Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsekutif Pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit

Abdul Gafur – NIM : 13505011
Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
E-mail : if15011@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain. Jarak (distance) d(u,v) antara dua titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G. Jika tidak ada lintasan dari u ke v, maka d(u,v) = ∞. Eksentrisitas titik v di graf G, dinotasikan ec(v) adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik di G. Titik v adalah titik eksentrik dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau d(v, u) = ec(u). Eksentrik di graf pada graf ED(G) didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G atau V(ED(G)) = V(G) dimana arc menghubungkan titik u ke v, jika v adalah titik eksentrik dari u. Masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah menentukan eksentrik digraf dari graf star, graf double star dan graf komplit bipartit. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut. Eksentrik digraf dari graf star ED(Sm) adalah graf komplit Km yang mempunyai arah dan eksentrik digraf dari graf double star ED(Sn,m) adalah digraf bipartit D(Bn,m). Selanjutnya eksentrik digraf dari graf komplit bipartit ED(Km,n)adalah digraf komplemen Km,n = nmKD,

Kata kunci : graf star, graf double star, graf komplit bipartit, jarak, eksentrisitas, titik eksentrik dan eksentrik digraf, consecutive labeling, cycle graph, complete graph, complete bipartite graph.

Pendahuluan

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas titik pada graf.

Misal G graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Jarak d(u,v) antara dua titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka kita definisikan jarak d(u,v) = ∞. Eksentrisitas ec(v) pada sebuah titik v dalam graf G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G, dapat dituliskan ec(v) = max{d(v,u)|u ∈V(G)}. Radius r(G) dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan r(G) = min{ec(v)|v∈V} sedangkan diameter dari G, dinotasikan diam(G) adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan diam (G) = maks{ec(v)|v∈V}. Titik v disebut titik central jika ec(v) = r(G).

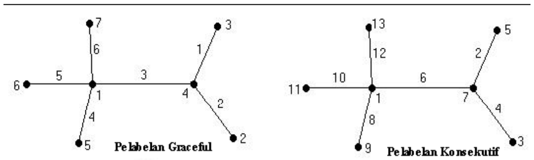
Eksentrik digraf diperkenalkan pertama kalinya oleh Fred Buckley pada tahun 90-an. Eksentrik digraf ED(G) pada graf G didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau V(ED(G)) =V(G), dimana arc menghubungkan titik u ke v jika v adalah titik eksentrik dari u. Pada papernya [1] Buckley memberikan kesimpulan bahwa hampir setiap graf G, eksentrik digrafnya adalah ED(G) = $\overline{*G}$, dimana $\overline{*G}$ adalah graf komplemen dari G yang setiap sisinya diganti dengan dua arc (sisi berarah) yang simetrik. Pada makalah ini, kita tertarik untuk membahas eksentrik digraf dari graf komplit bipartit, graf star, dan graf double star.

Pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah teori koding, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit (Slamin, 1997).

Pada prinsipnya pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada titik, sisi, kedua titik dan sisi ataupun pada bidang. Pelabelan konsekutif sendiri merupakan pemberian nilai pada titik dan sisi graf. Ide munculnya pelabelan konsekutif ini bermula dari pelabelan *graceful* pada graf pohon yang dikemukakan oleh Slater dalam buku "*Pearls in Graph Theory*" (Hartsfield and Ringel, 1990). *Pelabelan graceful* pada graf G dengan n titik dan m sisi adalah pemetaan injektif dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat dimana sisinya mendapat label (semuanya berbeda) harga mutlak dari selisih titik yang dihubungkannya. Jika label titik dan sisinya merupakan bilangan bulat konsekutif dari dan memenuhi sifat bijektif, dimana aturan pelabelan sisinya sama dengan aturan pelabelan sisi pada pelabelan *graceful*, maka pelabelannya disebut pelabelan *konsekutif*. Dengan demikian, perbedaan antara pelabelan graceful dan konsektif terletak pada himpunan labelnya dan sifat pemetaannya, yaitu untuk pelabelan graceful hanya memenuhi pemetaan injektif untuk label titiknya, sedangkan pelabelan konsekutif memenuhi pemetaan injektif dan surjektif (bijektif) untuk label titik dan sisinya. Slater juga mengemukakan bahwa jika graf pohon dapat dilabeli secara graceful, maka graf pohon tersebut juga bisa dilabeli secara konsekutif, yang sudah dibuktikan oleh Wulandari dan Wijaya (2002). Gambar 1 merupakan contoh graf pohon dengan pelabelan *graceful* dan konsekutif.

Dalam paper ini kita akan menginvestigasi perumusan pelabelan graf secara konsekutif pada graf sikel dan graf bipartit komplit. Selain itu, pelabelan konsekutif dari graf star yang merupakan kelas khusus dari graf bipartit komplit, yang telah dibahas oleh Wulandari D. dan Wijaya K.(2002) juga akan dibahas dalam paper ini, tetapi dengan pelabelan yang berbeda. Pada akhir bagian akan dibahas graf yang tidak memenuhi pelabelan konsekutif, yaitu pada graf komplit dengan 4 titik $K4$.

Semua definisi dalam paper ini diambil dari buku "Graphs & Digraphs" karangan Chatrand G. and Lesniak L., 1996 dan semua graf dalam paper ini adalah hingga, tidak mempunyai loop dan sisi paralel. *Graf G* adalah pasangan himpunan tak kosong V yang elemen–elemennya disebut *titik* (*vertex*) dan himpunan (boleh kosong) E yang elemen-elemennya merupakan pasangan tak terurut (u,v) dari titik u,v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Untuk selanjutnya graf dengan n titik dan m sisi akan dinotasikan dengan $G(n,m)$.



