

# **ENUMERASI ISOMORFISME GRAF SEDERHANA DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA POLYA I & II**

Disusun untuk memenuhi tugas Mata Kuliah Matematika Diskrit  
Semester I Periode 2006/2007



Disusun oleh :  
Danang Arief Setyawan      13505090

**PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA  
SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA  
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG  
2006**

## 1. Pendahuluan

Teori Graf adalah ilmu yang berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu Aljabar yang lebih dahulu berkembang. Ilmu Aljabar (abstrak) yang merupakan bagian dari ilmu Matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena dia berhubungan dengan himpunan, operasi, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Keunikan Teori Graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*verteks*) dan garis (*edge*). Meskipun pokok bahasan dari topik-topik Teori Graf sangat sederhana tetapi isi di dalamnya belumlah tentu sesederhana itu. Kerumitan demi kerumitan masalah- masalah selalu pasti ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan.

Beberapa masalah pokok dalam Teori Graf adalah :

- *Masalah Eksistensi* : masalah yang berhubungan dengan pertanyaan , apakah ada suatu graf yang ...? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu ...?
- *Masalah Konstruksi* : masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkonstruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita mengkonstruksinya? Bagaimana kita dapat membangunnya ?
- *Masalah Enumerasi* : masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu ? Bagaimana cara kita menghitungnya ?
- *Masalah Optimisasi* : masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil atau paling... . Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik ? mana yang paling baik ?

Pada makalah ini, penulis akan membahas salah satu sub-bahasan dari masalah enumerasi yang terdapat dalam teori graf tersebut, yaitu yang menyangkut Graf Sederhana. Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun gelang (self loop). Masalah enumerasi yang dimaksud adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan banyaknya *graf sederhana* yang tidak isomorfis satu dengan yang lainnya yang dapat dibentuk dari suatu graf dengan jumlah titik tertentu.

Untuk melakukan enumerasi tersebut, kita akan menggunakan salah satu teorema yang terdapat dalam bidang ilmu Aljabar, yaitu teorema yang disebut Teorema Polya I dan II mengenai masalah kombinatorial, dalam hal ini permutasi.

## 2. Beberapa Definisi yang Digunakan

Pada bagian berikut ini akan dibahas definisi dari istilah-istilah yang akan kita pakai dalam tulisan ini.

### Definisi Graf

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V,E)$  yang dalam hal ini :

$V$  = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*verteks / nodes*)

$E$  = himpunan sisi (*edges / arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul

### **Definisi Graf Sederhana**

Misalkan terdapat graf  $G$ . Graf tersebut disebut graf sederhana apabila tidak mengandung sisi-ganda maupun gelang (*selfloop*).

### **Definisi Group :**

Himpunan  $G \neq \emptyset$  dengan operasi  $\circ$  yang didefinisikan padanya disebut Group  $(G, \circ)$ , bila memenuhi syarat :

- (1)  $\forall x, y \in G, x \circ y \in G$  (sifat tertutup terhadap operasi  $\circ$ )
- (2)  $\exists e \in G, x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$  (ada elemen identitas  $e$ )
- (3)  $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G$  sehingga  $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$  (ada elemen invers)
- (4)  $\forall x, y, z \in G, x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$  (sifat asosiatif)

Himpunan  $H$  (himpunan bagian dari  $G$ ), disebut *group bagian*  $(G, \circ)$  jika  $(H, \circ)$  adalah juga group.

### **Definisi Group Simetri :**

Misalkan  $X$  adalah himpunan berhingga yang banyak anggotanya  $n$ . *Group Simetri* himpunan berhingga  $S_n$  adalah kumpulan semua permutasi dari himpunan  $X$ .

