

# GRAF HAMILTON

Fajar J. Ekaputra - 13503079

*Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung*

*Jl. Ganesha 10, Bandung*

E-mail : [if13079@students.if.itb.ac.id](mailto:if13079@students.if.itb.ac.id)

## ABSTRAK

Graf Hamilton adalah salah satu dari graf istimewa yang dikenal dalam dunia matematika. Berbeda dengan pengertian graf Euler, dimana lintasan dan sirkuit yang merupakan bagian dari graf Euler melalui tiap sisi-sisi graf tepat sekali, maka lintasan dan sirkuit dari graf Hamilton melalui setiap simpul yang ada tepat sekali. Teori graf Hamilton ini nantinya akan berguna dalam memecahkan beberapa masalah yang mungkin terjadi dalam matematika, terutamanya dalam permasalahan matematika diskrit. Beberapa masalah yang mungkin terkait dengan masalah persoalan graf Hamilton ini antara lain adalah pencarian lintasan terpendek, persoalan pedagang keliling, persoalan tukang pos china, juga masalah pewarnaan graf, yang dimana keempat masalah ini merupakan masalah umum yang terjadi dalam pembahasan persoalan terkait graf.

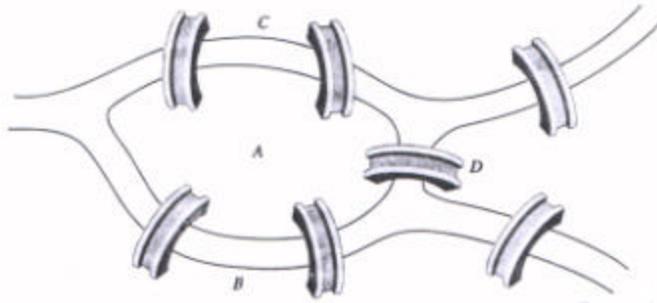
Dalam makalah ini, nantinya akan dibahas mengenai sejarah kemunculan dari Graf secara umum, lalu secara spesifik mulai dari graf Euler dan akhirnya penjelasan mengenai graf Hamilton. Nantinya juga akan ada pembahasan beberapa hal yang terkait secara langsung maupun tidak langsung mengenai graf Hamilton. Dalam pembahasan didalam makalah ini akan juga dibahas mengenai algoritma yang telah ada untuk pencarian lintasan Hamilton dan juga sirkuit Hamilton. Intinya adalah pembahasan mengenai graf Hamilton secara mendalam, dan penulis akan mencoba untuk memaparkan secara menyeluruh dan segala hal yang dapat penulis temukan mengenai graf Hamilton.

Kata Kunci : Graf, Hamilton, Diskrit, Matematika.

## PENDAHULUAN

Subjek yang sekarang kita sebut sebagai teori graf, dan mungkin merupakan topic yang lebih luas dari topologi, pertama kali diketemukan sebagai hasil dari pekerjaan dari Leonhard Euler, dan sebuah pekerjaannya yang terkenal sebagai persoalan tujuh jembatan. Dimana kemungkinan besar tulisan ilmiah pertama mengenai teori graf memang dibuat oleh Euler. Pada tahun 1736 dia menulis "Solutio problematic ad geometriam situs pertinentis, Commetarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae" yang jika diartikan kedalam bahasa inggris secara bebas akan menjadi "the solution of a problem relating to the geometry of position". Euler merupakan

orang yang pertama untuk mengembangkan geometry menjadi masalah independent terhadap pengukuran. Didalam paper yang ditulis oleh Euler tersebut, beliau membahas mengenai masalah yang terjadi disekitar Konigsberg yang membelah sungai Pregel pada saat tersebut. Euler menggeneralisasi permasalahan tersebut dan memberikan kondisi dimana masalah tersebut dapat diselesaikan dengan tanpa mempermasalahkan masalah pengukurannya. Pada halaman berikut, kita akan dapat melihat bagaimana yang disebut dengan tujuh jembatan di Konigsberg yang menjadi inspirasi dari Euler tersebut.