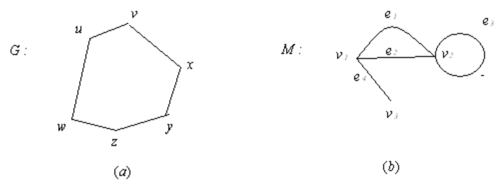
Gambar 1 Pelabelan graceful dan pelabelan konsekutif pada graf pohon

Misalkan u dan v titik pada graf G. Titik v dikatakan *tetangga* (*adjacent*) u jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v, yaitu . *Derajat titik v* di G, dinotasikan dengan adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan v. Sebuah *jalan* (*walk*) W pada graf G adalah barisan berhingga $W = v1, e1, v2, e2, \ldots, ek, vk$ ($k \geq 1$) yang suku–sukunya bergantian titik dan sisi, dimana setiap (vi, $vi+1$) adalah sisi di G, untuk $1 \leq i \leq k - 1$. Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik u dan v ada jalan dari u ke v di G.

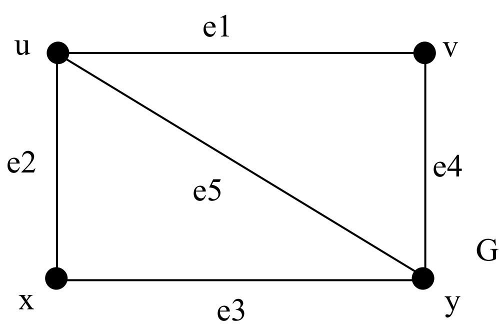
Tinjauan Pustaka

Graf tak berarah G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) (selanjutnya akan ditulis uv) dari titik u, v di V yang disebut sisi (edge). Untuk selanjutnya graf tak berarah G akan disebut graf G saja. Sebagai contoh, gambar 2.1 (a) adalah graf dengan himpunan titik V(G) = {u, v, x, y, z, w}dan himpunan sisi E(G) = {vx, vy, yz, zu, zw}.
Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, yakni e = uu disebut loop. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka

sisi tersebut dinamakan sisi rangkap (multiple edge). Pada gambar 2.1 (b), sisi e 3 adalah loop dan sisi e1, e2 adalah sisi rangkap. Graf yang tidak mempunyai loop dan sisi rangkap disebut graf sederhana.
Order n dari graf G adalah banyaknya titik di G, yakni n = |V|. Graf yang ordernya hingga disebut dengan graf hingga. Sebagai contoh, gambar 2.1 (a) adalah graf yang mempunyai order 6. Pada makalah ini, yang kita bahas adalah graf sederhana dan graf hingga.

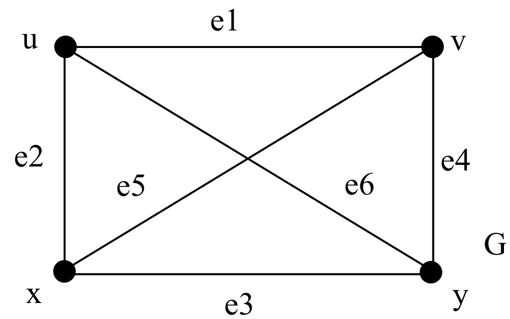


Gambar 2.1 Contoh graf
Misal u dan v titik pada graf G. Titik v dikatakan tetangga (adjacent) u jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v, yaitu e = uv. Himpunan semua tetangga dari titik v dinotasikan dengan N(v). Jika e = uv adalah sisi pada graf G maka e dikatakan menempel (incident) pada titik u dan v. Contohnya pada gambar 2.2 , titik u adalah adjacent titik v dan x tetapi titik u bukan adjacent titik w, titik u dan sisi e1 adalah incident tetapi titik w dan sisi e1 bukan incident.



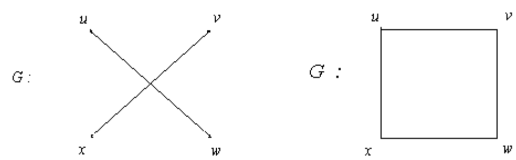
Gambar 2.2 Adjacent dan incident

Derajat (degree) dari titik v di G adalah jumlah sisi yang berhubungan dengan v. Jika setiap titik v pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf G disebut graf reguler. Sebuah graf G dikatakan r-reguler atau reguler pada derajat r, jika setiap titik pada G mempunyai derajat r. Sebagai contoh pada gambar 2.3, graf G adalah graf 3-reguler.



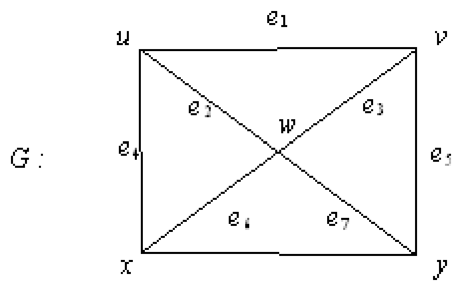
Gambar 2.3 Graf reguler

Komplemen dari graf G dinotasikan G adalah graf dengan himpunan titik V(G) = V(G) dimana titik u, v tetangga pada G jika dan hanya jika titik u,v bukan tetangga pada G. Contoh graf dan komplemennya dapat dilihat pada gambar 2.4.