### **Definisi Orbit, Penstabil dan Karakter Permutasi :**

Apabila  $G$  adalah group bagian dari group Simetri  $S_n$  dan untuk  $x \in X$ , maka :

- a)  $Gx \equiv \{g(x) : g \in G\}$ , yaitu himpunan semua bayangan elemen  $x \in X$  oleh permutasi di  $G$ .  $Gx$  sering disebut juga *orbit*  $x$  terhadap  $G$ .
- b)  $G_x \equiv \{g \in G : g(x) = x\}$ , adalah himpunan semua permutasi di  $G$  yang mengakibatkan  $x$  sebagai titik tetap. Himpunan  $G_x$  disebut sebagai penstabil  $x$  di  $G$ .
- c)  $F(g) \equiv \{x \in X : g(x) = x\}$ , yaitu  $F(g)$  adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi  $g \in G$ . Himpunan  $F(g)$  disebut sebagai karakter permutasi  $g$  di himpunan  $X$ .

### **Definisi Graf Berhingga :**

Group  $G$  disebut *group berhingga* jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam group  $G$  disebut *order*  $G$  dan disimbolkan dengan  $|G|$ .

### **Definisi Tipe Untai dan Bobot :**

Diberikan *penyajian unta* (cycle) dari  $f$  (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya  $n$ ) yang memuat sebanyak  $a_1$  unta dengan panjang 1, sebanyak  $a_2$  unta dengan panjang 2, sebanyak  $a_3$  unta dengan panjang 3, ..., sebanyak  $a_i$  unta dengan panjang  $i$  dan  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ , maka : *tipe unta*  $f$  disimbolkan dengan vektor  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  dan *bobot*  $f$  adalah bilangan bulat positif  $W = 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots n^{a_n}$ .

Contoh :  $X = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ,  $f = (1354)(2)(687)$ , dalam hal ini  $a_1=1, a_2=1, a_3=1$ , dan lainnya nol. Jadi tipe unta  $f = [10110000]$ , dan bobot  $f = 1^1 3^1 4^1$ .

### **Definisi Indeks Siklik :**

Diberikan  $G$  adalah group permutasi dengan order  $m$  dari suatu himpunan yang banyak anggotanya  $n$  dan  $g \in G$  bertipe untaik  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ . Indeks siklik  $g$  didefinisikan sebagai :  $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$  dan indeks siklik group  $G$  didefinisikan sebagai :  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

**Definisi Pewarnaan :**

Fungsi  $f$  dari himpunan berhingga  $X$  ke himpunan berhingga  $Y$  disebut *pewarnaan*  $X$ . Himpunan berhingga  $Y$  disebut *warna*, sedangkan himpunan semua pewarnaan  $X$  terhadap warna  $Y$  disebut himpunan  $C$ . Dua pewarnaan  $f, g \in C$  disebut *tak dapat dibedakan terhadap group  $G$*  yang beraksi pada  $X$  jika  $\exists \pi \in G$  sehingga  $f(x) = g(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$ . Jelas bahwa relasi tak dapat dibedakan merupakan *relasi ekuivalensi* pada himpunan.

**Definisi Pola :**

Kelas-kelas kongruensi dalam himpunan  $C$  dengan relasi tak dapat dibedakan disebut *pola-pola* di  $C$  terhadap group  $G$ .

**Definisi Persediaan Pola :**

Fungsi bobot  $\omega$  memetakan  $Y$  ke himpunan  $r$   $\{ w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r) \}$ . Persediaan pola  $C$  terhadap group  $G$  adalah :

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n} K(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$  adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan (banyak pola) yang dapat dibedakan sehingga warna  $w(y_1)$  bersesuaian dengan  $n_1$  anggota,  $w(y_2)$  bersesuaian dengan  $n_2$  anggota, ... dan  $w(y_r)$  bersesuaian dengan  $n_r$  anggota.

**3. Teorema-Teorema Pendukung**

Teorema-teorema yang dipakai untuk mendukung pembuktian Teorema Polya I & II serta pengaplikasiannya dalam Enumerasi Graf Sederhana.

**Teorema 2.1 :**

Jika  $H$  adalah group bagian dari group  $G$  dan  $|H| = k$  maka setiap koset kiri (kanan)  $H$  memiliki kardinalitas  $k$ .