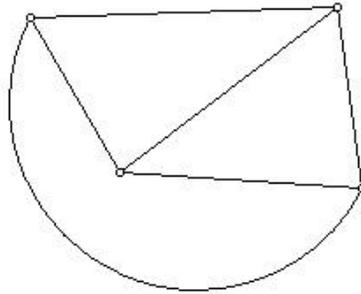
Suatu graf adalah suatu objek mathematical dengan dua jenis unsur, puncak ( kadang-kadang disebut node, lihat di bawah) dan sisi. Pikirlah tentang puncak dan poin-poin yang meringkai seperti bentuk yang menghubungkan sebagian dari poin-poin untuk satu sama lain. Kamu dapat berpikir tentang WWW sebagai graf. Masing-Masing komputer adalah suatu puncak, dan sisi adalah semua bentuk telepon menghubungkan mereka. Di sini adalah suatu contoh sederhana, suatu yang digambar bersisi empat dengan tepi yang menghubungkan tiap-tiap pasangan yang mungkin. Grafik seperti itu disebut sebagai suatu 4-graph lengkap dan adalah salah satu dari suatu kelompok grafik yang serupa dengan n puncak yang disebut sebagai n-graphs lengkap. Suatu grafik lengkap adalah suatu grafik di mana tiap-tiap puncak dihubungkan untuk semua puncak yang lain . Grafik yang lengkap dengan empat puncak disebut  $K_4$ . Grafik yang lengkap dengan tiga puncak,  $K_3$ , adalah suatu segi tiga. Mathworld mempunyai ilustrasi  $K_2$  melalui/sampai  $K_7$ . Suatu grafik lengkap dengan n puncak,  $K_n$ , mempunyai persisnya  $n(n-1)/2$  sisi. Didalam masa yang terbaru istilah grafik

universal telah digunakan untuk apa yang kita sekarang sebut sebagai sebuah grafik lengkap

Kadang-Kadang kita ingin suatu grafik untuk menunjukkan bahwa kita hanya dapat pindah dan bergerak antara dua node didalam satu arah tertentu saja. Untuk dapat melakukan ini segmen tepi ini digantikan dengan suatu panah dari satu node kepada node yang lain. Hal tersebut menandakan arah yang bisa diterima untuk bergerak. Grafik ini disebut sebagai grafik-terarah atau di-graphs. Suatu contoh suatu di-graph dapat dilihat pada website pada daftar pustaka.

Suatu graf jenis khusus terarah lengkap yang mempunyai grafik terarah tunggal antara setiap masing-masing puncak disebut sebagai suatu graf turnamen atau suatu graf berorientasi lengkap. Ilustrasi dari graf tersebut juga dapat dilihat pada website pada daftar pustaka penulis

Dua node dikatakan bertetangga jika terdapat sisi yang mengubungkan mereka.



**Gambar 2 : Contoh Graf Hamilton**

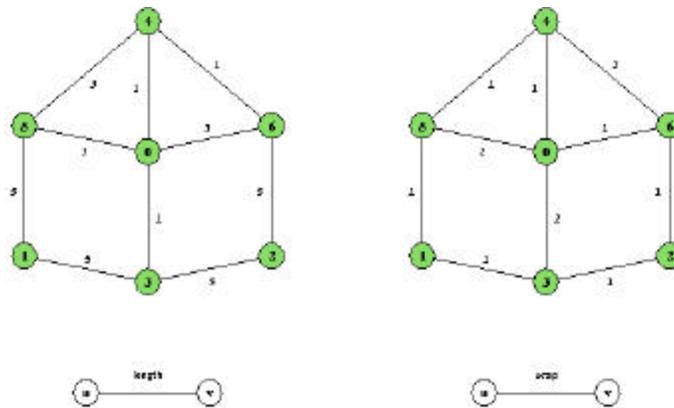
### Lintasan Euler dan Sirkuit Euler

Jika adalah mungkin untuk mulai pada suatu node dan berjalan terus alur masing-masing agar supaya berjalan terus dan membentuk sebuah bingkai tanpa tiba diatas node yang manapun lebih dari sekali maka graf tersebut disebut memiliki sebuah lintasan Euler. Jika alur berakhir di puncak yang sama di mana graf tersebut dimulai maka ia data disebut sebagai suatu sirkuit Euler. Beberapa permasalahan manis, penjelasan, dan ilustrasi seperti ditunjukkan dalam Isaac Reed dalam Lokasi web sangat bagus. Bahkan beberapa grafik sangat sederhana seperti yang satu di atas tidak mempunyai suatu lintasan Euler ( kamu dapat mencobanya). Alasan dapat ditemukan di lokasi web yang baru saja disebutkan

