

STUDI DAN IMPLEMENTASI COLOURING GRAF DENGAN FOUR COLOUR THEOREM DALAM PETA

Anggi Alisia Putri – NIM : 13505096

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if15096@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Aplikasi dan penerapan graf sangatlah banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Pewarnaan pada peta adalah salah satu diantaranya. Pemecahan masalah pewarnaan pada peta ini tidak terjadi secara instan. Namun, mengalami sedikit demi sedikit pengembangan seperti halnya evolusi. Pada awalnya, untuk mewarnai sebuah graf terhubung yang kompleks sekalipun diperlukan 6 jenis warna.

Namun, seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, akhirnya dibuktikan bahwa untuk mewarnai graf yang kompleks hanya dibutuhkan 4 jenis warna jika graf itu planar. Hal ini sudah mendapatkan berbagai pembuktian dari beberapa ahli matematika, baik itu pembuktian yang mendukung teorema atau pembuktian yang bertentangan.

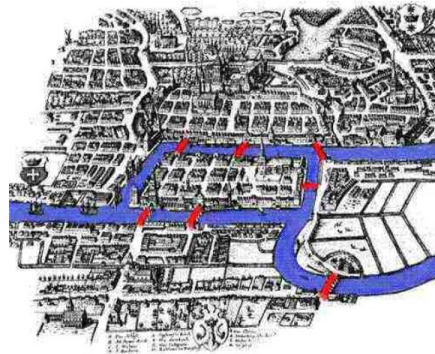
Namun pada kenyataannya, kesalahan pembuktian yang bertentangan merupakan kesalahan untuk menarik kesimpulan dari teorema 4-warna, seperti penggunaan wilayah yang memiliki beberapa subwilayah lain yang tidak saling terhubung, atau memperbolehkan adanya wilayah-wilayah dengan warna yang sama walaupun hanya saling bersentuhan dalam suatu sudut.

Namun, teorema 4-warna tersebut tidak bisa langsung diimplementasikan pada pewarnaan peta dunia yang sesungguhnya. Pada salah satu ilmu perpetaan dikatakan bahwa negara-negara diberi warna berbeda untuk memudahkan proses penglihatan (*recognition*) sehingga pewarnaan negara-negara pada peta dunia tidak bisa dilakukan hanya dengan 4 jenis warna. Penyebab lain juga dikarenakan terdapat negara-negara yang mempunyai wilayah yang terpisah dan dibatasi oleh negara lain (*un-contiguous region*).

Kata kunci: graf planar, *chromatic number*, *four color theorem*, *graph colouring*, *chromatic polinomial*, *contiguous regions*.

1. Pendahuluan

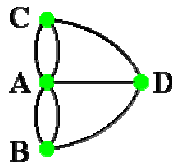
Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf. Königsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang) dimana terdapat Sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Rusia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi empat daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai, seperti tampak pada gambar berikut ini :



Gambar 1 Jembatan Königsberg

Pada abad kedelapan belas, dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan

tersebut.. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsbred biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler, Ahli Matematika dari Swiss yang menemukan salah satu cabang dari Matematika yang saat ini dikenal sebagai "Teori Graf". Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam sebuah graf dengan keempat daratan sebagai empat simpul (node) dan ketujuh jembatan sebagai empat sisi (edge). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada gambar di bawah :

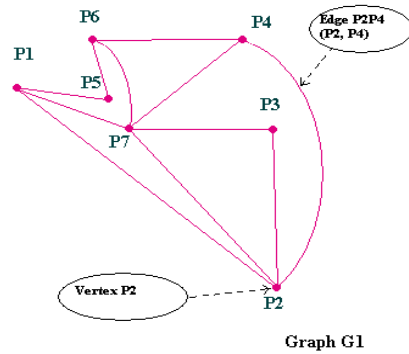


Gambar 2 graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg

Teori Graf kini merupakan suatu materi utama dalam riset yang berhubungan dengan matematika, teknik elektro, *computer programming* dan *networking*, administrasi bisnis, sosiologi, ekonomi, marketing, dan komunikasi, dan masih banyak cabang lainnya. Umumnya, banyak permasalahan yang dapat dimodelkan dengan bentuk graf. Sebagai contoh, permasalahan untuk merencanakan rute yang efektif untuk pengiriman surat, pembuangan sampah, pembersihan salju, diagnosa dalam jaringan komputer, dan lainnya, dapat dipecahkan dengan model yang menggunakan representasi jalur dalam graf.

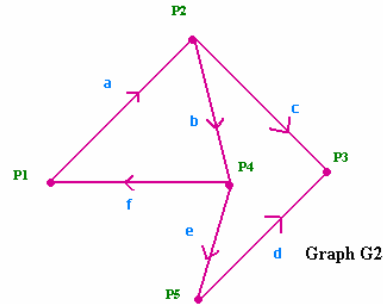
2. Konsep Dasar dari Teori Graf

Suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut simpul (atau *node*) yang terhubung oleh *edge-edge* (atau *arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan *edge*).