**Teorema 2.2 (Lagrange) :**

Order group berhingga dapat dibagi oleh order sembarang group bagiannya.

**Teorema 2.3 :**

Apabila himpunan berhingga  $X$  memiliki  $k$  orbit terhadap group  $G$  yang beda, maka berlaku :

(a)  $\forall x \in X, |G_x| \cdot |G_x| = |G|$  (*Teorema Orbit-Penstabil*)

(b)  $\sum_{x \in X} |G_x| = k |G|$

$$(c) \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Untuk membuktikan Teorema 2.3 (a)-(c) dapat digunakan definisi dan teorema sebelumnya.

**Teorema 2.4 ( Burnside-Frobenius ) :**

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = k |G|$$

**Teorema 2.5 :**

Diberikan  $C = \{f | f: X \rightarrow Y\}$  dan  $X, Y$  adalah himpunan berhingga; juga diketahui bahwa  $G$  adalah group permutasi yang beraksi pada  $X$ . Untuk tiap  $\pi \in G$  didefinisikan pemetaan  $\pi'$  dari  $C$  ke  $C$  dengan sifat :  $\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$  dan  $\forall f \in C$ , maka berlakulah bahwa :

- (a)  $\pi'$  adalah permutasi di  $C$ .
- (b)  $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$  adalah group.

**Teorema 2.6 :**

Jika  $Y$  memuat paling sedikit 2 anggota maka pemetaan dari  $G$  ke  $G'$  yang didefinisikan dengan  $\varphi: \pi \rightarrow \pi'$  adalah isomorfisma (group).

**Teorema 2.7 :**

Misalkan  $G$  adalah group permutasi yang beraksi pada himpunan  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  dan  $C$  adalah himpunan semua fungsi dari  $X$  ke  $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_r\}$ . Jika  $w(y)$  adalah fungsi bobot pada  $Y$ , dan didefinisikan  $\omega(f) \in C$  dengan bentuk :

$$\omega(f) = [w(f(x_1))][w(f(x_2))]\dots[w(f(x_n))]$$

maka :

- (1) Jika  $f, \phi \in C$  mempunyai sifat tak dapat dibedakan terhadap  $G$ , maka  $\omega(f) = \omega(\phi)$ .
- (2) Jika pola-pola yang berbeda di  $C$  dinyatakan dengan  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$ ;  $\omega(C_i)$  ( $i=1,2,3,\dots,k$ ) adalah nilai konstan atas  $C_i$ , maka pola persediaan  $C$  dapat dinyatakan sebagai:

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{i=1}^k \omega(C_i)$$

**Teorema 2.8 (Burnside-Frobenius dengan bobot) :**

Jika  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  adalah orbit yang berbeda dalam himpunan  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  terhadap permutasi  $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_m\}$ , kemudian pada  $X$  didefinisikan fungsi bobot  $\omega(x)$  yang merupakan simbol abstrak dengan sifat bila  $x_r$  dan  $x_s$  berada pada orbit yang sama, maka  $\omega(x_r) = \omega(x_s)$  dan terdapatlah fungsi bobot pada  $G$ , yaitu =

$$W(g) = \sum_{x \in F(g_i)} \omega(x)$$

**4. Teorema Polya I dan pembuktiannya**

Beberapa definisi dan teorema yang telah dibahas pada bagian sebelumnya dapat digunakan untuk persiapan pembuktian Teorema Polya I.. Bukti dari Teorema Polya I telah disampaikan oleh Balakrishnan seperti di bawah ini.

