuan. Namun ada jalan yang satu arah, ada titik-titik kemacetan, ada jam-jam sibuk. Dengan pemahaman tentang teori graf, para ahli transportasi mengatur agar lampu lalu lintas menyala dengan warna dan saat yang tepat. Selain itu, pengetahuan tentang teori graf juga diaplikasikan dalam pengaturan jalur penerbangan agar tidak ada pesawat yang bersimpangan, pengaturan jalur telekomunikasi ketika ada pelanggan yang melakukan panggilan telepon, pengaturan jalur pelayaran, serta segala sistem yang berkaitan dengan “titik” dan “garis”. Titik (*vertex*) dapat digunakan untuk melambangkan kota, pelabuhan, stasiun, terminal atau airport.

Graf memiliki banyak konsep yang kemudian berkembang menjadi konsep tersendiri sebagai perluasan dari graf, salah satunya adalah konsep pohon. Pohon yang merupakan bagian dari graf juga berperan dalam menentukan kemungkinan terbaik dalam menghubungkan jalan. Konsep dari pohon yang dimanfaatkan adalah mengenai *spanning tree*. Aplikasi pohon antara lain adalah dalam pembuatan jalur kereta bawah tanah (*subway*) dan penentuan lintasan paling efektif untuk membuat simpul menjadi terhubung.

Dalam dunia modern ini, termasuk di Indonesia, persoalan perhubungan semakin kompleks, maka ilmu graf semakin penting diaplikasikan baik sebagai representasi masalah maupun sebagai pemecah masalah. Kasus jalur perhubungan yang terputus ke wilayah Gempol yang disebabkan kasus lumpur Lapindo, atau pembuatan jembatan Pasupati di Bandung sebagai salah satu solusi dari kepadatan lalu lintas merupakan contoh aplikasi graf yang nyata.

Kata kunci: Graf, simpul, garis, lintasan, efisiensi, *link*, sirkuler, bobot, pohon, *spanning tree*

1. Pendahuluan

Masalah dalam bidang perhubungan hakikatnya adalah bagaimana menghubungkan suatu lokasi dengan lokasi lainnya. Akan tetapi, yang dimaksud menghubungkan bukanlah sekedar menciptakan suatu jalur

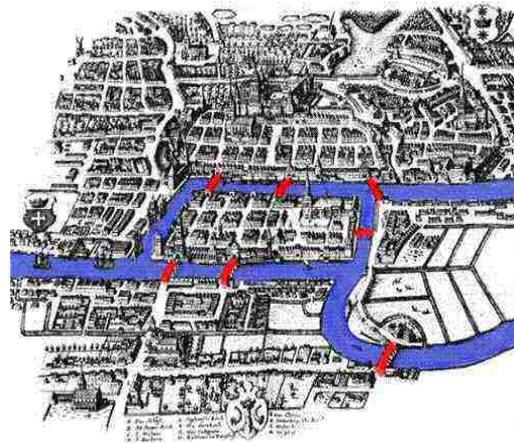
(*path*), melainkan juga mencari jalur hubung yang efektif, dengan kata lain menghemat tenaga, waktu, atau biaya. Persoalan yang sederhana, misalnya seorang mahasiswa berada di gerbang depan Institut Teknologi Bandung. Dia bermaksud singgah di gedung Labtek V, perpustakaan pusat, kantin bengkok,

lalu terakhir keluar di gerbang belakang. Jalur manakah yang harus dia tempuh dan tempat manakah yang harus dia kunjungi terlebih dulu agar menempuh jarak seminimal mungkin? Persoalan semakin kompleks ketika teknologi semakin maju dan peradaban manusia semakin berkembang. Arus Jumlah penduduk yang semakin meningkat secara eksponensial. Jumlah penduduk dunia diketahui sampai 25 Desember tahun 2006 mencapai 6,565,513,948 menurut U.S Census Bureau. Jumlah manusia dapat direpresentasikan dalam graf sebagai jumlah simpul. Setiap manusia tentu memiliki kepentingan masing-masing dan memiliki rute masing-masing untuk kebutuhannya. Rute atau sarana transportasi dapat direpresentasikan dengan sisi yang menghubungkan masing-masing tempat. Semakin banyak sisi dan simpul semakin kompleks pula permasalahan yang dihadapi. Dalam kehidupan sehari-hari, manusia sekarang mengalami masalah yang melibatkan banyak simpul dan banyak garis, oleh sebab itu teori graf perlu dipelajari.