Gambar 3 Contoh sisi dan simpul graf

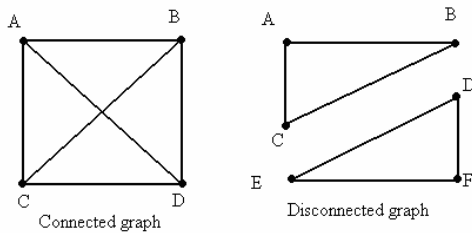
Suatu graf dikatakan graf berarah (*directed graf*) atau *digraf* jika sisi-sisinya berarah (yang berarti sisi-sisinya memiliki arah yang spesifik). Suatu *jalur* yang menghubungkan dua simpul X dan Y dari sebuah digraf adalah rangkaian dari simpul dan sisi yang berarah. Sebuah jalur yang berawal dan berakhir di satu node P disebut *loop* di P. Contoh, dalam digraf dibawah :



Gambar 4 Graf berarah

Ada lebih dari satu jalur dari P_1 ke P_3 . Salah satunya terdiri dari tiga simpul, yaitu $P_1 P_2 P_3$, jalur yang lain dari P_1 ke P_3 melalui lima simpul, $P_1 P_2 P_4 P_5 P_3$.

Suatu graf dikatakan terhubung jika terdapat suatu jalur yang menghubungkan dua simpul. Dan dikatakan tidak terhubung jika sebaliknya.



Gambar 5 Graf terhubung dan Graf tidak terhubung

Dalam suatu graf G , jika ada suatu jalur yang terdiri dari n sisi yang menghubungkan dua simpul P_i dan P_j , maka dikatakan bahwa ada suatu n -walks yang menghubungkan P_i ke P_j . Sebagai contoh, ada tiga jalur 2-walks yang berbeda antara simpul P_2 dan P_7 pada graf G_1 di atas.

Beberapa terminologi lain yang berhubungan dengan teori graf (Graf 2) :

- *Degree* atau derajat dari suatu simpul, adalah jumlah sisi yang dimulai atau berakhir pada node tersebut. Node P_4 berderajat 3. Node P_1 berderajat 2.
- *Graf Berbobot* merupakan salah satu ekstensi graf yang sisinya memiliki bobot.
- *Path* atau lintasan adalah suatu jalur yang ada pada graf, misalnya antara P_1 dan P_6 ada path $a \rightarrow b \rightarrow e$
- *Cycle* (siklus) adalah jalur yang kembali melalui titik asal P_1 $a \rightarrow b \rightarrow f$ kembali ke P_1 .
- *Tree* atau pohon merupakan salah satu jenis graf yang tidak mengandung cycle. Jika edge d dan a dalam digraf diatas dihilangkan, digraf tersebut menjadi sebuah tree. Jumlah edge dalam suatu tree adalah $nV - 1$. Dimana nV adalah jumlah simpul

3. Pewarnaan Graf

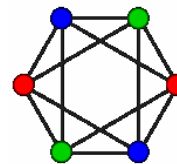
Di dalam teori graf, pewarnaan grafik adalah suatu pewarnaan (merah, biru dan seterusnya). Selain itu, bilangan bulat berurutan yang dimulai dari 1 dapat digunakan dengan tidak menghilangkan keadaan awal), ke objek tertentu dalam suatu graf. Objek dapat berupa simpul, sisi, wilayah, atau campuran dari ketiga objek.

Pewarnaan simpul adalah submateri yang paling utama. Submateri ini merupakan titik awal dari keseluruhan materi. Selain itu, permasalahan pewarnaan yang lain dapat diubah ke dalam bentuk versi pewarnaan simpul. Sebagai contoh, suatu pewarnaan sisi graf dapat direpresentasikan dengan memberikan warna pada garisnya (sisi graf). Demikian juga dengan suatu pewarnaan wilayah dari graf planar dapat direpresentasikan dengan pewarnaan pada (planar) dualnya.

Pewarnaan graf berbeda dengan pemberian label pada graf yang berhubungan dengan label yang kadang-kadang berbentuk angka-angka yang terdapat pada sisi atau simpul. Dalam permasalahan pewarnaan graf, warna (termasuk 1, 2, 3...) tak lain hanya penanda untuk menyatakan daerah yang bersinggungan. Tetapi, dalam permasalahan pelabelan graf, label (termasuk 1, 2, 3...) adalah nilai-nilai yang dapat dihitung yang harus memenuhi suatu kondisi kuantitatif tertentu yang masih dalam definisi label.

Pewarnaan graf diimplementasikan pada banyak aplikasi praktis seperti halnya dengan teorinya. Di samping jenis permasalahan klasik, batasan lain yang berbeda dapat direpresentasikan dengan graf. Submateri ini bahkan telah mencapai kepopulerannya di masyarakat umum dalam bentuk game teka-teki angka yaitu Sudoku. Pewarnaan graf masih menjadi suatu bidang riset yang aktif.

3.1 Pewarnaan Simpul



Gambar 6 Graf dengan pewarnaan simpul

Tiga warna dapat digunakan untuk mewarnai graf di atas. Semakin sedikit warna yang digunakan akan me-nyebabkan simpul yang bersebelahan memiliki warna yang sama.

Tanpa mengetahui definisi yang tepat, pewarnaan suatu grafik akan selalu diasumsikan dengan pewarnaan simpul, yaitu untuk mewarnai simpul dari suatu graf. Kemudian untuk kasus yang lain, suatu pewarnaan hampir selalu

diasumsikan dengan tidak memberi warna untuk dua simpul yang bersebelahan warna yang sama. Dalam hal ini, "bersebelahan" berarti terletak pada sisi yang sama. Suatu pewarnaan yang menggunakan paling banyak k warna disebut k -coloring dan setara dengan permasalahan dalam pembagian simpul-simpul ke dalam k atau lebih sedikit himpunan bebas. Permasalahan dalam pewarnaan suatu graf memiliki beberapa aplikasi seperti penjadwalan, alokasi memori oleh compiler, pembagian frekuensi Radio, dan *pattern-matching*.