**TEOREMA POLYA I :**

**Diberikan  $C = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$  dengan  $X = n \geq 2$  dan  $Y = r$ . Jika  $G$  merupakan group permutasi yang beraksi pada  $X$  dengan indeks siklik  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  maka banyaknya pola di  $C$  terhadap  $G$  adalah  $Z(G; r, r, r, \dots, r)$**

**Bukti :**

Pola-pola di  $C$  terhadap group  $G$  (yang beraksi pada himpunan  $X$ ) adalah orbit yang berbeda di  $C$  terhadap  $G$ , ini diturunkan dari isomorfisma group (Teorema 2.6) akan menghasilkan orbit-orbit di  $C$  terhadap  $G'$  (group permutasi pada  $C$ ). Sedangkan banyaknya pola-pola yang terjadi di  $C$  terhadap  $C'$  diberikan oleh Teorema 2.4 (Teorema Burnside- Frobenius) yaitu :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')| \dots\dots\dots (*)$$

dengan  $F(\pi') = \{f \in C : \pi'(f) = f\}$

Karena  $\pi'(f) = f$  jika dan hanya jika  $f(\pi(x)) = f(x)$  untuk  $\forall x \in X$  dan karena  $G = G'$  sebagai akibat teorema 2.6 maka bentuk (\*) yang memuat himpunan  $C$  dan group  $G'$  dapat dibawa kepada bentuk himpunan  $X$  dan group  $G$  yang beraksi padanya, yaitu :

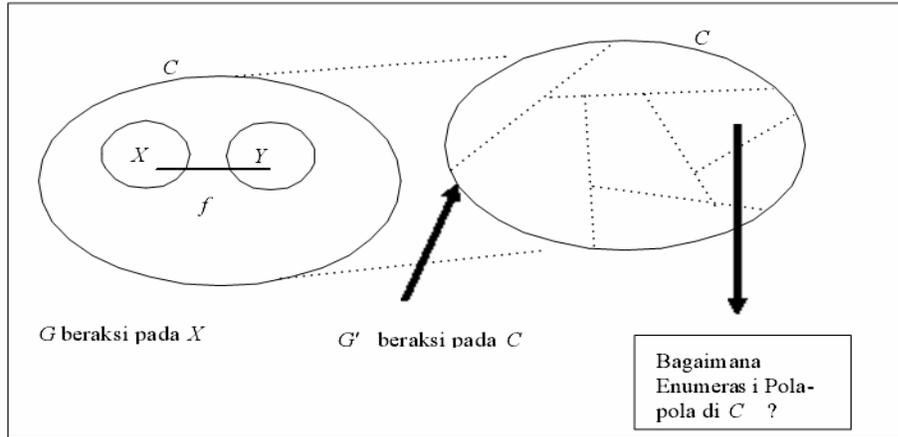
$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |f \in C : f(\pi(x)) = f(x) \text{ untuk } \forall x \in X| \dots\dots\dots (**)$$

Jika  $f(\pi(x)) = f(x)$  dan jika  $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \dots \ x_j)$  adalah satu untai suatu permutasi  $\pi \in G$ , maka  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \dots = f(x_j)$ . Dengan kata lain  $f$  mempunyai nilai konstan untuk tiap untai  $\pi$ . Kebalikannya, jika  $f$  mempunyai nilai konstan untuk setiap untai  $\pi$  dan jika  $(x \ x_t \dots \ x_w)$  adalah untai yang memuat sembarang  $x \in X$  maka  $f(\pi(x)) = f(x_t) = f(x_w)$ .

Jadi jumlah sisi kanan dari persamaan (\*\*) hanyalah banyaknya cara pewarnaan  $X$  dengan  $r \geq 2$  warna, sehingga elemen-elemen dalam untai yang sama dari permutasi  $\pi$  akan diberi warna yang sama. Jika  $\pi$  bertipe  $[ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_n ]$ , maka banyaknya cara pewarnaannya adalah :  $r^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}$ . Sehingga (\*) menjadi :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n} \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1} r^{a_2} r^{a_3} \dots r^{a_n}$$

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z(\pi; r, r, r, \dots, r) \equiv Z(G; r, r, r, \dots, r)$$



Gambar 2. Konsep dasar Teorema Polya I

### 5. Teorema Polya II dan pembuktiannya

Teorema Polya II sering juga disebut sebagai Teorema Polya yang diperluas. Bukti teorema ini juga sudah diberikan oleh Balakrishnan sebagai berikut.