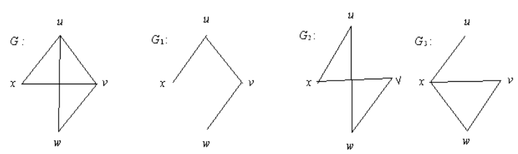
Gambar 2.4 Graf dan komplemennya

Jalan (walk) W dengan panjang n dari titik a ke b pada graf G adalah barisan titik a = vo, e1, v1, e2, v2, e3, v3, …, vn-1, en, vn= b $(n \geq 0)$ yang terdiri dari titik dan
sisi di G yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian hingga (vi, vi+1) adalah sisi di G untuk setiap i = 0, 1, 2, …, n-1. Jalan ini menghubungkan titik v o dan vn, dan dapat juga dinotasikan sebagai vo-v1-...-vn. Jalan dikatakan tertutup jika a = b dan terbuka jika $a \neq b$. Sebagai contoh pada gambar 2.5, x-w-y-v-u-x adalah jalan tertutup dengan panjang 5 dan u-v-w-x-u-v-y adalah jalan terbuka dengan panjang 6.Jejak (trail) adalah jalan dimana tidak ada sisi yang berulang. Jalan dikatakan lintasan (path) jika semua titiknya berbeda. Lintasan adalah jejak, akan tetapi tidak semua jejak adalah lintasan. Sedangkan lintasan tertutup dinamakan sikel (cycle). Pada gambar 2.5, jalan x-w-v-u-w-y adalah jejak tetapi bukan lintasan, sedangkan u-x-w-v-y adalah lintasan, dan u-w-y-v-u adalah sikel.



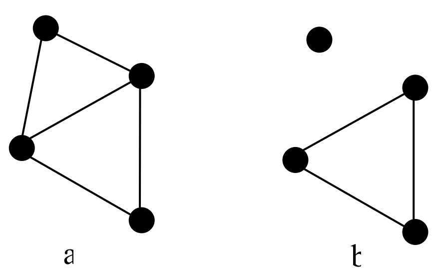
Gambar 2.5 Walk pada graf

Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subsetneq V(G)$ dan $E(H) \subsetneq E(G)$. Sebagai contoh pada gambar 2.6, G1 dan G2 adalah subgraf dari G tetapi G3 bukan subgraf dari G karena ada sisi xw di E(G3) yang bukan elemen dari E(G).



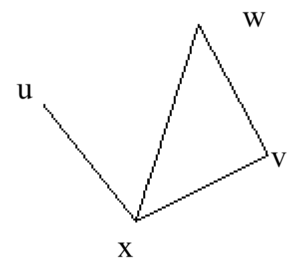
Gambar 2.6 Graf dan subgrafnya

Komponen dari G adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen dan untuk graf tak terhubung mempunyai sedikitnya dua komponen. Gambar 2.7 (a) adalah graf terhubung dan 2.7 (b) adalah graf tak terhubung dengan dua komponen.



Gambar 2.7 Graf terhubung dan graf tak terhubung

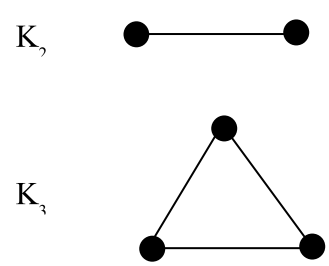
Jarak d(u,v) antara dua titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka kita definisikan jarak $d(u,v) = \infty$. Sebagai contoh, graf pada gambar 2.8, d(u,v) = 2 sedangkan $d(v, w) = \infty$.



Gambar 2.8 Jarak pada graf

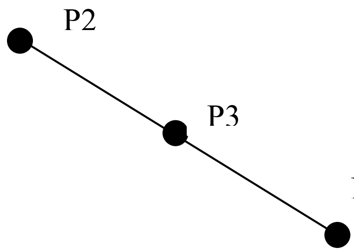
Eksentrisitas ec(v) pada titik v dalam graf G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G, dapat dituliskan $ec(v) = \max\{d(v,u) | u \in V(G)\}$. Radius r(G) dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $r(G) = \min\{ec(v) | v \in V\}$ dan diameter dari G, dinotasikan diam(G) adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan diam (G) = maks$\{ec(v) | v \in V\}$, titik v disebut titik central jika ec(v) = r(G), center dinotasikan cen(G) adalah subgraf pada G yang terbentuk dari titik central. Titik v dikatakan titik eksentrik dari u jika jarak dari v ke u sama dengan titik eksentrik dari u, dapat dituliskan d(v,u) = ec(u). Eksentrisitas titik, titik eksentrik, radius, diameter.

Graf yang setiap dua titik yang berbeda adalah tetangga disebut graf komplit. Graf komplit dengan n titik dinotasikan Kn. Contoh graf komplit K2 dan K3 ditunjukkan pada gambar 2.10.



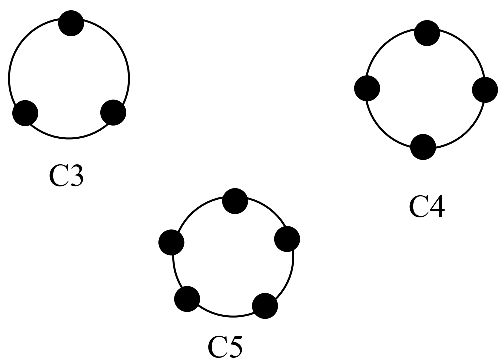
Gambar 2.10 Graf komplit

Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan Pn. Contoh graf lintasan P2, P3dan P4 dapat dilihat pada gambar 2.10.



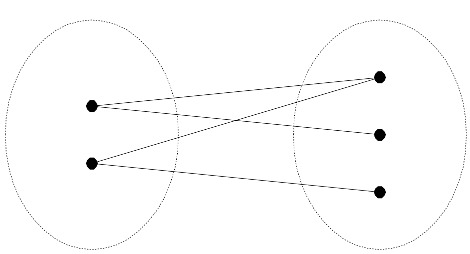
Gambar 2.10

Graf lintasan Sebuah graf yang terdiri dari satu lingkaran disebut graf sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan Cn. Pada gambar 2.12 dapat dilihat graf lingkaran C 3, C4 dan C5.