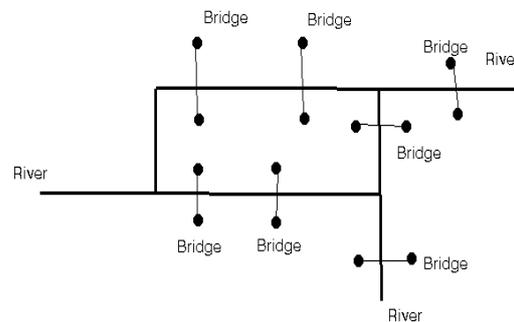
Adapun panjang sisi tidak selalu merepresentasikan jarak, artinya semakin panjang sisi tidaklah harus diartikan bahwa jaraknya semakin jauh. Panjang sisi dapat saja direpresentasikan sebagai waktu tempuh. Representasi seperti ini digunakan untuk memperhitungkan efisiensi. Contoh nyata dalam kehidupan sehari-hari misalnya ada jalan yang singkat, namun sangat padat karena arus lalu lintasnya demikian padat. Sedangkan ada jalan memutar yang jaraknya bisa saja dua kali lipat jalan yang pertama, namun ternyata waktu tempuhnya tiga kali lebih cepat misalnya. Graf yang hanya merepresentasikan jarak tentunya tidak efektif untuk menghitung jalan mana yang lebih baik untuk ditempuh.

Kekuatan dari graf adalah sebagai visualisasi yang ampuh untuk merepresentasikan data, apabila dibandingkan dengan data yang hanya berupa tabel dan angka, graf tentu lebih mudah dipahami, walaupun dalam beberapa hal, misalnya untuk kepentingan analisis, data berupa tabel dan angka-angka lebih baik untuk digunakan. Akan tetapi, untuk menyajikan garis besar suatu masalah, graf masih lebih baik.

Representasi dengan menggunakan graf sendiri, menurut catatan sejarah telah digunakan sejak 1736 di kota Konigsberg.



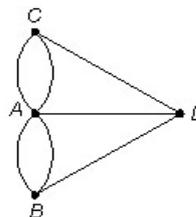
Gambar 1. Gambaran Kota Konigsberg tahun 1736



Gambar 2. Representasi Graf dari jembatan penghubung di kota Konigsberg

Penduduk Königsberg berasumsi bahwa seseorang tidak mungkin dapat berkeliling kota Königsberg melewati setiap jembatan tepat sekali lalu dapat kembali ke tempat semula. Akan tetapi, mereka hanya menduga-duga dan mencoba-coba saja segala kemungkinan untuk membuktikan asumsinya itu. Adakah penjelasan yang logis dan ilmiah untuk menjelaskan persoalan tersebut?

Seorang matematikawan bernama Euler menggunakan teori graf untuk menjelaskan asumsi tersebut, dengan menggambar graf dengan melambangkan jembatan sebagai garis, lalu wilayah yang dihubungkan jembatan sebagai simpul dan menyederhanakannya menjadi seperti berikut :



Dengan menggunakan logika dan penalaran dapat disimpulkan bahwa tidak mungkin melintasi sebuah graf dari suatu titik asal dan kemudian kembali ke titik asal tersebut apabila simpul ada salah satu simpulnya yang berderajat ganjil. Hal ini kemudian akan berkembang menjadi teori lintasan Euler

2. Teori Dasar

Hal yang dipelajari dalam teori graf adalah “titik” dan “garis”. Titik biasanya mewakili sebuah tempat dan garis mewakili jalur hubung antara dua tempat tersebut. Bila kita memiliki dua buah titik dalam jarak tertentu, maka kita akan mempelajari hubungan apa saja yang dapat terjadi dari dua titik itu. Hubungan itu tidak selalu berbentuk garis lurus. Misalnya jalur antara rumah dengan kantor tidak berupa sebuah garis, karena untuk mencapai suatu titik, dibutuhkan titik-titik yang lainnya. Itu baru yang sederhana karena hanya melibatkan dua titik. . Garis hubung yang terjadi antara empat titik saja berjumlah enam buah, apalagi bila terdapat puluhan atau ratusan titik. Justru itulah yang kita hadapi sehari-hari, berbagai sistem dengan puluhan hingga ratusan titik

Definisi matematis dari graf :

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $G=(V,E)$ dalam hal ini :
 V =himpunan tidak kosong simpul-simpul
 E =himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.

E boleh saja kosong, sedangkan V tidak boleh kosong. Hal ini dapat dihubungkan dengan masalah transportasi di perkotaan , tidak mungkin ada jalan dibuat tanpa memiliki tempat yang ingin dihubungkan. Tetapi dapat saja suatu tempat tidak memiliki akses ke tempat lainnya.

2.1 Terminologi

Ada berbagai terminologi berkaitan graf :

1. Bertetangga

Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

2. Bersisian

Untuk sembarang sisi $e=(v_j,v_k)$, sisi e bersisian dengan v_j dan v_k .

3. Simpul terpencil

Simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya

4. Graf kosong

Graf yang sisinya merupakan himpunan kosong.

5. Derajat

Derajat suatu simpul, jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut

6. Lintasan

Barisan berselang seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0,e_1,v_1,e_2,\dots,e_n,v_n$

7. Siklus/sirkuit

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama

8. Terhubung

2 simpul dikatakan terhubung jika terdapat lintasan di antara kedua simpul.

