STUDI BILANGAN PEWARNAAN λ-*BACKBONE* PADA GRAF SPLIT DENGAN *BACKBONE* SEGITIGA

Anis Kamilah Hayati – NIM : 13505075
Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Teknik Elektro dan Informatika,
Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10, Bandung
E-mail: if15075@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Masalah pewarnaan pada graf merupakan masalah yang menarik untuk dikaji mengingat ada banyak persoalan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf. Misalnya dalam mengatur sejumlah saluran frekuensi ke beberapa pemancar sehingga interferensi dapat dijaga pada "level yang dapat diterima". Contoh yang mungkin dapat dilihat langsung misalnya menentukan jadwal ujian sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian setiap mata kuliah yang diambilnya dengan waktu ujian yang tidak bertabrakan antara satu mata kuliah dengan mata kuliah yang lain.

Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Ada bilangan kromatika, bilangan pewarnaan dengan teorema Ramsey, dan dalam makalah ini akan dibahas mengenai bilangan pewarnaan λ-*backbone.*

Jika diberikan sebuah bilangan bulat $\lambda \geq 2$, sebuah graf $G=(V,E)$ dan subgraf pembangun H dari G (*backbone* dari G), maka suatu pewarnaan λ-*backbone* dari (G,H) adalah suatu pewarnaan titik $V \rightarrow \{1,2,\ldots\}$ dari G sehingga titik-titik yang bertetangga di H memperoleh warna paling sedikit λ. Bilangan pewarnaan λ-*backbone* BBC_λ (G,H) dari (G,H) adalah bilangan bulat terkecil ℓ sehingga terdapat suatu pewarnaan λ-*backbone* f: $V \rightarrow \{1,2,\ldots,\ell\}$.

Dalam makalah ini, graf yang akan dibahas adalah graf split. Graf split adalah sebuah graf yang titik-titiknya dapat dipartisi ke dalam sebuah *clique* dan suatu himpunan bebas (himpunan titik yang setiap dua titiknya saling tidak bertetangga) dengan kemungkinan sisi di antaranya.

Makalah ini akan membahas tentang bagaimana menentukan batas atas untuk bilangan pewarnaan λ-*backbone* dari graf split dengan *backbone* koleksi dari segitiga yang saling lepas.

Kata Kunci: split graph, λ-backbone coloring, triangle backbone, chromatic number.

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) yang dalam hal ini V=himpunan tidak kosong dari simpul-simpul *(vertices* atau *node)*$=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ dan E=himpunan sisi *(edges* atau *arcs)* yang menghubungkan sepasang simpul$=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$. Graf dapat ditulis singkat dengan notasi $G=(V,E)$.

Himpunan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut $\{u,v\}$ dengan $u,v \in V$ dan $u \neq v$. Sisi $e=\{u,v\}$ biasa juga ditulis uv.

Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u dikatakan bertetangga dengan v jika (u,v) adalah sebuah sisi pada graf G.

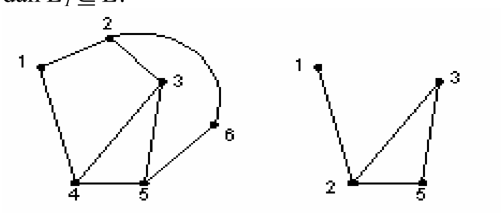
Untuk sebarang sisi $e=\{u,v\}$ sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan v.

Jika terdapat simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, maka simpul tersebut dinamakan simpul terpencil. Dapat juga dikatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.

Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.

Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Sementara pada graf berarah derajat simpul dinyatakan dalam derajat masuk dan derajat keluar.

Jika terdapat sebuah graf $G=(V,E)$, dan graf $G_1=(V_1,E_1)$ maka graf G_1 dikatakan subgraf dari G (ditulis dengan notasi $H \subseteq G$) jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.



Gambar 1:
(dari kiri ke kanan) sebuah graf dan subgrafnya

Graf $G=(V,E)$ dikatakan graf sederhana jika G tidak mengandung gelang (sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama) atau sisi ganda (*multiple edges* atau *paralel edges*)

Graf $G=(V,E)$ dikatakan graf tidak sederhana jika G mengandung gelang (sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama) atau sisi ganda (*multiple edges* atau *paralel edges*)

Graf tidak sederhana (*unsimple graph*) ada dua macam, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda, sisi ganda menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah.

Graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Graf semu lebih umum daripada graf ganda karena sisi pada graf semu dapat terhubung pada dirinya sendiri.

Graf $G=(V,E)$ dikatakan berhingga jika V dan E berhingga.

Graf $G=(V,E)$ dikatakan tidak berhingga jika jumlah yang terdapat pada graf tersebut V dan E tidak berhingga.

Graf yang sisinya mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(u,v)=(v,u)$ adalah sisi yang sama.

Graf yang sisinya diberikan orientasi arah disebut graf berarah. Kita lebih suka menyebut sisi berarah dengan sebutan busur (*arc*). Pada graf berarah, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua busur yang berbeda, dengan kata lain $(u,v) \neq (v,u)$. Untuk busur (u,v), simpul u dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul v dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*). Graf berarah sering dipakai untuk menggambarkan aliran proses, peta lalu lintas suatu kota, dan sebagainya. Pada graf berarah, gelang diperbolehkan, tetapi sisi ganda tidak.

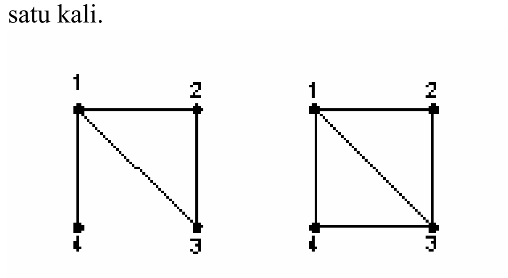
Definisi graf dapat diperluas sehingga mencakup graf ganda berarah. Pada graf ganda berarah, gelang dan sisi ganda diperbolehkan.

Lintasan adalah suatu graf G yang titik-titiknya dapat diurutkan ke dalam barisan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sehingga $E_G=\{v_1 v_2,\ v_2 v_3,\ v_3 v_4, \ldots, v_{n-1} v_n\}$.

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.

Graf yang tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga berarti ada lintasan dari v ke u). Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

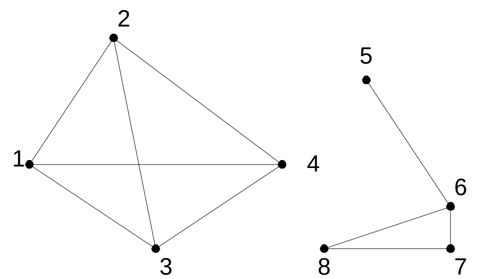
Lintasan Hamilton dari graf G adalah lintasan yang melalui semua simpul di dalam G tepat satu kali.



(a) (b)

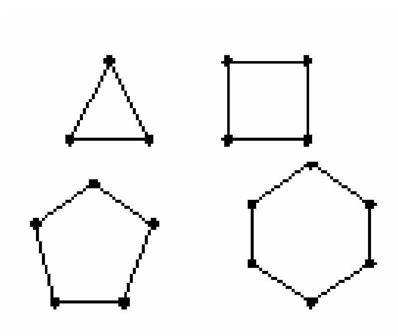
Gambar 2:
(a) graf yang memiliki lintasan Hamilton misalnya (3-2-1-4)
(b) graf yang memiliki lintasan Hamilton misalnya (1-2-3-4-1)

Graf $G=(V,E)$ dikatakan terhubung jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat suatu subgraf yang memuat u dan v.



Gambar 3:
Contoh graf yang tidak terhubung

Graf lingkaran aalah suatu graf C yang titik-titiknya dapat diurutkan ke dalam barisan $v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n$ sehingga $E_C=\{v_1\ v_2\ ,\ v_2\ \ v_3\ ,\ v_3\ v_4\ ,\ldots,v_{n-1}\ v_n\}$. Atau dapat juga dikatakan bahwa graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat (jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul) dua.

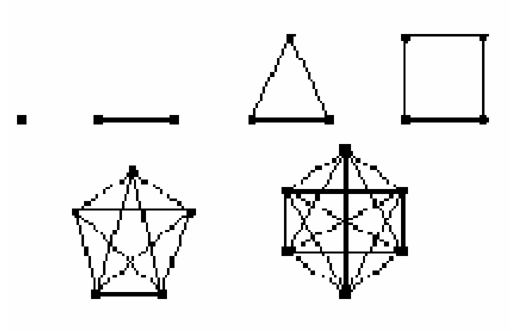


Gambar 4:
Beberapa contoh graf lingkaran

Pohon adalah graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit (lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama).