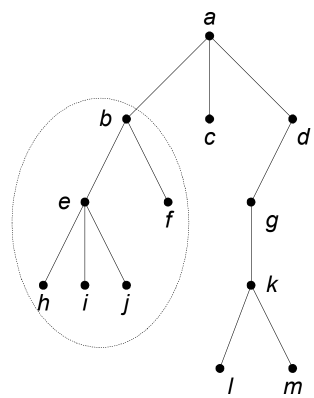
Gambar 2.11

Graf sikel Graf G dikatakan bipartit jika himpunan titik-titik V(G) dapat dipisah menjadi dua himpunan V1(G) dan V2(G). Jika setiap pasang titik di V1 dan V2 saling terhubung maka graf tersebut dinamakan graf komplit bipartit. Jika |V1| = m dan |V2| =n, graf komplit bipartit dinotasikan Km,n. Graf star adalah graf komplit bipartit K1,n atau Kn,1. Untuk pembahasan selanjutnya graf star K1,natau Kn,1 akan dinotasikan dengan Sm , dimana m = n + 1 Contoh graf komplit bipartit K2,3



Gambar 2.12 Graf Komplit Bipartit

Sebuah pohon (tree) T adalah graf terhubung yang tidak memuat sikel (cycle). Sebagai contoh, pada gambar 2.13.



Gambar 2.13

Pembahasan

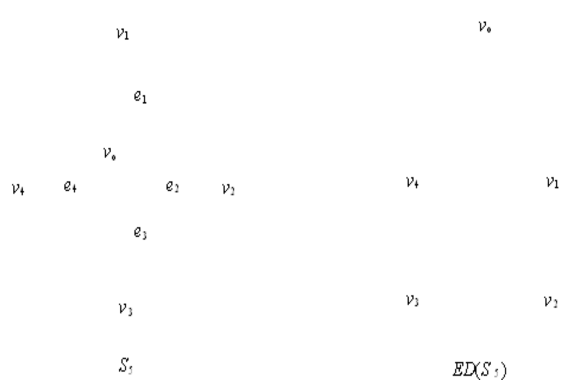
Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit

Eksentrik Digraf dari Graf Star. Misal graf star Sm mempunyai himpunan titik V(Sm) = {vo, v1, v2,…, vm-1} dimana vo adalah titik central dan v1, v2,…, vm-1 adalah titik daun, dan himpunan sisi E(Sm) = {e1, e2, …, em-1} dimana sisi ei= vovi untuk setiap i = 1, 2, 3,…, m-1.
Sifat 3.1 Eksentrisitas titik vi pada graf star Sm adalah sebagai berikut1 untuk i = 0 ec(vi) =2 untuk i = 1, 2, 3, …, m-1. Dari definisi graf star, dimana vo adalah titik central dan vi untuk setiap i = 1, 2, 3, …,m-1 adalah titik daun, maka dapat diketahui jarak terjauh maksimal lintasan terpendek) dari titik central adalah semua titik daun, yaitu dengan arak . Jadi eksentrisitas titik ec(vo) = 1. Demikian juga eksentrisitas dari titik daun adalah titik
daun lainnya, yaitu dengan jarak 2. Jadi eksentrisitas titik ec(vi) = 2. Akibat 3.1 Titik ksentrik pada graf star Sm adalah sebagai berikut vj untuk i = 0 titik eksentrik dari vi= j= 1, , 3, …, m-1 vj untuk i, j = 1, 2, 3, …, m-1 i ≠j. Dari sifat 3.1, eksentrisitas dari titik central vo adalah 1, maka titik eksentriknya adalah semua titik daun vj untuk setiap j = 1, 2, 3, …, m-1. Demikian

juga eksentrisitas dari titik daun vi adalah 2 untuk setiap i = 1, 2, 3, …, m-1 maka titik eksentriknya adalah semua titik daun vj untuk setiap j = 1, 2, 3, …, m-1 dengan i ≠j. Dari eksentrisitas titik ec(v i) dan titik eksentrik pada graf star Sm, selanjutnya kita mempunyai sifat berikut: Sifat 3.2 Eksentrik digraf dari graf star ED(Sm) adalah digraf dengan himpunan titik V(ED(Sm)) = {vo, v1, v2,…, vm-1} dan himpunan arcvovjuntuk j = 1, 2, , …, m-1 A(ED(Sm)) =vivj untuk i, j = 1, 2, 3, …, m-1i ≠j.

Dari akibat 3.1, titik eksentrik dari titik central vo adalah titik daun vjuntuk setiap j =1, 2, , m-1, sehingga ada arc dari vo ke vj yaitu vovj. Demikian juga untuk titik daun v iuntuk setiap i = 1, 2, …, m-1 titik eksentriknya adalah titik daun vjuntuk setiap j =1, 2, …, m-1 dengan i ≠j, sehingga ada arc dari vi ke vj yaitu vivj. Dari sifat 3.2 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf star ED(Sm) adalah graf komplit Km dimana arc dari titik central adjacent keluar ke semua titik daun dan arc dari setiap titik daun adjcent keluar ke setiap titik daun lainnya dengan jumlah arc
|A(Km)| = |A(ED(Sm))|= (m-1)2.

Contoh eksentrik digraf dari graf star Sm diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Graf S5 dan eksentrik digrafnya.