#### TEOREMA POLYA II :

**Persediaan Pola warna,  $PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$  adalah merupakan indeks siklik dari  $Z(G, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  pada  $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$  dengan  $i=1, 2, 3, 4, \dots, n$ .**

#### Bukti :

Penurunan rumus untuk Teorema Polya II menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga, dan hampir sama dengan Teorema Polya I. Pada intinya fungsi bobot  $\omega(f)$  memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema 2.4 (Burnside-Frobenius) untuk orbit-orbit  $C$  terhadap permutasi dari group  $G'$ .

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)) = \sum_{i=1}^k \dot{u}(C_i) = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi \in G'} W(\pi_i)$$

$$\text{dimana } W(\pi') = \sum_{f \in F(n)} \dot{u}(f) \quad \dots\dots(a)$$

Jika bentuk  $C$  dan  $G'$  dikembalikan ke bentuk  $X$  dan  $G$ , maka :

$$PP \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{n \in G} \sum_{f \in C; f(\pi(x))=f(x)} [w(f(x_1))] [w(f(x_2))] [w(f(x_3))] \dots [w(f(x_n))] \quad \dots\dots(b)$$

Jumlahan pada persamaan (b) dapat diambil atas seluruh fungsi  $f(x)$  yang konstan atas tiap untai  $\pi$ . Misalkan  $\pi$  bertipe  $[a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n]$  dan didefinisikan multinomial  $w(y_i)$  sebagai berikut :

$$\Omega = \left[ \left[ w(y_1)^1 + w(y_2)^1 + w(y_3)^1 + \dots + w(y_r)^1 \right] \dots \left[ w(y_1)^1 + w(y_2)^1 + w(y_3)^1 + \dots + w(y_r)^1 \right] \right]$$

$$\left[ \left[ w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + w(y_3)^2 + \dots + w(y_r)^2 \right] \dots \left[ w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + w(y_3)^2 + \dots + w(y_r)^2 \right] \right]$$

$$\left[ \left[ w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + w(y_3)^3 + \dots + w(y_r)^3 \right] \dots \left[ w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + w(y_3)^3 + \dots + w(y_r)^3 \right] \right] \dots$$

$$\left[ \left[ w(y_1)^n + w(y_2)^n + w(y_3)^n + \dots + w(y_r)^n \right] \dots \left[ w(y_1)^n + w(y_2)^n + w(y_3)^n + \dots + w(y_r)^n \right] \right]$$

Ekspansi  $\Omega$  memuat  $r^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}$  bentuk, yang jumlahnya juga merupakan fungsi  $f(x)$  yang konstan atas tiap untai  $\pi$ . Sekarang dapat ditunjukkan bahwa bentuk-bentuk individu dalam ekspansi tersebut sama dengan bobot  $\omega$  dari fungsi individu  $f(x)$ . Andaikan bahwa untai dalam penyajian  $\pi$  mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor-faktor dari  $\Omega$ , dengan cara yang biasa : untai dengan panjang 1 berkorespondensi satu-satu dengan  $a_1$  faktor pertama, untai dengan panjang 2 dengan  $a_2$  faktor kedua ... dan seterusnya.

Jika  $f(x)$  memetakan untai dengan panjang  $j$  yang diketahui (sebut saja himpunan  $T$ ) di dalam  $y_v$ , maka  $w(y_v)^j = \prod_{x \in T} w(f(x))$ . Bentuk ekspansi seluruhnya diberikan dengan