Sangat menarik bahwa Euler tidak pernah mempublikasikan algoritma untuk pencarian sebuah sirkuit Euler, namun hanya menyediakan sebuah method untuk mendeterminasi apakah sebuah graf mengandung sirkuit euler atau tidak. Dalam sebuah catatan dari Ed Sandifer menyatakan, “didalam paper dari Euler tentang Permasalahan jembatan Konigsberg, semua yang ia katakan tentang menemukan jalur tersebut hanyalah jika kamu menghilangkan semua semua sisi yang dobel, maka akan menjadi mudah untuk menemukan solusinya.”. Untuk

sebuah translasi dari lembaran paper asli dari Euler etrsebut dan sejarah dari hal tersebut kita dapat melihat [N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. Graph Theory 1736-1936. Clarendon Press, Oxford, 1976 ]. Algoritma yang paling umum yang saya temukan adalah algoritma fleury yang ditemukan oleh matematikawan prancis yang tidak terkenal bernama Fleury yang terdapat dalam bukunya, yaitu Deux problemes de geometrie de situation, Journal de mathematiques elementaires 1883, 257-261. Penjelasan dari algoritma fleury dapat dilihat langsung pada website tertentu.

Sirkuit Hamilton adalah sebuah sirkuit dalam bidang matematika yang dinamakan berdasarkan nama seorang matematikawan berkebangsaan irlandia bernama Sir William Rowan Hamilton. Sirkuit tersebut akan melewati setiap node sebanyak sekali tanpa akan menyentuh sirkuit lainnya lebih dari sekali. Mungkin akan lebih dari satu lintasan Hamilton untuk sebuah graf, lalu kemudian kita akan berharap akan menemukan jarak terpendek untuk sebuah jalur tertentu. Ini seringkali direferensikan sebagai traveling salesman atau masalah pengantaran tukang pos. setiap graf komplit dengan  $n > 2$  memiliki sebuah sirkuit Hamilton.



**Gambar 3 : Gambaran Chinese Postman Problem**

Pada tahun 1962, Ahli matematik Cina M K Kwan ( Meigu Guan) pekerjaan yang ditempatkan pada suatu jenis masalah yang dikenal sebagai Masalah Tukang pos Cina. Jika suatu sirkuit tidak mempunyai suatu sirkuit Euler, sirkuit itu meminta sirkuit yang paling pendek yang meliputi semua lintasan masing-masing, sekalipun beberapa tepi harus dilintasi lebih dari sekali. Pada halaman ini dari halaman NIST aku menemukan bahwa artikel Kwan yang menunjuk optimizing suatu rute tukang pos, telah ditertulis oleh suatu Pengarang Cina dan yang muncul pada suatu jurnal matematika di Cina.

yang didasarkan pada Ini Alan Goldman mengusulkan nama itu, yaitu "Masalah Tukang pos Cina" kepada Jack Edmonds ketika Edmonds berada didalam Riset Operasi Goldman di Kantor Standard Nasional Amerika Serikat ( sekarang NIST). Edmonds menghargai "catchiness" dari nama tersebut dan mengadopsi itu. Goldman adalah juga secara tidak langsung

**Hamilton, Sir William Rowen (1805-1865)**

Teori beliau tentang ‘Theory of Systems of Rays’ (1827), selesai pada saat umur beliau 23 tahun, menyediakan sebuah basis dari Optic yang sampai sekarang masih digunakan. Hamilton juga merupakan pembuat dari “Quaternions”, sebuah aljabar linear dari vector 4 dimensi. Teori tentang Quaternions diturunkan dari teori yang lebih umum yang disebut teori matrik, yang dibuat oleh Arhur Cayley (1821-1895). Pada

dipengaruhi dengan pengingatan suatu Misteri Ratu Ellery yang disebut sebagai " Misteri Jeruk Cina". ( Alan Goldman, personal communication, 14 Desember 2003)"

Istilah Node adalah dari Latin nodus dan adalah berhubungan erat kepada kata-kata kita untuk jerat/simpul dan tombol. Kata Circuit adalah berasal dari kata circumire, " untuk berkeliling", merupakan bagian dari kata Latin umum yang mana menyongsong kata lingkaran, dan mempengaruhi Kata Bahasa Inggris circuitous.