Eksentrik Digraf dari Graf Double Star. Graf double star Sn,m adalah graf yang terdiri dari dua graf star Sn dan Sm, dimana kedua titik centralnya saling bertetangga. Misal graf double star Sn,m mempunyai himpunan titik
V(Sn,m) =
V1= {v1, v2, …, vn}
V2= {vn+1, vn+2, …, vn+m}
dimana : v1 adalah titik central di V1, v2, v3, …, vn adalah titik daun di V1, vn+1 adalahtitik central di V2 dan vn+2, vn+3, …, vn+m adalah titik daun di V2, dan himpunan sisi
E(Sn,m) =
E1= {e0} dimana e0= v1vn+1
E2= {e1, e2, …, en-1} dimana ei= v1vi+1 untuk i = 1, 2, …, n-1
E3= {en, en+1, …, en+m-2} dimana en-1+i=vn+1vn+1+iuntuk i = 1, 2, …, m-1.

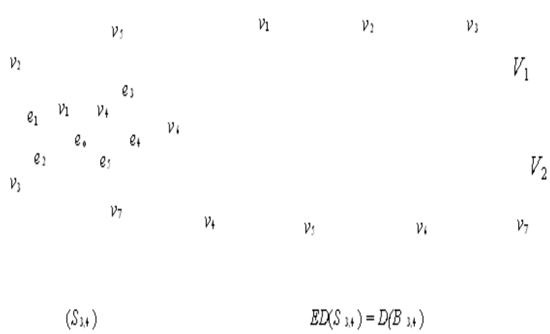
Sifat 3.3 Eksentrisitas titik vi pada graf double star Sn,m adalah sebagai berikut 2 untuk i = , n + 1 ec(vi) =3 untuk i = 2, 3, …, n, n + 2, …, n + m Dari definisi graf double star Sn,m, dimana v1 dan vn+1 adalah titik central dan vi untuk setiap i = 2, 3, …, n, n+2, …, n+m adalah titik daun, maka jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik central v1 di V1 adalah semua titik daun di V2 dan jarak terjauh dari titik central vn+1 di V2 adalah semua titik daun di V1 yaitu dengan jarak 2. Jadi eksentrisitas titik ec(v1) = ec(vn+1) = 2. Demikian juga jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik daun di V1 adalah semua titik daun di V2 dan jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) titik daun di V2 adalah semua titik daun di V1 yaitu dengan jarak 3. Jadi eksentrisitas titik ec(v2) = ec(v3) = … = ec(vn) = ec(vn+2) =ec(vn+3) =… = ec(vn+m) = 3.

Akibat 3.2 Titik eksentrik pada graf double star Sn,m adalah sebagai berikut: vj untuk i = 1
j = n + 2, n + 3, …, n + m vj untuk i = n + 1, titik eksentrik dari vi=j = 2, 3, …, n vj untuk i = 2, 3, …, n j = n + 2, n + 3, …, n + mvj untuk i = n + 2, n + 3, …, n + mj = 2, 3, …, n. Dari sifat 3.3, eksentrisitas dari titik central v1 di V1 adalah 2, maka titik eksentriknya adalah titik daun vj untuk setiap j = n+2, n+3, …, n+m di V2 dan eksentrisitas dari titik central vn+1 di V2 adalah 2, maka titik eksentriknya adalah titik daun vj untuk setiap j = 2, 3, …, n di V1 . Demikian juga eksentrisitas dari titik daun vi untuk setiap i = 2, 3, …, n di V1 adalah 3 sehingga titik eksentriknya adalah titik daun vj untuk setiap j = n+2, n+3, …, n+m di V2 dan eksentrisitas dari titik daun vi untuk setiap i =n+2, n+3, …, n+m di V2 adalah 3 sehingga titik eksentriknya adalah titik daun vj untuk setiap j = 2, 3, …, n di V1. Eksentrisitas titik ec(vi) dan titik eksentrik dari graf double star kita peroleh, maka kita mempunyai:

Sifat 3.4 Eksentrik digraf dari graf double star ED(Sn,m) adalah digraf dengan himpunan titik V(ED(Sn,m)) = {v1, v2, v3, …, vn, vn+1, vn+2, …, vn+m} dan himpunan arcv1vjuntuk j = n + ,

+ 3, …, n + mvn+1vj untuk j = 2, 3, …, nA(ED(Sn,m)) =vivj untuk i = 2, 3, …, n j = n + 2, n + 3, …, n + mvivj untuk i = n + 2, n + 3, …, n + m j = 2, 3, …, n Dari akibat 3.2, dimana titik eksentrik dari titik central v1 di V 1 adalah titik daun vjuntuk setiap j = n+2, n+3, …, n+m di V2, sehingga ada arc dari v1 ke vj yaitu v1vj dan titik eksentrik dari titik central vn+1 di V2 adalah titik daun vj untuk setiap j = 2, 3, …,n di V1, sehingga ada arc dari vn+1 ke vj yaitu vn+1 vj . Demikian juga titik eksentrik dari titik daun vi untuk setiap i = 2, 3, …, n di V1 adalah titik daun vj untuk setiap j = n+2, n+3, …, n+m di V2 , sehingga ada arc dari vi ke vj yaitu vi vj dan titik eksentrik dari titik daun vi untuk setiap i = n+2, n+3, …, n+m di V2 adalah titik daun vj untuk setiap j = 2, 3, …, n di V1, sehingga ada arc dari vi ke vj yaitu vi vj. Dari sifat 3.4 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf double star ED(Sn,m) adalah digraf bipartit D(Bn,m) yang mempunyai dua himpunan titik yaitu V1(Bn) dan V2(Bm), dengan V1(Bn) = {v1, v2, …, vn}dan V2(Bm) = {vn+1, vn+2, …, vn+m}, dimanaarc dari titik central v1 di V1 adjacent keluar ke titik daun di V2 dan arc dari titik central vn+1 di V2 adjacent keluar ke titik daun di V1, demikian juga arc dari titik daun V1 adjacent keluar ke titik daun di V2 dan arc dari titik daun V2 adjacent keluar ke titik daun di V1 dengan jumlah arc
|A(ED(Sn,m))|= [(n – 1)m + (m – 1)n].