3.2 Bilangan Kromatik

Jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf disebut *bilangan kromatik* (χ). Sebagai contoh, bilangan kromatik dari graf lengkap K_n dengan n simpul (sederhana yang setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lainnya), adalah $\chi(K_n) = n$. Sebuah graf yang bisa dikenai proses k -coloring disebut k -colorable, dan disebut k -chromatic jika bilangan kromatiknya adalah k .

Beberapa keterangan untuk $\chi(G)$:

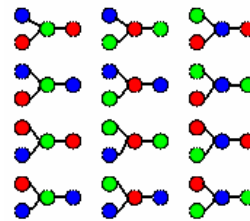
1. $\chi(G) = 1$ jika dan hanya jika G is benar-benar tidak terhubung (Graf kosong).
2. $\chi(G) = n$ untuk Graf lengkap K_n , sebab semua simpul saling terhubung.
3. $\chi(G) = 2$ untuk graf Bipartit (satu untuk simpul-simpul di himpunan V_1 dan satu untuk simpul-simpul di himpunan V_2), graf lingkaran dengan n genap, sembarang pohon.
4. $\chi(G) = 3$ untuk graf lingkaran dengan n ganjil.
5. $\chi(G) \geq 3$ jika dan hanya jika G merupakan graf bipartit.
6. $\chi(G) \geq \omega(G)$.
7. $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.
8. $\chi(G) \leq \Delta(G)$ kecuali jika G adalah sebuah graf lengkap atau sebuah *odd-cycle* (teori Brook).
9. $\chi(G) \leq 4$, untuk semua graf planar G . Teori ini lebih dikenal dengan nama *four-color theorem*, yang dinyatakan oleh *P.J.Heawood* pada 1890 (pertama kali ditulis oleh *Augustus De Morgan* pada 1852), tetapi tidak terbukti sampai pada tahun 1976, ketika teori ini kemudian dibuktikan oleh *Kenneth Apple* dan *Wolfgang Haken* dari

Di sini, $\Delta(G)$ adalah jumlah derajat maksimum dan $\omega(G)$ adalah *clique number*.

Graf tak-berhingga merupakan graf yang jumlah simpulnya, n , tidak berhingga banyaknya. Di bawah ini merupakan salah satu teori pewarnaan untuk graf tak-berhingga :

Jika semua upagraf (subgraph) dari graf tak-berhingga G adalah graf berhingga yang k -colorable, maka hal ini berlaku juga untuk graf G .

3.3 Chromatic Polynomial



Gambar 7 Graf yang diwarnai dengan 3-warna dan dalam 12 cara yang berbeda

Polinom kromatik menghitung banyaknya cara suatu graf dapat diwarnai dengan warna yang jumlahnya tidak lebih dari jumlah warna yang ditentukan. Sebagai contoh, dengan tiga warna, graf pada gambar di atas dapat diwarnai dengan 12 cara. Dengan hanya dua warna, graf itu tidak dapat diwarnai sama sekali. Dengan menggunakan empat warna, graf tersebut dapat diwarnai dalam $24 + 4 \times 12 = 72$ cara: dengan menggunakan empat warna, ada $4! = 24$ pewarnaan yang valid (tiap pewarnaan dengan empat warna untuk keempat simpul manapun merupakan suatu pewarnaan sesuai); dan untuk tiap-tiap pilihan untuk tiga dari empat warna, ada 12 cara yang valid untuk 3 warna. Jadi, untuk contoh graf di atas, sebuah tabel untuk jumlah pewarnaan yang valid akan tampak seperti di bawah :

Warna yang tersedia	1	2	3	4	...
Jumlah pewarnaan	0	0	12	72	...

Polinom kromatik adalah suatu fungsi $P(G,t)$ yang menghitung jumlah t -warna dari graf G .

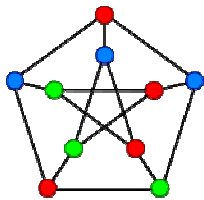
Tampak bahwa, untuk fungsi graf G yang diberikan adalah merupakan bentuk polinom dari t . Sebagai contoh diambil dari graf diatas dengan $t=4$, $P(G,t) = t(t-1)^2(t-2)$, maka $P(G,t) = 72$.

Polinom Kromatik setidaknya terdiri dari informasi tentang pewarnaan dari graf G seperti pada bilangan kromatik. Tentu saja, χ adalah bilangan bulat positif terkecil yang bukan merupakan akar dari polinom kromatik.

$$\chi(G) = \min\{k: P(G,k) > 0\}$$

Teori ini pertama kali digunakan oleh Birkhoff dan Lewis dalam serangannya terhadap *four-color theorem*. Tetapi saat ini teori meninggalkan masalah yang tidak terpecahkan untuk menandai graf yang memiliki polinom kromatik yang sama dan untuk menentukan dengan tepat apakah polinom-polinom tersebut kromatik.

Contoh :



Gambar 8 Graf Petersen

Graf Petersen memiliki bilangan kromatik tiga.