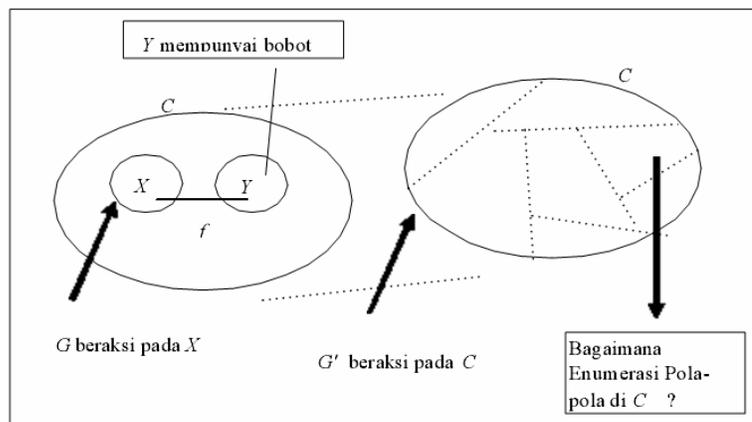
perkalian semua untai yang akan sama dengan  $\prod_U \prod_{x \in T} w(f(x))$  dimana  $U$  adalah semua

untai  $\pi$ . Tapi untai-untai ini mempunyai pengaruh pada partisi di  $X$ , sehingga ekspansinya hanya  $\prod_{x \in T} w(f(x)) = \dot{u}(f)$ . Akhirnya telah dibuktikan bahwa seluruh

jumlahan pada persamaan (b) mempunyai nilai yang sama dengan  $\Omega$ , tapi jelas terlihat bahwa :

$$\Omega = Z(\pi; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ dengan } x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_n)]^i$$

untuk  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$



Gambar 3. Konsep Dasar Teorema Polya II

## 6. Enumerasi Isomorfisme Graf Sederhana dengan Teorema Polya I & II

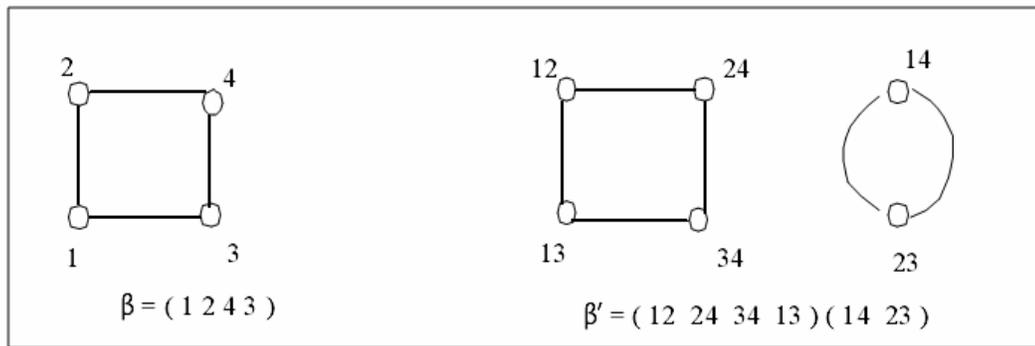
Apabila  $n$  titik pada graf  $G$  dikenai permutasi, maka  $n(n-1)/2$  pasangan titik tak berurut ( artinya  $ij = ji$  ) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam

hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai garis, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Sebagai contoh kongkrit diberikan himpunan titik  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan  $n = 4$  buah. Seluruh kemungkinan garis tak berarah yang ada pada 4 titik tersebut adalah  $(4)(3)/2 = 6$  buah. Suatu permutasi  $\beta = (1\ 2\ 4\ 3)$  pada himpunan titik tersebut, akan membangkitkan permutasi 6 elemen tak berurut sebagai berikut :

$$\hat{a} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \quad \text{akan membangkitkan } \hat{a}' = \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 24 & 21 & 23 & 41 & 43 & 13 \end{array}$$

Gambaran kongkritnya adalah seperti pada gambar dibawah ini :



Gambar 4:  
Permutasi  $\beta$  dan permutasi  $\beta'$  yang dibangkitkan oleh  $\beta$