Contoh, eksentrik digraf dari graf double star Sn,m diberikan pada Gambar 3.2.



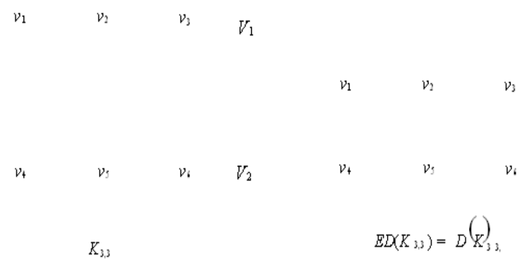
Gambar 3.2 Graf S3,4 dan eksentrik digrafnya

ED(S3,4) = D(B3,4)(S3,4)
Eksentrik Digraf dari Graf Komplit Bipartit.
Misal graf komplit bipartit Km,n mempunyai himpunan titik
V(Km,n) =
V1= {v1, v2, …, vm}
V2= {vm+1, vm+2, …, vm+n}dan himpunan sisi E(Km,n) = {e11, e21, …,en1, e12, …, en2, … ,enm} dimana eij= vjvm+I untuk setiap i = 1, 2, 3, …, n dan j = 1, 2, 3, …, m.

Sifat 3.5 Eksentrisitas titik vi pada graf komplit bipartit Km,n adalah sebagai berikut: ec(vi) = 2 untuk setiap i = 1, 2, 3, …, m+n Dari definisi graf komplit bipartit, jarak terjauh maksimal lintasan terpendek) dari vi untuk setiap i = 1, 2, …, m di V1 adalah semua titik di V1 kecuali dirinya sendiri, demikian juga jarak terjauh dari vi untuk setiap i = m+1, m+2, ,m+n di V2 adalah semua titik di V2 kecuali dirinya sendiri, yaitu dengan jarak 2. Jadi ec(vi) = 2 untuk setiap i = 1, 2, …, m+n. Akibat 3.3 Titik eksentrik pada graf komplit bipartit Km,n adalah sebagai berikut : titik eksentrik di V1 dari vi= vjuntuk i, j = 1, 2, …, mj ≠i,titik eksentrik di V2 dari vi = vj untuk i, j = m+1, m+2, …, m+n j ≠i. Dari sifat 3.5, titik eksentrik dari vi di V1 untuk setiap i = 1, 2, …, m adalah vj di V1 untuk setiap j = 1, 2, …, m dan j ≠i dan titik eksentrik dari vi di V2 untuk i = m+1, m+2, …, m+n adalah vj di V2 untuk j = m+1, m+2, …, m+n dan j ≠i.

Sifat 3.6 Eksentrik digraf dari graf komplit bipartit ED(Km,n) adalah digraf dengan himpunan titik V(ED(Km,n)) = {v1, v2, v3,…, vm+n} dan himpunan arcvivjuntuk i, j = 1, 2, … ,m
A(ED(Km,n))=j ≠ivivj untuk i, j = m+1, m+2, … , m+n j ≠i

Dari akibat 3.3, titik eksentrik dari vi di V1 untuk setiap i = 1, 2, …, m adalah vj di V1 untuk setiap j = 1, 2, …, m dengan j ≠i, sehingga ada arc dari vi ke vj yaitu vi vj dan titik eksentrik dari vi di V2 untuk setiap i = m+1, m+2, …, m+n adalah vj di V2 untuk setiap j = m+1, m+2, …, m+n dengan j ≠i, sehingga ada arc dari titik vi ke vj yaitu vi vj. Dari sifat .6 dapat disimpulkan bahwa eksentrik digraf dari graf komplit bipartit ED(Km,n) adalah igraf komplemen Km,n=_nmKD, dengan himpunan titiknmKDV,= V(Km,n) dimana arc dari V1 adjacent keluar ke semua titik di V1 demikian juga di V2 dengan jumlah arc|A(ED(Km,n))|= [(m2+ n2) – (m + n)]. Contoh, graf komplit bipartit Km,ndan eksentrik digrafnya diberikan pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Graf komplit bipartit K3,3 dan eksentrik igrafnya

Pelabelan Konsekutif Pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit

Pelabelan konsekutif pada graf $G(n, m)$ adalah pemetaan bijektif dari ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\}$. Dalam hal ini, label sisi $e = uv$ merupakan harga mutlak dari selisih label dua titik yang dihubungkan oleh sisi e yaitu sebuah graf dikatakan *konsekutif* jika graf tersebut dapat dilabeli secara konsekutif. Dalam paper (Wulandari dan Wijaya, 2002) telah dihasilkan bahwa graf lintasan, graf star dan graf katerpilar adalah konsekutif. Kita akan membahas pelabelan konsekutif pada kelas graf yang lain, yaitu graf sikel dan graf bipartit komplit. Pada bagian akhir, akan diberikan contoh graf yang tidak konsekutif, yaitu graf komplit $K4$.

Pelabelan Konsekutif pada Graf Sikel

Graf *sikel Cn* adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Misal graf sikel Cn mempunyai himpunan titik

$V(Cn) = \{v1, v2, \ldots, vn\}$

dan himpunan sisi

$E(Cn) = \{e1, e2, \ldots, en\}$

dimana $ei = vi\ vi+1 \pmod n$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$.

Untuk mengkonstruksi pelabelan konsekutif pada graf sikel, akan dibedakan menjadi dua yaitu pada graf sikel genap dan graf sikel ganjil, yang disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 1 Graf sikel Cn adalah konsekutif untuk n ganjil.