Kata edge adalah juga digunakan untuk menguraikan baris bergabung puncak suatu segi banyak atau polyhedron. Itu diambil dari suatu Kata Bahasa Inggris yang benar untuk permukaan yang dipertajam dari suatu pedang atau tombak. Itu mula-mula dipronounced dengan sebuah bunyi "k" sebagai pengganti d, sesuatu (yang) barangkali seperti kata " ekge" dan mungkin saja berhubungan dengan kata yang ada dalam bahasa Jerman.

ulang tahunnya yang ke 13, Hamilton muda telah menguasai 13 bahasa, termasuk Hebrew, Sanskrit, dan Bengali. Beliau memasuki Trinity pada tahun 1823 dan sebelum lulus dari tempat tersebut, beliau sudah diterima didalam Professorship of Astronomy. Persis sebelum beliau meninggal, Hamilton dipilih, sebagai peserta asing pertama dalam National Academy of Sciences of the US.

## GRAF HAMILTON

Suatu Grafik Hamiltonian, juga disebut suatu Hamilton Grafik, adalah suatu grafik yang memiliki suatu Sirkuit Hamiltonian. Suatu grafik yang tidak Hamiltonian disebut nonhamiltonian.

Hal tersebut menjadikan itu akan mudah untuk membuat suatu definisi Hamiltonan umum, yaitu pergi yang manapun jalan sejauh singleton graf  $K_1$  adalah terkait, melukiskan "Hamiltonian" untuk berarti "mempunyai suatu Sirkuit Hamiltonian" dan mengambil " Hamiltonian beredar" untuk menjadi subset " beredar" di dalam antaran umum kepada konvensi bahwa singleton graf adalah nonhamiltonian ( B. McKay, *Math. Comm.*, Oct. 11, 2006). Ini juga

berarti bahwa graf yang dihubungkan pada dua node  $K_2$  adalah nonhamiltonian.

Angka-Angka dari Grafik Hamiltonan sederhana pada  $n$  node untuk  $n=1, 2, \dots$  kemudian adalah yang diberi oleh 0, 0, 1, 3, 8, 48, 383, 6196, 177083, ... ( A003216 Sloane'S).

Suatu graf dapat diuji untuk lihat jika itu adalah Hamiltonian yang menggunakan perintah `Hamiltonian[G]` didalam Mathematic ditambah paket `Discretemath`Combinatorica`` ( Yang dapat terisi dengan perintah `<<Discretemath``).

Tabel yang berikut meringkas beberapa nama Grafik Hamiltonan.

graph $G$	$ V(G) $
triangle graph	3
square graph	4
tetrahedral graph	4
pentatope graph	5
octahedral graph	6
utility graph	6
cubical graph	8
16-cell graph	8
smallest cyclic group graph	9
Grötzsch Graph	11
Chvátal graph	12

**Gambar 4 : Tabel Berisi Beberapa Graf Hamilton**

Pengujian apakah suatu grafik adalah Hamiltonian adalah suatu NP-COMPLETE masalah ( Skiena 1990, p. 196). Rubin ( 1974) menguraikan suatu prosedur pencarian efisien yang dapat temukan beberapa atau semua Hamilton Alur Dan Sirkuit didalam suatu grafik yang menggunakan pengurangan yang sangat mengurangi mundur/ menarik kembali dan cara kira-kira.