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk group simetri penuh (sebut saja  $S_n$ ), maka permutasi dari pasangan titik itu ( garis ) itu juga membentuk group Simetri (sebut  $R_n$ ). Jadi group  $S_n$  ( permutasi titik pada graf) akan membangkitkan group  $R_n$  (permutasi garis pada graf). Seluruh bentuk group  $S_4$  ada 24, yaitu :

$$\begin{array}{llll} g_1 = (1)(2)(3)(4) & g_7 = (142)(3) & g_{13} = (1)(23)(4) & g_{19} = (1243) \\ g_2 = (14)(2)(3) & g_8 = (12)(34) & g_{14} = (14)(23) & g_{20} = (1234) \\ g_3 = (1)(24)(3) & g_9 = (13)(2)(4) & g_{15} = (1)(234) & g_{21} = (132)(4) \\ g_4 = (1)(2)(34) & g_{10} = (143)(2) & g_{16} = (1)(243) & g_{22} = (1432) \\ g_5 = (12)(3)(4) & g_{11} = (134)(2) & g_{17} = (123)(4) & g_{23} = (1342) \\ g_6 = (124)(3) & g_{12} = (13)(24) & g_{18} = (1423) & g_{24} = (1324) \end{array}$$

Tipe untai dari  $S_4$  ada 5, yaitu :

- bentuk  $[4,0,0,0]$  ada 1 buah dan indeks sikliknya :  $x_1^4$
- bentuk  $[2,1,0,0]$  ada 6 buah dan indeks sikliknya :  $x_1^2 x_2$
- bentuk  $[1,0,1,0]$  ada 8 buah dan indeks sikliknya :  $x_1 x_3$
- bentuk  $[0,2,0,0]$  ada 3 buah dan indeks sikliknya :  $x_2^2$
- bentuk  $[0,0,0,6]$  ada 6 buah dan indeks sikliknya :  $x_4$

Seperti pada Gambar 4, indeks siklik  $x_4$  pada group  $S_4$  akan membangkitkan indeks siklik  $x_2 x_4$  pada group  $R_4$ . Maka indeks siklik  $x_1^2 x_2$  pada  $S_4$  akan membangkitkan indeks siklik  $x_1^2 x_2^2$ . Contoh kongkritnya perubahannya adalah sebagai berikut :

$$\alpha = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix} \text{ akan membangkitkan } \alpha' = \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 14 & 13 & 12 & 43 & 42 & 32 \end{matrix} \text{ atau}$$

$\alpha' = (12)(14)(23)(34)(24)(13)$  yang bertipe  $x_1^2 x_2^2$ .

Keseluruhan perubahan indeks siklik dari group  $S_4$  menjadi indeks siklik  $R_4$ , adalah sebagai berikut :  $x_1^4 \rightarrow x_1^6$  ;  $x_1^2 x_2 \rightarrow x_1^2 x_2^2$  ;  $x_1 x_3 \rightarrow x_3^2$  ;  $x_2^2 \rightarrow x_1^2 x_2^2$  ;  $x_4 \rightarrow x_2 x_4$ , sedangkan banyaknya tiap jenis tidak mengalami perubahan. Dari Definisi Indeks Siklik diperoleh :

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \frac{1}{24} [x_1^6 + 6x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2 x_4] \quad \dots (***)$$

### Aplikasi Teorema Polya I :

Ada 2 keadaan untuk himpunan Y, yaitu adanya garis pada pasangan titik dan tidak adanya garis pada pasangan titik, sehingga  $r=2$ . Dari persamaan (\*\*\*) kita ambil  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = r = 2$ , maka kita akan mendapatkan :

$$Z(R_4; 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{24} [2^6 + 6 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot 2] = 11 \quad \text{artinya untuk graf}$$

yang mempunyai 4 titik (*vertex/node*), maka akan terdapat 11 graf yang saling tidak isomorfis.