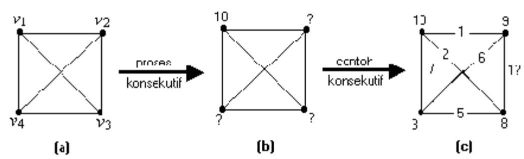
Bukti : Definisikan label untuk titik-titik dari graf Cn sebagai berikut: Setelah label titiknya diperoleh, pelabelan sisi-sisinya akan berpola sebagai berikut: Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa label titik dan sisi ini memenuhi pemetaan bijektif dengan himpunan label $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Jadi graf sikel Cn dengan n ganjil merupakan graf konsekutif. Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan konsekutif pada beberapa graf sikel ganjil berdasarkan Teorema 1.

Teorema 2 Graf sikel Cn adalah konsekutif untuk n genap. Bukti: Definisikan label untuk titik-titik dari graf Cn sebagai berikut: Gambar 2. Pelabelan konsekutif pada beberapa graf sikel ganjil Setelah label titiknya diperoleh, pelabelan sisi-sisinya akan berpola sebagai berikut: Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa label titik dan sisi ini memenuhi pemetaan bijektif dengan himpunan label $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Jadi graf sikel Cn dengan n genap merupakan graf konsekutif. Pada Gambar 3 diberikan contoh pelabelan konsekutif pada beberapa graf sikel genap berdasarkan Teorema 2. Gambar 3. Pelabelan konsekutif pada beberapa graf sikel genap Pelabelan Konsekutif pada Graf Bipartit Komplit Graf G dikatakan *bipartit* jika himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan $V1(G)$ dan $V2(G)$, sedemikian hingga setiap sisi di G menghubungkan titik di $V1$ dan titik di $V2$. Jika setiap titik di $V1$ dan $V2$ saling bertetangga maka G disebut *graf bipartit komplit*, dan dinotasikan dengan Kp,q dimana $p=|V1|$ dan $q=|V2|$. Dengan demikian graf bipartit komplit mempunyai titik dan sisi. Jadi himpunan label untuk graf bipartit komplit adalah .

Berikut ini diberikan perumusan pelabelan konsekutif dari graf bipartit komplit Kp,q. Teorema 3 Graf bipartit komplit Kp,q adalah konsekutif untuk setiap p dan q. Bukti: Tanpa mengurangi bukti secara umum, kita asumsikan bahwa . Definisikan label titik dari himpunan $V1$ dan $V2$ sebagai berikut: dan Label untuk sisinya adalah mutlak dari selisih label titik di $V1$ dan $V2$, yaitu: Karena label titik dan sisinya, semuanya berbeda dengan himpunan label , maka pelabelan ini memenuhi sifat bijektif. Jadi graf bipartit komplit Kp,q adalah konsekutif untuk setiap p dan q. Sebagai contoh, pelabelan konsekutif pada beberapa graf bipartit komplit berdasarkan Teorema 3 diberikan pada Gambar 4. Gambar 4. Pelabelan konsekutif pada graf K2,3 dan K3,3 Selanjutnya, kita akan memberikan pelabelan konsekutif pada kelas khusus dari graf bipartite komplit, yaitu graf star $K1,q$, yang pelabelannya berbeda dengan pelabelan pada paper [Wulandari dan Wijaya, 2002]. Misalkan graf star $K1,q$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi Untuk selanjutnya titik yang berderajat q dari graf star $K1,q$ yaitu titil $v0$ akan disebut sebagai *titik pusat*, sedangkan titik-titik lainnya, yaitu titik-

titik yang berderajat satu akan disebut sebagai *titik daun*. Karena graf star $K1,q$ mempunyai buah titik dan q buah sisi maka himpunan label dari graf star $K1,q$ adalah Teorema 4 Graf $K1,q$ adalah konsekutif untuk setiap q. Bukti: Ada beberapa cara untuk melabeli graf star $K1,q$ sehingga bersifat konsekutif.