Polinom kromatik untuk graf tertentu

Segitiga K_3	$t(t-1)(t-2)$
Graf lengkap K_n	$t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$
Pohon dengan n simpul	$t(t-1)^{n-1}$
Siklus (Cycle) C_n	$(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$
Graf Petersen	$t(t-1)(t-2)(t^7 - 12t^6 + 67t^5 - 230t^4 + 529t^3 - 814t^2 + 775t - 352)$

Keterangan

- $P(G,0) = 0$
- $P(G,1) = 0$ jika G terdiri dari sebuah simpul.
- $P(G,t) = 0$, jika $t < \chi(G)$.
- $P(G, - 1)$ adalah jumlah dari orientasi *acyclic* dari G

- Jika G memiliki n simpul, m sisi, dan k komponen G_1, G_2, \dots, G_k , maka
 - $P(G,t)$ berderajat n .
 - Koefisien dari t^n dalam $P(G,t)$ adalah 1.
 - Koefisien dari t^{n-1} dalam $P(G,t)$ adalah $-m$.
 - Koefisien dari t^0, t^1, \dots, t^{k-1} semuanya nol.
 - Koefisien dari t^k tidak nol.
 - $P(G,t) = P(G_1,t) P(G_2,t) \dots P(G_k,t)$ □
- Koefisien untuk setiap polinom kromatik berubah tanda.
- Sebuah graf G dengan n simpul merupakan sebuah pohon jika dan hanya jika $P(G,t) = t(t-1)^{n-1}$.
- Kesatuan dari hasil evaluasi, $P'(G,1)$ merupakan invarian dari kromatik $\theta(G)$ yang bergantung pada tanda.

3.3.1 Menghitung bentuk Polinom kromatik

Ketika suatu graf G berisi sebuah loop, menurut teorema, graf tersebut tidak dapat diwarnai sama sekali, sehingga

$$P(G,t) = 0.$$

Jika e bukan sebuah loop, maka polinom kromatik memenuhi suatu Recurrence relation.

$$P(G,t) = P(G - e,t) - P(G / e,t),$$

Untuk $G - e$ merupakan sebuah graf dengan sisinya yang berpindah, dan G / e merupakan graf dengan sisi *endpoints* yang berhubungan dengan simpul tunggal.

Dalam kedua ekspresi menunjukkan sebuah prosedur berulang (rekursif), yang disebut dengan algoritma *deletion-contraction*. Dalam tahap perulangan, suatu bentuk diubah menjadi dua bentuk yang minimal memiliki lebih sedikit satu sisi. Sehingga, waktu untuk menjalankan (*running time*) dapat direpresentasikan dengan sebuah faktor polinom 2^m , dimana m adalah jumlah sisi. Dan analisa dapat ditingkatkan menjadi 1.62^{n+m} .

Algoritma-algoritma lain memang banyak, tetapi semuanya bersifat eksponen untuk ukuran graf. Untuk beberapa jenis graf, algoritma waktu

polinomialnya diketahui, seperti pada graf kosong, graf lengkap, hutan, *chordal graphs*, *wheels*, dan *ladders*. Pada umumnya, penghitungan polinom kromatik merupakan *Sharp-P-complete*, jadi tidak mungkin bahwa algoritma waktu polinomial untuk semua graf akan ditemukan.

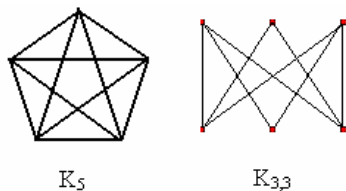
4. Graf Planar

Dalam teori graf, graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Sebuah graf non-planar tidak bisa digambarkan tanpa perpotongan sisi.

Sebuah graf planar yang telah digambar pada sebuah bidang disebut juga graf bidang (*plane graph*). Sebuah graf bidang dapat digambar sebagai graf planar dengan pemetaan dari tiap-tiap simpul ke suatu posisi dalam ruang dua dimensi, dan dari setiap sisi ke sebuah kurva bidang (*plane curve*), dimana masing-masing kurva memiliki dua titik ekstrim, yang bertepatan dengan posisi dari simpul terakhir, dan semua kurva terpisah kecuali pada titik ekstrimnya.

Kesamaan jenis dalam hal bentuk (topologi) yang padanannya digambar pada sebuah bidang disebut pemetaan planar (*planar map*). Walaupun graf bidang memiliki wilayah luar atau bidang yang tidak terbatas, tidak ada wilayah dari pemetaan planar yang memiliki keadaan khusus.

4.1. Teorema Kuratowski dan Wagner



Gambar 9 Graf Kuratowski

Seorang ahli matematika, Kazimierz Kuratowski, menerangkan penggolongan dari graf planar yang saat ini dikenal sebagai teorema Kuratowski :

Sebuah graf berhingga bersifat planar jika dan hanya jika graf tersebut bukan

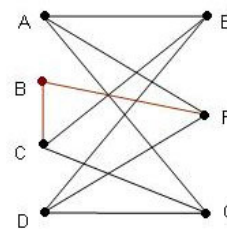
merupakan upagraf atau subgraf dari K_5 (graf lengkap yang memiliki 5 simpul) atau $K_{3,3}$ (graf bipartit lengkap yang mempunyai 6 simpul, 3 diantaranya terhubung pada masing-masing 3 simpul lainnya).