### Aplikasi Teorema Polya II :

Ambil 2 bobot pada himpunan Y, yaitu  $w(y_1) = \text{tak ada garis} = T$  dan  $w(y_2) = \text{ada garis} = A$ . Kemudian substitusikan  $x_1 = T + A$ ,  $x_2 = T^2 + A^2$ ,  $x_3 = T^3 + A^3$  dan  $x_4 = T^4 + A^4$  pada persamaan (\*\*\*), sehingga diperoleh :

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24} [(T + A)^6 + 6(T + A)^2 (T^2 + A^2)^2 + 8(T^3 + A^3)^2 + 3(T + A)^2 (T^2 + A^2)^2 + 6(T^2 + A^2)(T^4 + A^4)]$$

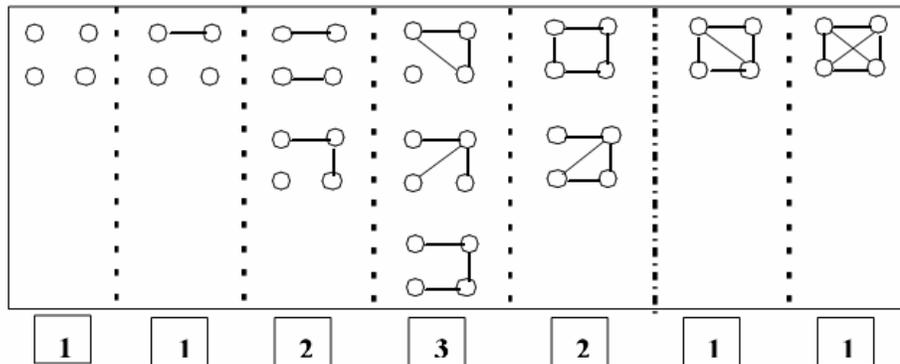
Lakukan perkalian pada tiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan. Maka akan didapat :

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = 1T^6 + 2T^5 A + 2T^4 A^2 + 3T^3 A^3 + 2T^2 A^4 + 1TA^5 + 1A^6$$

Artinya bahwa untuk graf yang terdiri atas 4 titik (*vertex*) akan terdapat graf-graf isomorfis yang memenuhi rincian :

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 graf tanpa garis ( <i>edge</i> )    | 2 graf dengan 4 garis ( <i>edge</i> ) |
| 2 graf dengan 1 garis ( <i>edge</i> ) | 1 graf dengan 5 garis ( <i>edge</i> ) |
| 2 graf dengan 2 garis ( <i>edge</i> ) | 1 graf dengan 6 garis ( <i>edge</i> ) |
| 3 graf dengan 3 garis ( <i>edge</i> ) |                                       |

Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar rincian di bawah ini :



Gambar 5:  
Graf terdiri dari  $n = 4$  titik dan kelas-kelas kongruensinya

## 7. Kesimpulan

Dari ulasan di atas, kita bisa menarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Teorema Polya I dapat kita gunakan untuk menghitung banyaknya graf sederhana yang terdiri dari  $n$  buah titik yang tidak isomorfis satu sama lain.
2. Teorema Polya II dapat kita gunakan untuk menghitung banyaknya graf sederhana yang terdiri dari  $n$  buah titik dan  $k$  buah garis serta tidak isomorfis satu sama lain.

## 8. Daftar Pustaka

- Balakrishnan V.K., “Schaum’s Outline of Theory and Problems of Combinatorics”, McGraw Hill Inc. , 1995.
- Diestel, Reinhart, “Graph Theory : Electronic Edition 2005”, Springer-Verlag Heidelberg, 2005.
- INTEGRAL, Vol. 8 No. 1, April 2003, “Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana” oleh R.Gunawan Santosa.
- <http://en.wikipedia.org/>
- <http://id.wikipedia.org/>
- <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/>
- <http://www.tvwiki.tv/wiki/>
- <http://www.mathreference.com/grp-act.bpt.html>
- [http://www.mathtable.com/zwillinger/talks/20010405/20010405\\_raytheon.html](http://www.mathtable.com/zwillinger/talks/20010405/20010405_raytheon.html)
- <http://projecteuclid.org/Dienst/Repository/1.0/Disseminate/euclid.pjm/1103044241/boody/pdf>