Dengan mudah dapat diverifikasi bahwa pendefinisian dari pelabelan di atas bersifat bijektif. Jadi graf star $K1,q$ adalah graf konsekutif untuk setiap q. Contoh pelabelan konsekutif pada graf star $K1,7$ berdasarkan Teorema 4 dengan pelabelan cara 1, 2 dan 3 diberikan pada Gambar 5. Teorema berikut ini, merupakan banyaknya cara pelabelan yang berbeda jika graf star $K1,q$ dilabeli menurut pelabelan cara 1 dan 2 pada pembuktian Teorema 4. Gambar 5. Pelabelan konsekutif pada graf K1,7 dengan pelabelan cara 1 (gambar a), cara 2 (gambar b) dan cara 3 (gambar c) Teorema 5 Jika titik pusat dari graf star $K1,q$ mempunyai label , maka ada pelabelan konsekutif yang berbeda dari graf star $K1,q$. Bukti: Misal. Himpunan label dari graf star $K1,q$ adalah . Dengan demikian titik pusat dari graf star $K1,q$ mempunyai label yang terbesar. Jadi ada $2q$ label yang akan kita pilih sebagai label titik daun (sebanyak q label) dan label sisi (juga sebanyak q label). Karena pelabelan yang kita buat merupakan pemetaan bijektif yang bersifat konsekutif, maka kita dapat memilih q label terkecil atau q label terbesar dari $2q$ label yang ada, sebagai himpunan label dari titik daun vi, yaitu atau untuk setiap . Dengan kata lain, atau untuk setiap . Jika , maka label dari sisi adalah untuk setiap . Dan jika , maka label dari sisi adalah untuk setiap . Karena titik pusat dari graf star $K1,q$ mempunyai label terbesar, maka kita dapat menukar label titik vi dan label sisi ei untuk setiap , yaitu jika maka . Karena ada sebanyak q titik daun dari graf star $K1,q$, maka banyaknya pelabelan konsekutif dari graf star $K1,q$ adalah. Graf Yang Tidak Konsekutif Untuk menunjukkan suatu graf tidak konsekutif, berarti kita harus menunjukkan bahwa tidak mungkin membuat suatu pemetaan bijektif yang bersifat konsekutif dari ke himpunan bilangan bulat . Artinya, kita harus mencoba setiap kemungkinan dari pemetaan yang bisa dibuat. Tentunya ini lebih sulit daripada menunjukkan graf yang konsekutif, apalagi jika n dan m nya besar. Salah satu contoh graf yang tidak konsekutif adalah graf komplit $K4$, yaitu graf dengan 4 titik yang setiap titiknya bertetangga. Jadi graf $K4$ mempunyai 6 buah sisi. Misal himpunan titik dan sisi dari graf $K4$ adalah dan secara berturut-turut (lihat Gambar 6 (a)). Kita akan memberi label titik dan sisi dari graf $K4$ dengan himpunan label . Jelas bahwa bilangan 10 tidak bisa menjadi label sisi dari $K4$, karena tidak ada titik vi, vj di $K4$ sehingga untuk setiap . Jadi 10 adalah label untuk salah satu titiknya, misal $v1$ yaitu . Untuk menentukan label titik yang lain, perhatikan Gambar 6 (b), harus dipenuhi syarat , dan dengan label semuanya berbeda. Jika (x, y) menyatakan pasangan label sisi dan titik secara berturut-turut, maka pasangan label yang mungkin adalah dan . Jadi ada 4 pasang label yang akan dipilih sebanyak 3 pasang. Jadi ada 4 kemungkinan, dimana dari setiap kemungkinan, yaitu 3 pasangan label yang dipilih, setiap pasangan label mempunyai 2 kemungkinan untuk menjadi label titik dan sisi. Sehingga ada 23 memungkinan dari setiap 3 pasangan label yang dipilih. Jadi total kemungkinan yang harus kita cek ada kemungkinan. Sebagai contoh, misal 3 pasangan label yang dipilih adalah dan , dengan 9, 8 dan 3 adalah label titik $v2$, $v3$ dan $v4$ secara sebarang. Maka kita dapatkan salah satu label sisinya adalah , padahal 1 sudah menjadi label sisi yang menghubungkan $v1$ dengan titik yang mempunyai label 9, Gambar 6 (c). Dengan demikian 3 pasangan label ini tidak memenuhi syarat pemetaan injektif. Sehingga 3 pasangan label ini tidak dapat menjadi label titik dan sisi yang dimaksud. Dapat dievaluasi dengan mudah bahwa ke-31 kemungkinan yang lain juga tidak memenuhi syarat pemetaan injektif. Jadi graf $K4$ tidak dapat diberi label secara konsekutif. Dengan kata lain, graf $K4$ bukan graf konsekutif.



Gambar 6. Graf k, dan proses pelabelan konsekutifnya

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai eksentrik digraf dari graf star, graf double star dan graf komplit bipartit adalah sebagai berikut:
1. Eksentrik digraf dari graf star ED(Sm) adalah graf komplit Km, dimana arc dari titik central

adjacent keluar ke titik daun dan arc dari titik daun adjcent keluar ketitik daun lainnya dengan jumlah arc |A(Km)|= |A(ED(Sm))|= (m-1)2.2. Eksentrik digraf ari graf double star ED(Sn,m) adalah digraf bipartit D(Bn,m), dengan himpunan titik V1(Bm) v1, v2, …, vn}dan V2(Bm) = {vn+1, vn+2, …, vn+m}, dimana arc dari titik central v1 di V1 adjacent keluar ke titik daun di V2 , arc dari titik central vn+1 di V2 adjacent keluar ke titik daun di V1 , arc dari titik daun V1v1v2v3v4v5v6ED(K3,3) = 3,3KDv1v2v3v5v6v4K3,3V1V2 adjacent keluar ke titik daun di V2 dan arc dari titik daun V2 adjacent keluar ke titik daun di V1 dengan jumlah arc
|A(ED(Sn,m))|= [(n – 1)m + (m – 1)n].

Eksentrik digraf dari graf komplit bipartit ED(Km,n) adalah digraf komplemennmKD,, dengan himpunan titik nmKDV,= V(Km,n), dimana arc dari V1 adjacent keluar ke semua titik di V1 dan arc dari V2 adjacent keluar ke semua titik di V2 dengan jumlah arc
|A(ED(Km,n))|= [(m2+ n2) – (m + n)].

.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa graf sikel yang dibedakan menjadi graf sikel genap dan graf sikel ganjil merupakan graf konsekutif. Demikian juga untuk graf bipartit komplit, juga merupakan graf konsekutif. Sedangkan graf komplit dengan 4 titik, bukanlah graf konsekutif. Masih terbuka bagi penulis lain, untuk menginvestigasi pelabelan konsekutif pada kelas graf yang lain, seperti graf tangga, graf tak terhubung dan graf berarah

Daftar Pustaka

[1] Munir, Rinaldi. (2004). Bahan Kuliah IF5054 Kombinatorial. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[2] Chatrand G. and Lesniak L, 1996, Graphs & Digraphs, 3rd edition, Chapman and Hall.

[3] Aplikasi graf (2002). http://www.unej.ac.id/. Tanggal akses : 2 januar 07, pukul16:53.

[4] Buckley, F.---, The Eccentric Digraph of a Graph, preprint