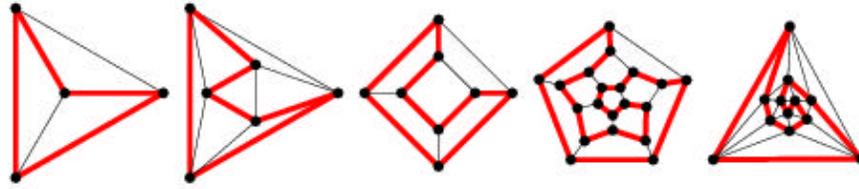
Semua Grafik Hamiltonan adalah biconnected, walaupun sebaliknya tidaklah benar (Skiena 1990, p. 197).

Jika penjumlahan derajat tingkat nonadjacent puncak didalam suatu grafik  $G$  adalah lebih besar

dari banyaknya node dan untuk semua subsets nonadjacent puncak, kemudian  $G$  adalah Hamiltonian ( Ore 1960; Skiena 1990, p. 197).

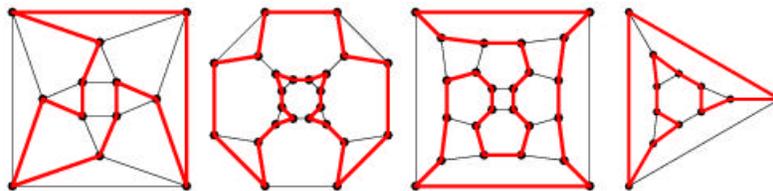
Semua planar grafik 4-connected mempunyai Sirkuit Hamiltonian, tetapi tidak semua polyhedral graf mempunyainya. Sebagai contoh, polyhedral graf yang paling kecil yang tidak Hamiltonian adalah Herschel Grafik dengan 11 node.

Pesan itu untuk suatu Euler alur yang kamu boleh mengunjungi puncak masing-masing lebih dari sekali dan didalam suatu Hamilton Alur itu bukanlah diperlukan untuk bepergian tiap-tiap tepi.



**Gambar 5 : Platonic Solid**

Semua Platonic dalam bentuk solid adalah graf Hamiltonian (Gardner 1957), seperti yang diilustrasikan diatas



**Gambar 6 : Archimedean Solids**

Walaupun tidak secara eksplisit dikatakan oleh Gardner pada tahun 1957, semua Archimedean yang solid pasti memiliki sirkuit Hamiltonian didalamnya, seperti beberapa yang digambarkan diatas ini. Walaupun begitu, skeleton dari dual

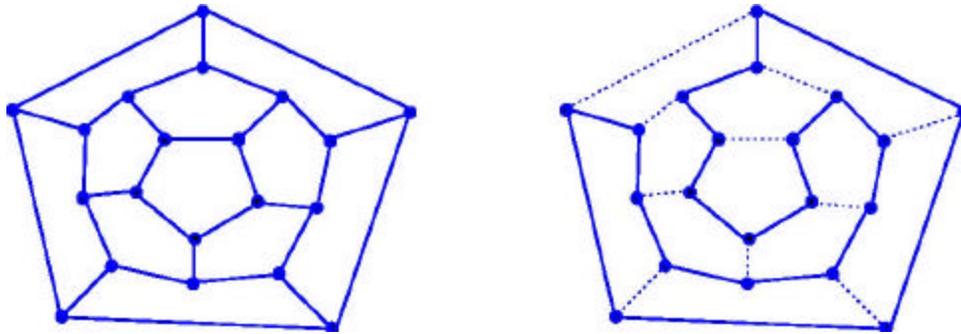
Archimedean dan disummarikan oleh table tertentu dalam hubungannya dengan sirkuit Hamiltonian.

## ALGORITMA PENCARIAN SIRKUIT HAMILTON

Suatu Hamilton Alur suatu grafik adalah suatu alur yang berisi semua puncak yang persisnya berjumlah sekali. Jika puncak yang terakhir didalam suatu Hamilton Alur mempunyai puncak yang pertama sebagai tetangga, kemudian alur dapat diubah menjadi suatu Hamilton Sirkuit dengan sambungan puncak yang terakhir didalam alur kepada puncak yang pertama, yaitu. suatu Hamilton Alur yang adalah juga suatu siklus adalah suatu Hamilton Sirkuit.

Sebagai suatu aplikasi Hamilton Circuit, Hamilton memikirkan suatu puzzlegame ( Game Icosian) yang terdiri dari itu suatu bidang duabelas ( 12 wajah segilima, ' bola sepakbola').