Upagraf atau *subdivision* dari graf dihasilkan dengan menyisipkan simpul ke dalam sisi (contoh, mengubah sebuah sisi $\bullet\text{---}\bullet$ menjadi $\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet$) dan mengulangi cara ini sebanyak nol kali atau lebih. Rumusan yang berpadanan dengan teorema ini, juga dikenal dengan "Teorema P" meliputi :

Sebuah graf berhingga dikatakan planar jika dan hanya jika graf tersebut tidak mengandung upagraf yang *homeomorfik* terhadap K_5 or $K_{3,3}$.

Dua graf dikatakan *Homeomorfik* jika salah satu dari kedua graf dapat dieproleh dari graf yang lain dengan cara menyisipkan dan/atau membuang secara berulang-ulang simpul berderajat dua.

Di Uni Soviet, teorema Kuratowski dikenal sebagai teorema Pontryagin-Kuratowski. Sebagai buktinya, menurut dugaan pertama kali ditemukan dalam catatan Pontryagin yang tidak dipublikasikan. Sejalannya waktu tradisi akademi, referensi tersebut tidak diperhitungkan sehingga nama Rusia dalam teorema itu tidaklah diakui secara internasional.



Gambar 10 Graf yang tidak memiliki upagraf dari K_5 atau $K_{3,3}$. Tetapi graf diatas memiliki upagraf yang homeomorfik dengan $K_{3,3}$.

Daripada mempertimbangkan tentang bagian graf, teorema Wagner lebih menekankan pada *minor* , dikatakan bahwa:

Sebuah graf berhingga merupakan graf planar jika dan hanya jika graf tersebut

tidak mempunyai K_5 or $K_{3,3}$ sebagai sebuah *minor*.

Wagner bertanya secara lebih umum lagi apakah graf jenis *minor-closed* manapun bisa ditentukan dengan sebuah set dari “*minor-minor terlarang*”. Kemudian muncullah teorema Robertson-Seymour yang pembuktiannya membutuhkan ratusan kertas untuk emnuliskannya. Teorema ini berbunyi :

K_5 dan $K_{3,3}$ merupakan minor-minor terlarang untuk suatu jenis graf berhingga.

4.2 Kriteria Lain Keplanaran

Dalam kenyataan, sangat susah untuk menggunakan teorema Kuratowski untuk menentukan secara cepat apakah graf yang diberikan planar atau tidak. Untuk mengatasinya, muncullah algoritma praktis untuk masalah ini : untuk graf dengan n simpul, sangat mungkin untuk menentukan dalam waktu $O(n)$ (*linear time*) apakah graf tersebut planar atau tidak.

Untuk sederhananya, graf planar dengan n simpul dan e sisi, sesuai dengan teorema-teorema dibawah ini :

Teorema 1.

Jika $n \geq 3$ maka $e \leq 3n - 6$

Teorema 2.

Jika $n > 3$ dan tidak ada siklus dengan panjang 3, maka $e \leq 2n - 4$

Dalam hal ini, graf-graf planar merupakan *sparse graphs*, yang hanya memiliki $O(n)$ sisi, secara asimtot pasti lebih kecil dari $O(n^2)$ maksimum. Graf $K_{3,3}$, sebagai contoh, memiliki 6 simpul, 9 sisi, dan tidak memiliki siklus dengan panjang 3. oleh karena itu, pada teorema 2, graf tersebut tidak mungkin berbentuk planar. Perhatikan bahwa teorema-teorema ini merupakan bentuk “jika”, bukan “jika dan hanya jika”, dan karena itu hanya bisa digunakan untuk membuktikan sebuah graf merupakan graf tak-planar, bukan untuk membuktikan bahwa sebuah graf bersifat planar. Jika kedua teorema 1 dan 2 gagal, maka harus menggunakan analisis metode lain.

Untuk dua buah graf planar dengan n simpul, dimungkinkan untuk menentukan (dalam waktu

$O(n)$) apakah dua graf tersebut isomorfik atau tidak dengan :

- *Whitney's planarity criterion* memberikan sebuah karakteristik yang berdasarkan keberadaan dual aljabar.
- *MacLane's planarity criterion* memberika sebuah karakteristik aljabar dari graf planar berhingga melalui ruang siklus.
- *Fraysseix-Rosenstiehl's planarity criterion* memberikan sebuah karakteristik berdasarkan atas keberadaan dari bipartisi dari kumpulan sisi pohon dari kedalaman pertama *search tree* yang merupakan pusat dari *left-right planarity testing algorithm*
- *Schnyder's theorem* memberikan sebuah karakteristik keplanaran dari definisi *partial order dimension*.
- *Colin de Verdière's planarity criterion* memberikan sebuah karakteristik yang berdasarkan kelipatan maksimum dari nilai eigen kedua dari operator Schrodinger tertentu yang direpresentasikan dengan graf.

4.2. Teorema Euler

Teorema Euler menyatakan bahwa jika sebuah graf planar terhubung yang berhingga digambar dalam sebuah bidang datar tanpa adanya perpotongan sisi, dan v adalah jumlah dari simpul, e adalah jumlah sisi, dan f adalah jumlah wilayah (daerah yang dibarasi sisi termasuk daerah terluar), maka

$$v - e + f = 2$$

Sebagai contoh, *Euler characteristic* adalah 2. untuk ilustrasi, pada graf planar pertama yang ditunjukkan di atas, kita mempunyai $v=6$, $e=7$, dan $f=3$. jika graf kedua digambar ulang tanpa perpotongan sisi, akan didapatkan $v=4$, $e=6$, dan $f=4$. Formula Euler dapat dibuktikan sebagai berikut : jika graf bukan merupakan bentuk pohon, maka hilangkan sebuah sisi yang melengkapi siklus. Proses ini mengurangi nilai satu nilai e dan satu nilai f , dengan tetap mempertahankan nilai $v - e + f$. Ulangi proses hingga didapatkan sebuah pohon yang mempunyai $v = e + 1$ dan $f = 1$, sehingga didapatkan bentuk $v - e + f = 2$.