Dalam makalah ini kita melambangkan lintasan, lingkaran dan pohon dengan n titik dengan P_n, C_n, dan τ_n.

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya (setiap pasang simpulnya bertetangga). Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n.



Gambar 5:
Beberapa contoh graf lengkap

Misalkan graf $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$. Graf G_1+G_2 adalah graf dengan $V(G_1)+V(G_2)=V_1 \cup V_2$ dan $E(G_1)+E(G_2)=E_1 \cup E_2 \cup uv$ sehingga $u \in V_1$ dan $v \in V2$. Graf bintang adalah $K_n \cup K_1$.

Matching adalah koleksi dari P_2 yang saling lepas.

Subgraf H dari G disebut graf pembangun atau *backbone* jika $V_H=V$. Subgraf pembangun H dari graf G disebut *backbone* pohon, *backbone* lintasan, *matching backbone* dan *backbone* segitiga dari G jika H berturut-turut adalah pohon, lintasan, koleksi dari bintang yang saling lepas, *matching* dan koleksi segitiga yang saling lepas.

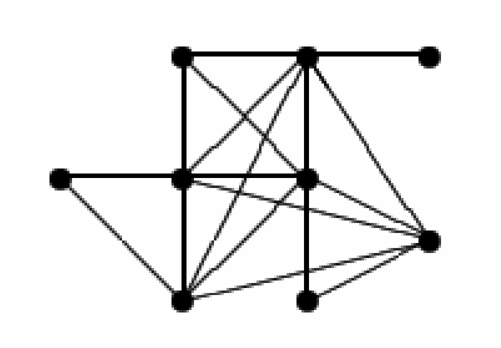
Misalkan $G=(V,E)$ suatu graf. Suatu fungsi $f:V\rightarrow\{1,2,3,\ldots\}$ disebut pewarnaan titik dari V jika untuk semua sisi $uv\in E$ berlaku $|f(u)-f(v)|\geq 1$. Suatu pewarnaan titik disebut pewarnaan k jika f merupakan pewarnaan titik yang memenuhi $f:V\rightarrow\{1,2,3,\ldots,k\}$. Bilangan kromatik χ(G) adalah bilangan bulat positif terkecil k dimana terdapat pewarnaan k untuk $V(G)$.

Untuk graf $G=(V,E)$, $C \subseteq V$ disebut *clique* jika setiap pasang titik di C bertetangga. Ukuran terbesar suatu *clique* dalam G dilambangkan dengan $\omega(G)$.

Suatu himpunan $I \subseteq V$ disebut himpuan bebas jika tidak ada dua titik di I yang bertetangga. Ukuran terbesar dari I dalam G dilambangkan dengan $\alpha(G)$.

Graf G yang himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam *clique* dan himpunan bebas dengan kemungkinan sisi diantaranya disebut graf split.

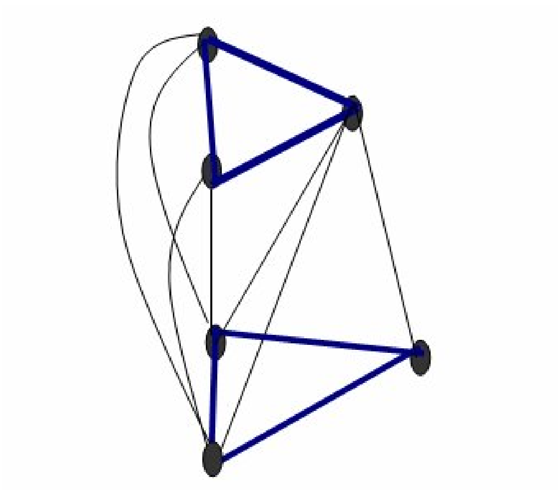
Atau dapat kita tuliskan bahwa graf split memenuhi $\chi(G) = \omega(G) = k$.



Gambar 6:
Contoh graf split.