Coba temukan sirkuit Hamilton dalam Gambar berikut ini :



**Gambar 7 : Contoh Graf dan Sirkuit Hamilton yang terkandung didalamnya**

Suatu grafik mempunyai suatu Euler sirkuit jika tiap-tiap puncak mempunyai bahkan derajat tingkat, tetapi tidak ada . seperti itu characterisasi rapi untuk suatu Hamilton Sirkuit.

Tidak ada algoritma efisien dikenal untuk menemukan suatu Hamilton Path/Circuit. Secara umum, menemukan suatu Hamilton path/circuit adalah NP-komplit. Algoritma dikenal yang paling cepat memerlukan banyak waktu bersifat eksponen . Kasus Tertentu suatu Hamilton Sirkuit adalah Travelling Salesman problem di mana suatu salesman ingin mengunjungi n kota besar via rute yang paling pendek.

Masing-Masing yang 20 puncak ( sudut) telah berlabel dengan nama kota besar.

Catatan : Karena bidang duabelas mempunyai 20 puncak dan 12 wajah, mempunyai 30 tepi, menurut Euler rumusannya adalah ( $V+F=E+2$ ).

Catatan : Suatu Euler circuit mengunjungi tepi masing-masing yang persisnya sekali.

Tujuan game adalah untuk mengunjungi semua kota besar sekali ketika kembali ke start itu. Itu adalah, tujuan game adalah untuk temukan suatu Hamilton Sirkuit. Kita dapat menghadirkan puzzle itu sebagai grafik.

Ada ukuran-ukuran sederhana yang adalah bermanfaat menganalisa apakah suatu grafik mempunyai suatu Hamilton Path/Circuit.

- o Jika  $G$  mempunyai suatu Hamilton Sirkuit, kemudian semua puncak mempunyai derajat tingkat = 2.

- o Jika derajat tingkat  $v = 2$  kemudian keduanya peristiwa tepi pada  $v$  adalah di dalam sirkuit

- o Jika derajat tingkat  $v > 2$  dan dua peristiwa tepi pada  $v$  adalah didalam suatu Hamilton Sirkuit, kemudian peristiwa tepi lain pada  $v$  bukanlah didalam Hamilton Sirkuit.

Kriteria Lebih jauh seperti Dalil Ore dapat juga menentukan apakah disana terdapat suatu Hamilton Sirkuit.

Dalil Ore:

Anggaplah  $G$  suatu grafik ( yang sederhana dan tidak diarahkan)  $n(\geq 3)$  puncak. Jika untuk masing-masing dari puncak tidak bersebelahan,  $b$  dan  $c$ , kita mempunyai ( derajat tingkat  $b$ ) + (

derajat tingkat  $c$ )  $\geq n$  maka kemudian  $G$  mempunyai suatu Hamilton.

Jika suatu grafik mempunyai suatu Hamilton Siklus, kemudian grafik dipanggil suatu Grafik Hamiltonan.

## The Knight's Tour and Hamilton Circuit.

Kita dapat memodelkan permasalahan dari perjalanan Knight dengan menggunakan graf atau digraph. Setiap kotak dalam papan

permainan tersebut adalah node dan setiap langkah yang mungkin dari knight tersebut adalah sisi.



Gambar 8 : Permasalahan Knight's Tour

Diagram a) adalah graf yang merepresentasikan pergerakan didalam sebuah papan 4x4. Keempat node 'sudut' memiliki derajat 2, sedangkan 8 'sisi' memiliki derajat 3 dan 4. dan yang terakhir 'tengah' memiliki derajat 4.

Pada atas suatu papan  $N \times N$ , dimana  $N$  adalah ganjil, tidak ada perjalanan keliling (perjalanan yang tertutup) seperti masing-masing gerak ksatria adalah dari suatu bujur sangkar kepada suatu kebalikan warna. Gerak  $N^2$  (Angka ganjil) akan menjadi warna yang sama dengan bujur sangkar 1 dan demikian tidak ada gerak adalah mungkin dari  $N^2$  bujur sangkar ke bujur sangkar 1.