9. Cut Set

Cut Set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang dibuang dari G menyebabkan G menjadi tidak terhubung.

10. Graf berbobot

Graf yang setiap sisinya memiliki harga (bobot). Graf berbobot inilah yang menjadi representasi dari berbagai sistem transportasi dengan bobot yang umumnya merepresentasikan jarak.

11. Upagraf (Subgraph)

$G=(V,E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf dari G jika V_1 merupakan himpunan bagian dari V dan E_1 merupakan himpunan bagian dari E .

12. Gelang

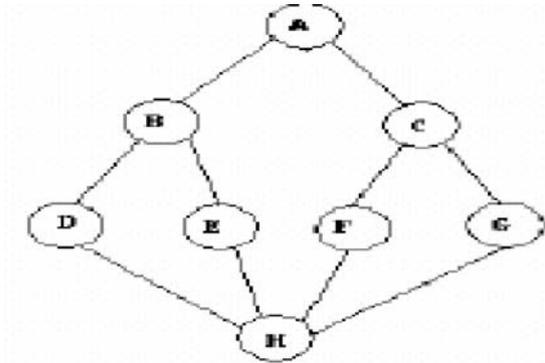
Garis dari suatu simpul yang berkoresponden kepada dirinya sendiri.

2.2 Representasi Graf

Manusia merepresentasikan graf sesuai definisinya, yaitu berupa simpul dan garis. Representasi dengan simpul dan garis sudah otomatis mampu dicerna oleh otak manusia tanpa memerlukan penjelasan yang rinci.

Akan tetapi, graf tidak selalu direpresentasikan dalam bentuk simpul dan garis secara harfiah. Di jaman teknologi informasi ini, komputerisasi merupakan suatu hal yang lumrah. Berbagai macam data dapat disimpan dalam memori komputer, untuk kemudian dapat diproses lebih lanjut oleh mesin. Sayangnya, komputer tidak mampu membaca graf yang biasa direpresentasikan oleh manusia. Salah satu cara agar data manusia lebih mudah diterjemahkan komputer adalah

dengan menggunakan representasi yang mudah dikenali komputer. Salah satunya dengan representasi matriks ketetanggaan.



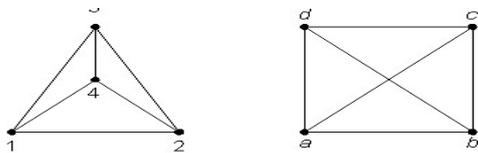
Gambar 3. Representasi graf dengan titik dan simpul

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	1	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0	0	0
C	1	0	0	0	0	1	1	0
D	0	1	0	0	0	0	0	1
E	0	1	0	0	0	0	0	1
F	0	0	1	0	0	0	0	1
G	0	0	1	0	0	0	0	1
H	0	0	0	1	1	1	1	0

Gambar 4. Representasi graf dengan matriks ketetanggaan

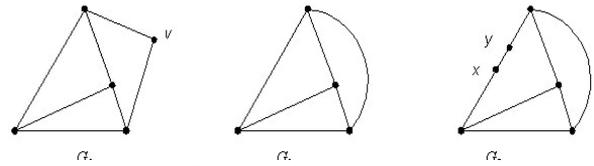
2.3 Graf Isomorfik dan Graf Homeomorfik

Graf dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2



Gambar 5. Dua buah graf yang saling isomorfik

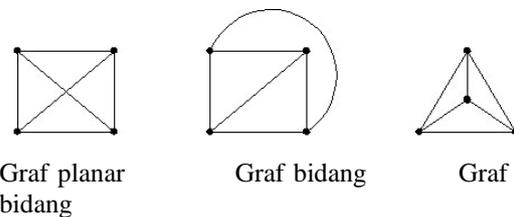
Graf dikatakan homeomorfik jika salah satu dari kedua graf dapat diperoleh dari graf lainnya dengan cara menyisipkan dan/atau membuang secara berulang-ulang simpul berderajat dua.



Gambar 6. Tiga graf yang saling homeomorfik

2.4 Graf planar

Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang saling tidak memotong (bersilangan). Komplement dari graf planar adalah graf tak planar. Graf planar yang telah digambarkan sebagai sisi-sisi yang saling tidak berpotongan disebut graf bidang.