Dalam sebuah graf planar berhingga, terhubung, sederhana, beberapa wilayah (kecuali wilayah terluar) dibatasi oleh paling sedikit tiga sisi dan tiap sisi menyinggung paling banyak dua wilayah; hanya dengan menggunakan teori Euler, dapat menunjukkan bahwa graf tersebut memenuhi $e \leq 3v - 6$ jika $v \geq 3$.

Sebuah graf sederhana disebut planar maksimum (*maximal planar*) jika berbentuk planar tetapi dengan adanya beberapa penambahan sisi akan menghancurkan keplanaran itu. Semua wilayah (termasuk wilayah terluar) yang kemudian dibatasi oleh tiga sisi, dapat menjelaskan teorema *triangular* untuk graf-graf ini. Jika sebuah graf triangular memiliki v simpul dengan $v > 2$, maka graf tersebut tepat memiliki $3v - 6$ sisi dan $2v - 4$ wilayah.

Perhatikan bahwa teorema Euler juga berlaku untuk bentuk *polihedra* sederhana. Dapat dikatakan: setiap polihedron sederhana dapat diubah menjadi graf planar, terhubung, dan sederhana dengan menggunakan simpul-simpul polihedron sebagai simpul dari graf dan sisi-sisi polihedron sebagai sisi dari graf. Wilayah yang dihasilkan dari graf planar yang terbentuk merupakan wilayah yang berkorespondensi dengan wilayah pada polihedron. Sebagai contoh, graf planar kedua yang ditunjukkan di atas berkorespondensi dengan bentuk tetrahedron. Tidak setiap graf planar, terhubung, dan sederhana merupakan bentukan dari polihedron sederhana, seperti pohon. Sebuah teorema dari *Ernst Steinitz* menyatakan bahwa graf planar yang dibentuk dari *convex polyhedra* (polihedra sederhana) merupakan bentuk graf planar berhingga yang tepat 3-terhubung (*3-connected*).

5. Teorema 4-warna

Teorema 4-warna (*four color theorem*), yang juga dikenal sebagai teorema pemetaan 4-warna (*four color map theorem*) menyatakan bahwa untuk setiap bidang yang terpisah dalam berbagai wilayah, seperti peta seluruh negara di dunia, wilayah-wilayahnya bisa diwarnai dengan menggunakan maksimum empat warna sedemikian sehingga tidak ada dua atau lebih wilayah berdekatan mempunyai warna yang sama. Dua wilayah dikatakan berdekatan jika yang saling bersentuhan adalah sisi keduanya, bukan hanya berupa titik. Sehingga, Utah (U.S. states) dan New Mexico tidak bisa dianggap

berdekatan walaupun keempat sudutnya saling bersentuhan. Dalam teorema ini, setiap wilayah harus berdekatan, dengan kata lain tidak ada wilayah yang terpisah seperti pada negara Angola, Azerbaijan, dan United States.

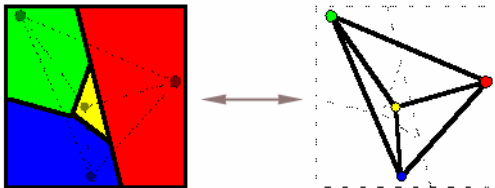


Gambar 11 Hasil pewarnaan dengan metode 4-warna

Dalam beberapa kasus, tidak jarang penggunaan tiga warna tidak mencukupi. Seperti pada peta yang memiliki satu wilayah yang dikelilingi oleh tiga wilayah lainnya (walaupun untuk mewarnai tiga wilayah yang mengelilingi cukup dengan tiga warna) dan juga tidak susah untuk membuktikan bahwa lima warna cukup untuk mewarnai peta tersebut.

Untuk menyatakan teorema di atas, akan lebih mudah jika diimplementasikan dalam teori graf. Sehingga, dapat dikatakan bahwa simpul-simpul dari tiap graf planar dapat diwarnai dengan maksimum empat warna sehingga tidak ada dua simpul bertetangga mempunyai warna yang sama. Atau lebih singkatnya “setiap graf planar adalah *4-colourable*”. Dalam hal ini, setiap wilayah dari peta direpresentasikan dengan simpul dari graf, dan dua simpul dihubungkan oleh sisi jika dan hanya jika kedua wilayah saling bersentuhan pada sisinya (bukan hanya pada sudut).

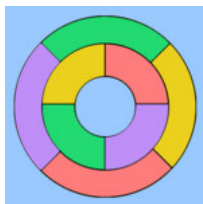
Gambar di bawah memperlihatkan sebuah peta dengan $n = 4$ wilayah dan bilangan jumlah warna yang dibutuhkan adalah $m = 4$ (misalkan merah, kuning, biru, hijau). Jadi graf G yang merepresentasikan peta tersebut memiliki $(G) = 4$ buah warna (merah, kuning, biru, hijau). Gambar graf planar di sebelah kanannya menyatakan graf yang mewakili peta.