Tidak ada perjalanan keliling untuk suatu papan  $2 \times 2$ , dan karena  $n$  adalah ganjil untuk suatu papan  $3 \times 3$ . Kita sekarang dapat menunjukkan bahwa tidak ada perjalanan keliling untuk suatu papan  $4 \times 4$ . Tanda bukti didasarkan pada properti Hamilton Sirkuit di atas.

### Prosedur backtracking untuk menemukan sebuah sirkuit Hamilton, jika memang ada.

Didalam sebuah graf, mungkin saja tidak ada sirkuit Hamilton, dan jika program harus mengecek hal tersebut, untu contohnya program

```
success: BOOLEAN
visited: ARRAY[BOOLEAN] -- visited vertices
hamilton_cycle: ARRAY[INTEGER] -- stores
vertices of cycle
```

### Theorem :

Tidak ada perjalanan Ksatria yang mungkin pada papan  $4 \times 4$

### Bukti :

Pertimbangkan diagram b), puncak  $u$  dan  $v$  ( masing-masing fo derajat tingkat= 2) harus pada Hamilton Sirkit, jika ada satu. Tepi (  $U,B$ ) Dan (  $B,V$ ) akan berada di Hamilton Sirkit dan semua lain tepi dari  $b$  tidak akan didalam Hamilton Sirkit. Maka tepi (  $u,b$ ), (  $b,v$ ), (  $v,c$ ) dan (  $c,u$ ) akan jadi pada Hamilton Sirkit, yang mana adalah mustahil sebagai format tepi ini adalah suatu siaran terbatas. Diagram b) berisi empat siaran terbatas. Suatu Hamilton Perjalanan keliling tidaklah mungkin pada suatu papan  $4 \times 4$ .

### End proof

Hal tersebut dapat dibuktikan dengan induksi, bahwa semua papan  $N \times N$ , dengan  $N$  bernilai genap, memiliki sebuah rute perjalanan Ksatria (Perjalanan Tertutup)

tersebut haruslah tidak mengasumsikan bahwa disana terdapat sebuah sirkuit Hamilton.

Kita perlu atribut dari kelas :

```
G : ARRAY2[BOOLEAN] -- Adjacency matrix
for graph
```

```

find_cycle(j, move : INTEGER) is
  local
    k : INTEGER
  do
    if move = G.count and then G.item(j,1) then
      success := true
    else
      from
        k := 1
      until
        k > G.count or success
      loop
        if G.item(j,k) and not visited.item(k) then
          visited.put(true,k) -- mark k as visited
          hamilton_cycle.put(k, move+1)
          find_cycle(k, move+1)
          visited.put(success, k) -- unmark k,
                                if not success
        end
        k := k+1
      end
    end
  end -- find_cycle

```

Untuk mencari sirkuit Hamilton nya, kita bias memanggil perintah : find\_cycle(1,1)

Jika terbukti sukses kita akan mendapatkan print out dari array tersebut, yaitu sebuah sirkuit Hamilton. Selain itu tidak akan ada sirkuit Hamilton.

Catatan : Sebelum pemanggilan prosedur find\_cycle, kita harus mengecek keseluruhan pasangan, b dan c, dari node yang merupakan  $(\text{degree of } b) + (\text{degree of } c) = n$

Akan tetapi hal ini salah, jika masih ada sirkuit Hamilton yang lainnya. Teorema ini mengatakan jika

$$(\text{degree of } b) + (\text{degree of } c) = n, \text{ for all pairs } b, c$$

Maka jika ada sebuah sirkuit Hamilton dan disitu ada kondisi cukup untuk adanya sebuah sirkuit Hamilton. Ini tidak berarti bahwa setiap pasangan b, c memuaskan  $(\text{degree of } b) + (\text{degree of } c) = n$  dan maka kondisi tersebut bukanlah kondisi yang dibutuhkan untuk sebuah sirkuit Hamilton.

## CONTOH STUDI TERBARU PADA GRAF HAMILTON

Dalam perkembangannya, studi mengenai graf Hamilton terus dilakukan. Banyak hal yang dianggap oleh peneliti menarik mengenai graf Hamilton dan permasalahannya. Dibawah ini adalah contoh beberapa penelitian terbaru yang dilakukan mengenai graf Hamilton tersebut.