Gambar 7. Graf planar dan graf bidang

2.4.1 Rumus Euler

Jumlah wilayah pada graf planar sederhana dapat dihitung dengan rumus Euler :

$$n - e + f = 2$$

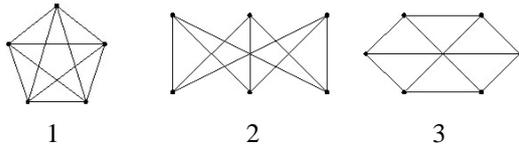
e =jumlah sisi
 n =jumlah simpul
 f =jumlah wilayah

2.4.2 Teorema Kuratowski

Graf Kuratowski memungkinkan kita menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf. Ada dua buah Graf Kuratowski yaitu :

1. Graf lengkap yang memiliki 5 simpul (K_5)
2. Graf yang terhubung teratur dengan 6 simpul dan 9 sisi ($K_{3,3}$).

Graf G dikatakan tidak planar jika dan hanya jika dia mengandung upagraf yang sama dengan K_5 atau $K_{3,3}$ atau homeomorfik dengan salah satu dari keduanya



Gambar 8. Graf Kuratowski

Gambar 1 dan 2 adalah graf Kuratowski, gambar 3 adalah graf yang isomorfik dengan gambar 2 sehingga gambar 3 merupakan graf tidak planar

2. 5 Graf Dual

Apa aplikasi dari graf planar dalam masalah kota? Graf planar yang dapat direpresentasikan dalam graf bidang, pada langkah berikutnya dapat dibuat menjadi graf dual.

Graf dual (yang dimisalkan dengan G^*) dibuat dari graf bidang G dengan cara :

1. Pada setiap wilayah f di G , buatlah sebuah simpul v^* yang merupakan simpul untuk G^*

2. Untuk setiap sisi e di G , tariklah sisi e^* (yang menjadi sisi untuk G^*) yang memotong sisi e tersebut. Sisi e^* menghubungkan dua simpul v_1^* dan v_2^* yang berada dalam muka f_1 dan f_2 yang dipisahkan e di G . Untuk sisi e yang salah satu simpulnya merupakan simpul berderajat 1 (jadi, sisi e seluruhnya terdapat di dalam sebuah muka), maka sisi e^* adalah berupa sisi gelang.

Konsep graf dual selanjutnya dimanfaatkan untuk aplikasi penting dalam merepresentasikan peta, baik peta negara, propinsi, atau kabupaten. Tiap wilayah pada peta dinyatakan sebagai simpul, sedangkan sisi menyatakan bahwa dua wilayah berbatasan langsung.

2. 6 Studi kasus dari aplikasi graf

Persoalan graf yang diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari umumnya berkaitan dengan lintasan dan sirkuit dalam graf, di antaranya menentukan lintasan terpendek, persoalan pedagang keliling, persoalan tukang pos Cina, dan pewarnaan graf. Studi kasus ini merupakan semacam *template* persoalan dan dapat dijadikan sebagai acuan untuk metode penyelesaian masalah yang dalam kenyataan.

2. 6.1 Lintasan terpendek

Sistem transportasi yang baik adalah sistem transportasi yang paling efisien, dalam artian memiliki waktu tempuh seminimal mungkin. Menghubungkan 2 buah tempat bukanlah sekedar menarik garis terpendek di antara kedua tempat tersebut, karena menghubungkan 2 tempat tidak bisa mengabaikan lintasan untuk tempat-tempat lainnya. Apabila setiap tempat masing-masing dihubungkan dengan 1 jalan, maka akan terjadi pemborosan dan hanya akan menambah kompleksitas permasalahan.

2. 6.2 Persoalan Pedagang Keliling

Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

Penyelesaian masalah yang dilakukan berkaitan dengan teori graf adalah dengan menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

2. 6.3 Persoalan Tukang Pos Cina

Persoalan: seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan?

Penyelesaian dilakukan dengan menentukan sirkuit Euler di dalam graf.

2. 6.4 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan salah satu konsep yang sangat banyak diaplikasikan. Tujuan dari pewarnaan terutama untuk memudahkan pembacaan, pengelompokan dan pengolahan data, misalnya untuk membaca peta diperlukan warna yang berbeda untuk menandakan suatu kabupaten, propinsi, atau kecamatan.

3. Penerapan graf

Dalam dunia nyata yang semakin kompleks, graf memiliki peran penting dan aplikasinya sangat banyak. Metode pengaplikasiannya pun tidak sesederhana teori., karena variabel di dunia nyata bukan sekedar jarak saja, ada banyak aspek-aspek lain baik berupa aspek

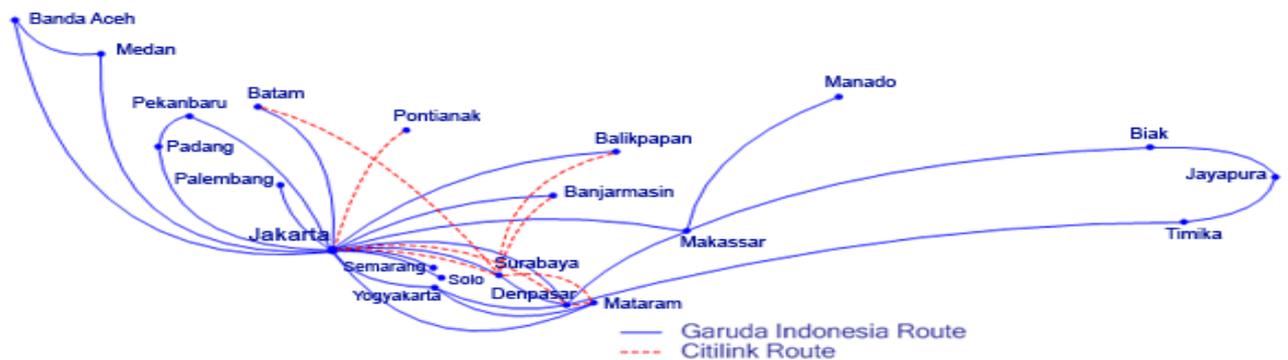
sosial,ekonomi, maupun aspek yang bersifat matematis lainnya yang tidak dapat diabaikan.