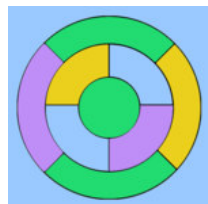
Gambar 12 Representasi peta ke dalam bentuk graf

5.1 Kesalahan Pembuktian Teorema

Seperti halnya pada masalah-masalah matematika lainnya, dalam sejarahnya, teorema 4-warna ini telah memunculkan banyak pembuktian yang tidak valid. Seperti pada pembuktian yang dilakukan oleh Kempe dan Tait yang bertahan dan dipercaya oleh masyarakat selama beberapa dekade sebelum teori mereka terbukti salah. Selain itu, banyak juga pembuktian yang dilakukan oleh para amatir yang tidak pernah dipublikasikan sama sekali.



Peta yang menggunakan lima warna



Dengan mengubah paling sedikit empat dari sepuluh wilayah, didapatkan pewarnaan dengan hanya empat warna

Gambar 13 Reduksi warna

Umumnya, prinsip dasar dari sanggahan-sanggahan yang paling sederhana terhadap teori ini mencoba untuk menciptakan sebuah wilayah yang menyentuh semua wilayah lainnya. Untuk membuktikan teorema 4-warna, maka hal ini mengharuskan untuk mewarnai wilayah lainnya

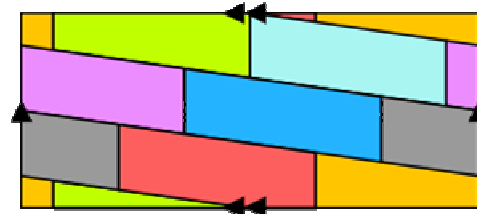
hanya dengan tiga warna. Karena teori 4-warna adalah benar, maka kasus-kasus diatas selalu mungkin untuk dibuktikan. Kesalahan pembuktian terjadi karena seseorang yang menggambar peta terpaku pada sebuah wilayah yang luas sehingga mereka gagal untuk memperhatikan bahwa wilayah-wilayah terluar sebenarnya dapat diwarnai hanya dengan dua warna.

Trik ini dapat dijabarkan sebagai berikut: ada banyak peta dimana jika warna untuk beberapa daerah telah ditetapkan sebelumnya, maka hal ini mustahil untuk mewarnai daerah lainnya tanpa menggunakan warna lebih dari empat. Pemeriksa teorema yang tidak teliti tidak akan berpikir untuk mengubah warna dari wilayah-wilayah ini, sehingga tampak bahwa sanggahan teorema tersebut adalah valid.

Kemungkinan, salah satu sebab yang mendasari kesalahan umum ini adalah suatu fakta bahwa batasan warna tidak *transitive*, dimana sebuah wilayah harus diberi warna berbeda dari wilayah lain yang bersentuhan dengannya secara langsung, bukan wilayah yang menyentuh wilayah lain yang bersentuhan dengannya secara langsung. Jika batasannya seperti ini, maka pewarnaan graf planar akan membutuhkan warna yang banyak.

Kesalahan pembuktian yang lain merupakan kesalahan untuk menarik kesimpulan dari teorema 4-warna, seperti penggunaan wilayah yang memiliki beberapa subwilayah lain yang tidak saling terhubung, atau memperbolehkan adanya wilayah-wilayah dengan warna yang sama walaupun hanya saling bersentuhan dalam suatu sudut.

5.2 Aplikasi dalam surface



Gambar 14 Torus

Dengan menghubungkan kedua panah tunggal dan kedua panah ganda, terbentuklah sebuah torus dengan jumlah wilayah yang disinggung

sebanyak tujuh warna. Sehingga dalam hal ini, warna yang dibutuhkan adalah tujuh.

Selain dalam bidang, masalah pewarnaan dapat juga diaplikasikan dalam permukaan suatu bidang dimensi tiga. Cara pewarnaan bola tidak jauh berbeda dengan permasalahan pada bidang. Untuk *surface* tertutup (*orientable* atau *non-orientable*) dengan genus positif, jumlah warna maksimum P yang dibutuhkan bergantung pada karakteristik Euler (χ) *surface* seperti tampak pada rumus di bawah :

$$p = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil,$$

Kedua kurung siku di atas menyatakan fungsi floor (*floor function*). Satu-satunya pengecualian terhadap fungsi di atas adalah *Klein bottle*, yang memiliki karakteristik Euler 0 dan membutuhkan 6 warna. Hal ini yang lebih dikenal dengan *Heawood Conjecture* dan dibuktikan sebagai *Them Map Color Theorem* oleh *Gerhard Ringel* dan *J. T. W. Youngs* pada 1968.

Sebagai alternatif, untuk sebuah *orientable surface*, hubungan rumusan di atas dengan genus dari *surface*, g , adalah sebagai berikut:

$$p = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil$$

Sebagai contoh, suatu torus memiliki karakteristik Euler $\chi = 0$ (dan genus $g = 1$) maka $p = 7$. Sehingga, dalam hal ini maksimum tujuh warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta apapun dalam torus tersebut.