Maksud penulis untuk mengutip sebagian dari isi penelitian tersebut adalah untuk menunjukkan betapa sebenarnya masih banyak studi yang dapat dilakukan mengenai graf Hamilton tersebut. Juga untuk memberi informasi kepada pembaca mengenai hasil dari penelitian tersebut, bahwa telah ditemukan beberapa hasil penelitian yang telah dipublikasikan mengenai hal tersebut.

### 1. "Polychromatic Hamilton Cycles."

#### Abstract

The edges of the complete graph  $K_n$  are coloured so that no colour appears more than  $k = k(n)$  times,  $k = \lfloor n/(A \ln n) \rfloor$ , for some sufficiently large  $A$ . We show that there is always a Hamiltonian cycle in which each edge is a different colour. The proof technique is probabilistic.

*Dikutip dari penelitian :*

*Alan Frieze, Department of Mathematics, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, U.S.A. dan Bruce Reed, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, Canada yang dipublikasikan pada 30 Januari 2006.*

### 2. "A Hamilton Path Heuristic with Applications to the Middle Two Levels Problem"

#### Abstract

The notorious middle two levels problem is to find a Hamilton cycle in the middle two levels,  $M_{2k+1}$ , of the Hasse diagram of  $B_{2k+1}$  (the partially ordered set of subsets of a  $2k + 1$ -element set ordered by inclusion). Previously, the best known result, due to Moews and Reid [11] in 1990, was that  $M_{2k+1}$  is Hamiltonian for all positive  $k$  through  $k = 11$ . We show that if a Hamilton path between two distinguished vertices exists in a reduced graph then a Hamilton cycle can be constructed in the middle two levels. We describe a heuristic for finding Hamilton paths and apply it to

the reduced graph to extend the previous best known results. This also improves the best lower bound on the length of a longest cycle in  $M_{2k+1}$  for any  $k$ .

*Dikutip dari penelitian :*

*Ian Shields, IBM, P.O. Box 12195, Research Triangle Park, North Carolina 27709, USA, ishields@us.ibm.com dan, Carla D. Savage, Department of Computer Science, North Carolina State, University, Box 8206, Raleigh, North Carolina 27695-8206, USA, savage@cayley.csc.ncsu.edu yang dipublikasikan pada 16 Desember 1999.*

## **KESIMPULAN**

Dari semua yang telah dibahas diatas, penulis dapat menyimpulkan bahwa Graf Hamilton adalah sebuah permasalahan yang unik dan menarik untuk dibahas secara lebih dalam oleh para peneliti. Dari beberapa penelitian yang telah penulis baca, masalah tersebut juga membutuhkan kemampuan yang tinggi dari peminat bidang tersebut, selain juga dibutuhkan tingkat ketekunan yang sangat tinggi dalam pelaksanaannya. Penulis menyarankan agar jika seseorang ingin meneliti tentang Graf Hamilton ini agar memperkaya wawasannya tentang Graf dalam artian yang lebih luas, karena dasar dari pengertian terhadap graf tersebut penulis rasa akan sangat mempengaruhi hasil penelitian tersebut.

Dalam penggunaannya dalam penyelesaian masalah, perlu lebih digali lagi oleh para peneliti yang terlibat didalamnya. Kegunaannya dalam penyelesaian masalah secara riil masih belum ada yang mampu mempengaruhi kehidupan manusia secara langsung, tidak seperti bidang penelitian yang lain. Kecuali dalam masalah masalah tertentu seperti penentuan rute terpendek, traveling salesperson problem, dan beberapa kegunaan lain. Penulis yakin dan berharap bahwa suatu saat nanti akan ada kegunaan yang lain dari Graf Hamilton ini.

## **DAFTAR PUSTAKA**

[1] <http://www.mathworld.wolfram.com/>

[2] Munir, Rinaldi. (2004). Bahan Kuliah IF5054 Kriptografi. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[3] <http://en.wikipedia.org/>

[4] <http://www.maths.tcd.ie/>

[5] <http://www.pballew.net/>