3.1 Penggunaan graf dalam penerbangan

Penerapan graf dalam di dunia modern ini terlihat dalam bidang kedirgantaraan. Dunia modern ditandai dengan kemudahan dan kecepatan untuk berpindah dari satu tempat ke tempat lainnya. Manusia semakin menginginkan efektifitas dan efisiensi waktu. Transportasi udara merupakan alternatif yang sudah tidak asing lagi untuk transportasi jarak jauh. *Airport-airport* dibangun di berbagai tempat strategis untuk menunjang prasarana transportasi udara. Persoalan di sini adalah bagaimana cara menentukan lokasi strategis untuk membangun *airport*. Dapat dikatakan

bahwa pesawat udara bukanlah merupakan alat transportasi yang fleksibel, kapasitas bahan bakar pesawat terbatas dan tidak dimungkinkan untuk pengisian bahan bakar di udara, kecuali untuk pesawat tempur. Maka, lokasi *airport* harus diperhitungkan dengan cermat agar mengatasi masalah bahan bakar namun tetap memiliki jangkauan yang luas untuk tujuan komersial.

Berikut ini adalah gambar dari sistem perhubungan udara dari maskapai Garuda Indonesia.



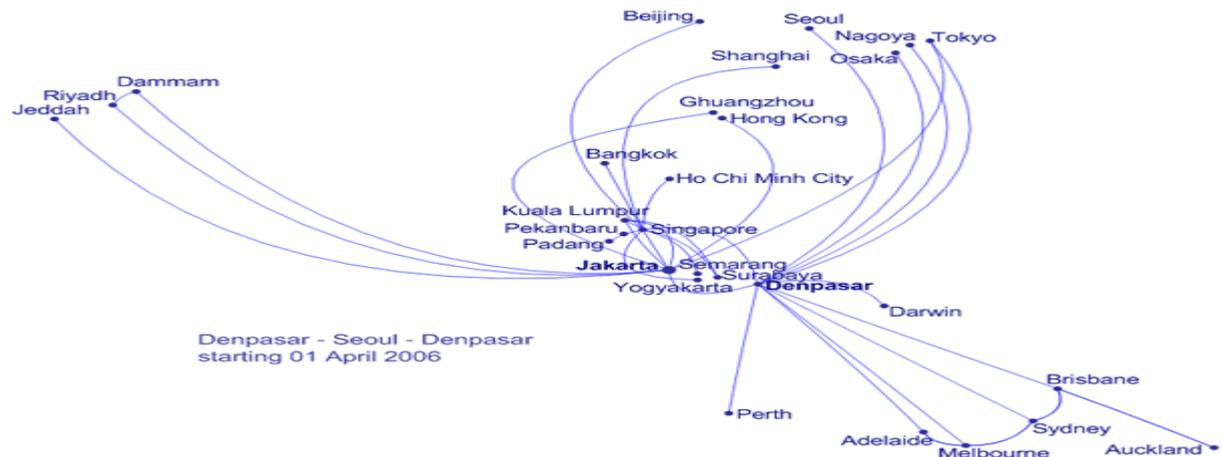
Gambar 9. Garuda Indonesia National Route

Seperti telah disebutkan dalam pendahuluan, bahwa graf tidak selalu dibuat berdasarkan efisiensi jarak. Dalam penerbangan tidak setiap daerah perlu dijangkau, akan tetapi yang memiliki potensi penumpang yang lebih banyak akan diprioritaskan. Jakarta, sebagai sentral dari berbagai kegiatan terutama perekonomian dan pemerintahan memiliki derajat paling besar dibanding simpul-simpul lainnya.

Kalau diperhatikan, terdapat lintasan graf yang beragam. Beberapa jalur penerbangan memiliki lintasan sirkuler, seperti pada jalur Jakarta-Pekanbaru-Padang-Jakarta, lalu pada jalur Denpasar-Makasar-Biak-Jayapura-

Timika-Denpasar. Akan tetapi terdapat pula simpul dengan derajat satu seperti di Batam, Manado,Palembang. Pertimbangan dari membuat lintasan sirkuler seperti ini bukan semata-mata efisiensi jarak, akan tetapi dengan melihat statistik lainnya yang lebih kompleks, seperti kemampuan ekonomi penduduk, tingkat perdagangan, atau daya tarik kota seperti pariwisata atau pusat bisnis. Hal ini pada kota Denpasar memiliki simpul ke-2 terbanyak karena mampu menarik banyak keuntungan dari pariwisata.