5.3 Daerah kantong (non-contiguous region)

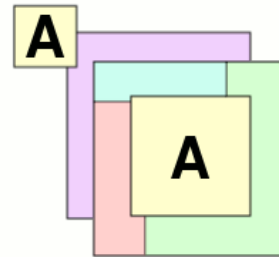
Pada penerapannya, tidak semua daerah dalam suatu negara saling bersinggungan (seperti Alaska yang merupakan bagian dari United States, Nakhichevan yang merupakan bagian dari Azerbaijan, dan Kaliningrad yang merupakan bagian dari Russia).



Gambar 15 Daerah kantong

Gambar di atas adalah contoh peta dengan dua daerah yang termasuk dalam satu negara yang saling tidak bersinggungan sehingga menyebabkan timbulnya *daerah kantong*.

Jika dalam pewarnaan peta tersebut diharuskan untuk menggunakan warna yang sama untuk beberapa wilayah yang termasuk dalam satu negara, maka penggunaan empat warna tidak akan mencukupi. Sebagai contoh, dibawah ini merupakan salah satu ilustrasi dari daerah kantong :



Gambar 16 ilustrasi sederhana dari daerah kantong

Dalam peta di atas, dua daerah yang diberi label A merupakan negara yang sama, sehingga harus diberikan warna yang sama. Oleh karena itu, peta di atas membutuhkan lima warna, karena kedua daerah A bersinggungan dengan keempat daerah lainnya yang saling bersinggungan. Jika daerah A terdiri dari tiga wilayah, maka akan dibutuhkan enam atau lebih warna. Dengan kata lain, seseorang yang membuat peta dalam konteks yang sebenarnya membutuhkan warna yang banyak.

Jika semua negara saling bersinggungan dan laut dianggap sebagai sebuah wilayah tunggal, maka pemakaian 4 warna sudah cukup untuk mewarnai

peta tersebut. Dalam hal ini, mungkin diperlukan pewarnaan beberapa daerah dengan warna yang sama dengan laut. Oleh karena itu, untuk menghindari terjadinya hal ini, pembuat peta lebih cenderung menggunakan lebih dari lima warna.

6. Bukan untuk ilmu perpetaan

Walaupun penerapan teorema 4-warna ditemukan dalam proses pewarnaan peta yang asli, teorema ini tidak memiliki aplikasi dalam ilmu kartografi yang sesungguhnya. Berdasarkan pernyataan *Kenneth May*, seorang sejarawan matematika yang mempelajari tentang perpetaan di Library of Congress, dimana tidak ada kecenderungan untuk meminimalisasi jumlah warna yang digunakan. Beberapa peta menggunakan warna untuk beberapa hal selain wilayah politik. Kebanyakan peta menggunakan lebih dari empat warna, dan ketika hanya empat warna yang digunakan, biasanya jumlah warna minimum yang diperlukan kurang dari empat.

Pada peta yang sesungguhnya terdapat danau-danau yang semuanya harus diberi warna yang sama. Hal ini mengakibatkan penambahan warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta wilayah tersebut. Jika danau-danau dianggap sebagai wilayah tunggal, maka teorema dalam pewarnaan peta di atas tidak akan berlaku. Teorema ini dapat diaplikasikan pada peta dataran dimana diasumsikan bahwa danau tidak termasuk dalam peta wilayah tersebut. Tetapi dalam pembuatan peta yang sesungguhnya, daerah-daerah yang tidak bersinggungan yang merupakan salah satu bagian dari wilayah politik lainnya (daerah kantong) membutuhkan warna yang sama. Sehingga dalam hal ini, teorema pewarnaan di atas tidak akan berlaku lagi.

Diktat yang membahas masalah kartografi dan sejarahnya tidak menyebutkan apapun tentang teorema 4-warna (*four color theorem*), apalagi tentang pewarnaan peta dengan warna minimum sebagai salah satu topik yang dibahas. Umumnya, pembuat peta berpendapat bahwa mereka lebih menekankan pada pewarnaan peta politik dengan metode yang seimbang (*balanced fashion*), sehingga tidak ada salah satu warna yang mendominasi. Jadi, penggunaan empat, lima, atau lebih warna yang digunakan bukan merupakan prioritas utama.

7. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari studi dan implementasi pewarnaan graf dengan teorema 4-warna dalam peta ini adalah

1. Peta planar adalah kumpulan subset bidang yang tidak terhubung, yang disebut wilayah.
2. Wilayah-wilayah dari setiap peta planar sederhana bisa diwarnai hanya dengan empat warna, dengan dua wilayah yang bersebelahan mempunyai warna yang berbeda.
3. Ilmu perpetaan (kartografi) tidak banyak menerapkan teorema 4-warna karena masalah kurangnya penyampaian informasi yang diinginkan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gonthier, Georges. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem. <http://research.microsoft.com7Egonthier/4colorproof.pdf> Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.
- [2] O'Connor and Robertson. (1996). The Four Colour Theorem. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/Ehistory/HistTopics/The_four_color_theorem.html Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.
- [3] Munir, Rinaldi. (2006). Bahan Kuliah IF2153 Matematika Diskrit. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.
- [4] Thomas, Robin. (1998). An Update on the Four-Color Theorem. <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>. Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.
- [5] <http://wikipedia.org> Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.
- [6] Thomas, Robin. (2004), The Four Color Theorem <http://www.math.gatech.edu/Ethomas/FC/fourcolor.html>. Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.
- [7] Culberson, Joseph. Graph coloring programs. <http://www.cs.ualberta.ca/Ejoe/Coloring/index.html>. Tanggal akses: 28 Desember 2006 pukul 10:00.