Sekarang, penulis meninjau lingkup yang lebih luas, yaitu rute penerbangan internasional dari Garuda Indonesia.



Gambar 10. Garuda Indonesia International Route

Apabila dibandingkan dengan rute penerbangan nasional, rute internasional jauh lebih sederhana. Simpul-simpul yang ada kebanyakan berderajat satu. Sirkuit hanya terdapat pada penerbangan ke Arab Saudi dan Australia. Sirkuit di Arab Saudi diperuntukkan untuk memfasilitasi tenaga kerja yang dari Indonesia yang jumlahnya melimpah. Sirkuit pada jalur ke Australia disebabkan kebutuhan dalam bidang pendidikan. Banyak pelajar Indonesia memilih Australia dan universitas yang berkualitas dilalui oleh jalur penerbangan dengan sirkuit tersebut.

3.2 Penggunaan graf untuk mencari solusi masalah

Suatu teori tentunya akan berkembang apabila dapat dipakai untuk memecahkan problematika kehidupan sehari-hari yang konkret. Graf bukan hanya sebagai representasi masalah. Dengan melakukan berbagai perhitungan, graf dapat memunculkan berbagai alternatif solusi penyelesaian masalah dan memilih yang terbaik.

3.2.1 Kasus Lapindo

Kasus lumpur Lapindo menyebabkan kerugian di berbagai bidang, termasuk dalam jalur perhubungan. Lumpur yang menggenangi jalan tol penghubung Surabaya-Gempol menyebabkan daerah Gempol terisolasi. Apabila diumpamakan dalam graf, wilayah Gempol dapat diumpamakan sebagai simpul terpencil (*isolated vertex*) dan jalan tol merupakan *cut-set*. Walaupun kendaraan masih berlalu-lalang, akan tetapi sebenarnya jalur ini masih berbahaya untuk dilalui. Pemerintah memutuskan merancang jalur penghubung

alternatif. Saat ini, pemerintah sedang membuat desain teknis pengganti ruas jalan tol sepanjang 12 kilometer. Sebelum masuk ke daerah Gempol, jalan tol lama akan dibelokkan ke kanan hingga menembus pintu tol Gempol. Selain jalur Surabaya-Gempol, terdapat satu jalan tol lagi yang menuju Gempol, yaitu jalur tol Porong-Gempol. Jalur tol ini pun sudah diputuskan tidak dapat dipakai selamanya karena sangat berbahaya. Alternatif penyelesaian untuk masalah ini yang diambil adalah dengan memindahkan secara permanen jalan tol sepanjang 6,5 kilometer ke rute baru di atas jalan raya Porong-Gempol yang sudah ada.

3.2.1 Jembatan Pasupati

Masalah kemacetan merupakan masalah lazim di kota besar seperti Bandung. Penyebabnya adalah jumlah kendaraan yang sangat banyak melebihi kapasitas prasarana jalan raya yang tersedia. Alternatif logis pertama untuk mengatasinya tentu saja dengan menambah jalan atau memperlebar jalan. Namun, lahan di kota Bandung sendiri sudah sangat sempit. Langkah paling konkret dan fantastis yang dilakukan pemerintah Bandung sendiri untuk memecahkan permasalahan ini adalah dengan pembangunan jembatan Pasupati. Dana yang dibutuhkan untuk pembangunan jembatan ini sangat besar. Belum lagi, pembebasan lahan seluas 55.269 m bukanlah hal yang sepele dan membutuhkan pengorbanan berbagai pihak. Ternyata, pembangunan jembatan ini sudah direncanakan sejak jaman Belanda.



Gambar 11. Jembatan Pasupati

Pembangunan jalan layang dan jembatan Pasupati (Pasteur- Cikapayang-Surapati) secara historis tercantum dalam dokumen *Carsten Plan*. Proyek tersebut telah menjadi obsesi pemerintah dan masyarakat Kota Bandung sejak tahun 1931 melalui program Autostrada yang menghubungkan *missing link* poros Pasteur-Dago.

Pembangunan jalan dan jembatan Pasupati ditujukan antara lain untuk menambah kapasitas ruas jalan dan persimpangan arah Barat-Timur Kota Bandung, mengurangi kemacetan lalu-lintas, melengkapi sistem jaringan jalan di Kota Bandung, mendukung ekonomi regional dan menambah aset infrastruktur Kota Bandung yang akan menjadi *landmark* kota.

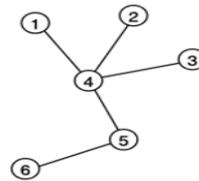
Dalam pembuatan jalan layang, yang dilakukan dalam graf adalah menentukan simpul-simpul sebagai tempat turun jalan layang. Simpul-simpul tersebut tentunya ditempatkan di tempat yang memang memiliki kepadatan cukup padat. Dapat dilihat pada jembatan Pasupati, terdapat tiga buah simpul yang terletak di Pasteur, Surapati, Cikapayang (sesuai kepanjangan dari namanya). Manfaat dari simpul ini sangat terasa terutama untuk kendaraan yang datang dari tol Pasteur. Umumnya, daerah yang ingin dikunjungi di Bandung adalah wilayah Dago atau wilayah sekitar Gedung Sate. Penempatan simpul di Cikapayang untuk wilayah Dago dan di Surapati untuk wilayah Gedung Sate sangat bermanfaat untuk mempersingkat waktu tempuh.

4. Pohon sebagai subbagian dari graf

Dalam makalah ini, penulis membahas mengenai penerapan graf dalam bidang perhubungan, namun graf sendiri merupakan

cabang ilmu matematika yang telah berkembang jauh dan memiliki banyak cabang ilmu yang memiliki kekhususannya sendiri. Salah satu bagian dari ilmu graf yang sering digunakan untuk adalah pohon. Pohon biasanya digunakan untuk menggambarkan hierarki dan struktur data, akan tetapi pohon juga memiliki kegunaan dalam mencari efisiensi jarak.

Pohon merupakan graf khusus. Definisi dari pohon adalah graf yang setiap simpulnya terhubung tetapi tidak membentuk sirkuit. Dengan kata lain, pohon merupakan suatu upagraf dari graf terhubung.



Gambar 12. Pohon

Pohon memang lebih banyak digunakan untuk menggambarkan hierarki dan struktur data dan kebanyakan digunakan dalam bidang informatika. Dan dalam hal ini, penulis hanya akan mengulas konsep dan teori pohon dalam implementasinya untuk menyelesaikan persoalan dalam perhubungan.

Lalu, apa aplikasi pohon dalam kaitannya dengan bidang perhubungan? Salah satunya dalam pembuatan rel kereta. Rute dari rel harus dibuat sesederhana mungkin untuk memudahkan pengaturan lalu lintas, selain disebabkan oleh biayanya yang mahal. Rel kereta berbeda dengan jalan raya yang memungkinkan adanya sirkuit, rel tidak memiliki sirkuit namun harus memiliki jangkauan semaksimal mungkin karena tujuan dari rel kereta adalah menghubungkan wilayah-wilayah yang letaknya berjauhan.

Di jaman modern ini, berbagai penemuan dan inovasi tercipta, salah satu inovasi yang terbilang canggih adalah jalur kereta bawah tanah (*subway*) yang hanya terdapat di negara maju. Kelebihan dari sistem ini adalah kecepatan tempuh disebabkan sistem ini bebas dari hambatan dan kemacetan. Selain itu, sistem transportasi ini dapat mengurangi beban kemacetan di jalan raya.

Berikut adalah gambar jalur kereta bawah tanah di kota New York, Amerika Serikat



Gambar 13. Jalur Subway di New York

Dari gambar dapat dilihat bahwa dalam sistem subway tidak memiliki sirkuit untuk masing-masing *line*. Hal ini untuk memudahkan *controlling* dari sistem *subway* dan membuatnya menjadi sesederhana mungkin. Konsep pohon merentang akan menjelaskan pembuatan sistem tersebut.

4.1. Pohon merentang (*Spanning Tree*)

Pohon merentang dapat dibentuk dari sebuah graf G dengan cara menghapuskan sebuah sisi dari setiap sirkuit yang ada sehingga graf tidak memiliki sirkuit lagi. Dengan kata lain, apabila upagraf dari graf terhubung membentuk pohon, graf tersebut merupakan pohon merentang.

Apabila G adalah graf berbobot, maka bobot pohon merentang T dari G didefinisikan sebagai jumlah bobot semua sisi di T . Di antara semua pohon merentang yang terdapat di G , akan ada pohon merentang yang memiliki bobot minimum, pohon merentang yang demikian disebut *pohon merentang minimum*. Teori pohon merentang minimum inilah yang diterapkan dalam sistem *subway* yang telah disebutkan sebelumnya.

4.2 Pohon merentang minimum dan Algoritma Kruskal

Penulis memilih algoritma Kruskal untuk menjelaskan cara membentuk pohon merentang disebabkan langkahnya yang sistematis dan lebih cocok diterapkan pada berbagai kondisi termasuk apabila ada sisi-sisi yang berbobot sama, walaupun algoritma ini membutuhkan banyak prosedur, seperti

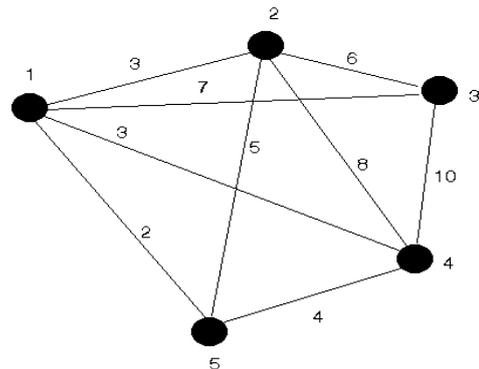
mengurutkan terlebih dulu sisi-sisi graf berdasarkan bobotnya.

Langkah pencarian pohon merentang minimum dengan algoritma Kruskal adalah :

1. membuat pohon T yang masih kosong.
2. Pilih sisi (u,v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T . Tambahkan (u,v) ke dalam T .
3. Ulangi langkah 2 sebanyak $n-1$ kali.

Penghitungan dilakukan sebanyak $n-1$ kali karena pada pohon merentang hanya terdapat jumlah sisi sebanyak jumlah simpul dikurangi satu.

Contoh kasus untuk menentukan pohon merentang minimum dengan algoritma Kruskal.



Gambar 14. Contoh graf untuk penggunaan Algoritma Kruskal

Misalkan ada 5 buah titik tempat wisata di suatu kota yang dilambangkan dengan 1, 2, 3, 4, dan 5. Masing-masing tersebut dihubungkan oleh lebih dari satu jalan yang memiliki bobot yang belum tentu sama. Pemerintah daerah

tersebut menginginkan agar jalan yang dapat menghubungkan kelima tempat tersebut dipelihara secara berkala untuk kemudahan perjalanan. Persoalannya, biaya pemeliharaan jalan harus ditekan seminimal mungkin untuk menghemat anggaran, maka pemerintah daerah **harus memilih** jalan mana saja yang perlu

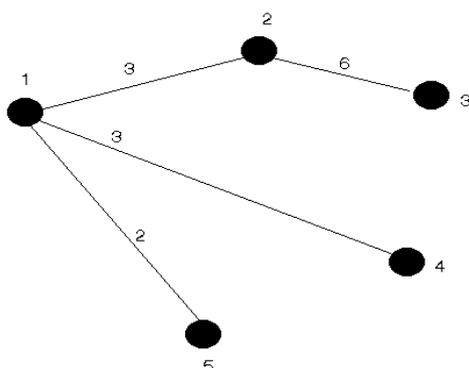
Simpul	1	2	3	4	5
1	-	3	7	3	2
2	3	-	6	8	5
3	7	6	-	10	-
4	3	8	10	-	4
5	2	5	-	4	-

Urutan sisi dari bobot terkecil ke terbesar: 1-5 → 1-2 → 1-4 → 4-5 → 2-5 → 2-3 → 1-3 → 2-4 → 3-4

Link	Panjang	Tindakan
1-5	2	masukkan ke dalam pohon
1-2	3	masukkan ke dalam pohon
1-4	3	masukkan ke dalam pohon
4-5	4	tolak, karena membentuk sirkuit
2-5	5	tolak, karena membentuk sirkuit
2-3	6	masukkan ke dalam pohon

Apabila empat buah garis telah terbentuk, maka proses dihentikan, karena seperti sudah

diketahui sebelumnya, bahwa jumlah garis pada pohon merentang adalah jumlah simpul dikurangi satu, maka pohon merentang minimum telah terbentuk. Apabila digambarkan akan terlihat sebagai berikut:



Gambar 15. Minimum spanning tree

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari berbagai macam studi kasus mengenai graf adalah :

1. Graf dapat merupakan salah satu bentuk representasi dari masalah dan

diperbaiki secara berkala agar kelima tempat tersebut dapat terhubung oleh jalan yang bagus.

Pertama, buatlah tabel data untuk sisi-sisi yang sudah terurut menaik berdasarkan bobotnya.

1. dapat pula digunakan untuk memecahkan masalah
2. Kasus-kasus yang diselesaikan dengan menggunakan graf adalah yang dapat disimbolkan dengan simpul dan garis.
3. Dalam prakteknya, variabel yang terdapat dalam suatu permasalahan bukanlah sekedar jarak, melainkan dapat pula berupa faktor-faktor non-matematis seperti kondisi sosial, tingkat ekonomi.
4. Keampuhan dari graf adalah dapat menggambarkan segala kemungkinan solusi yang mungkin untuk suatu masalah, dan kemudian menentukan salah satu yang paling baik secara matematis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <http://www.census.gov/ipc/www/world.html/>
Tanggal akses : 25 Desember 2006 pukul 19:59
- [2] <http://pikiran-rakyat.com/cetak/2005/0705/12/0102.htm/>
Tanggal akses: 25 Desember 2006 pukul 20:21
- [3] Munir, Rinaldi. (2006). Bahan Kuliah IF2153 Matematika Diskrit . Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.
- [4] [http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/raph.html./](http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/raph.html/)
Tanggal akses: 27 Desember 2006 pukul 11:50.
- [5] <http://www.garuda-indonesia.com/>.
Tanggal akses : 29 Desember 2006 pukul 7:24
- [6] <http://www.republika.co.id/> Tanggal akses : 29 Desember 2006 pukul 8:04