Misalkan *H* adalah subgraf pembangun dari G yang merupakan *backbone*, yaitu $H=(V_G,E_H)$. Diberikan bilangan bulat $\lambda \geq 2$. Suatu pewarnaan titik *f* dari graf *G* disebut pewarnaan λ-*backbone* dari (G,H) jika memenuhi $|f(u)-f(v)| \geq \lambda$. Bilangan terkecil ℓ dimana terdapat pewarnaan λ-*backbone* $f: V \rightarrow \{1,2,3,\ldots, \ell\}$ disebut bilangan pewarnaan λ-*backbone*, dan dilambangkan dengan $BBC_\lambda(G,H)$.

Dalam makalah ini, kita akan memusatkan perhatian pada kasus bahwa *G* adalah graf split dan *backbone*nya adalah *backbone* segitiga. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 7:
Graf split *G* dengan *backbone* segitiga κ (sisi tebal).

2. Teorema

Untuk semua backbone H dari graf G, jelas berlaku $BBC_\lambda(G,H)=\chi(G)$. Untuk melihat seberapa jauh perbedaan antara bilangan kromatik dengan bilangan pewarnaan λ-*backbone* diberikan beberapa definisi sebagai berikut:

$\tau_\lambda(k)=\max\{BBC_\lambda(G,\tau) \mid \tau$ adalah *backbone* pohon untuk G, dan $\chi(G)=k\}$

$S_\lambda(k) =\max\{BBC_\lambda(G,S) \mid S$ adalah *backbone star* untuk G, dan $(G)=k\}$

$M_\lambda(k)=\max\{BBC_\lambda(G,M) \mid M$ adalah *matching backbone* untuk G, dan $\chi(G)=k\}$

$P(k)=\max\{BBC(G,P) \mid P$ adalah *backbone path* Hamilton untuk G, dan $\chi(G)=k\}$

Pada beberapa literatur, telah dibahas tentang bilangan pewarnaan 2-*backbone* untuk graf sebarang dengan *backbone* pohon, *backbone* lintasan Hamilton, *backbone* bintang dan matching. Dalam makalh ini akan dibahas mengenai bilangan pewarnaan λ-*backbone* untuk graf split dengan *backbone* segitiga.

Berikut ini ditunjukkan beberapa teorema yang mengkaji pewarnaan *backbone* untuk graf split:

Teorema 2.1

Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k \geq 2$. Untuk setiap *backbone* lintasan Hamilton $P=(V,EP)$ dari *G* berlaku:

$$BBC_2 \leq \begin{cases} k+1 & jika\ k \neq 3; \\ 5 & k=3. \end{cases}$$

Teorema 2.2

Misalkan $\lambda \geq 2$ dan $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k=2$. Untuk setiap star backbone pohon $\tau=(V,E_\tau)$ di *G* berlaku :

$$BBC_\lambda(G,\tau) \leq \begin{cases} 1 & jika\ k=1; \\ 1+\lambda & jika\ k=2; \\ k+\lambda & jika\ k\geq 3. \end{cases}$$

Batas atas tersebut adalah batas atas terbaik yang mungkin.

Teorema 2.3

Misalkan $\lambda \geq 2$ dan $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k\geq 2$. untuk setiap *backbone* bintang $S=(V,E_S)$ dari G yang berlaku:

$$BBC_\lambda(G,S) \leq \begin{cases} k+\lambda & jika\ (k=3\ dan\ \lambda \geq 2 \\ & atau\ k \geq 4\ dan\ \lambda = 2; \\ k+\lambda-1 & untuk\ k\ yang\ lainnya. \end{cases}$$

Batas atas tersebut adalah batas atas terbaik yang mungkin.

Teorema 2.4

Misalkan $\lambda \geq 2$ dan $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k\geq 2$. untuk setiap *matching backbone* $M=(V,E_M)$ dari G berlaku:
$BBC_\lambda(G,M)\leq$

$$\begin{cases} \lambda+1 & jika\ k=2 \\ k+1 & jika\ k \geq 3\ dan\ \lambda \leq \min\left\{\frac{k}{2}, \frac{k+5}{3}\right\}; \\ k+2 & jika\ k=9 \\ & atau\ k>11\ dan\ \frac{k+6}{3} \leq \lambda \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \lambda & jika\ k=3,5,7\ dan\ \lambda \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \lambda + 1 & jika\ k=4,6 \\ & atau\ k \geq 8\ dan\ \lambda \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \end{cases}$$

Batas atas tersebut adalah batas atas terbaik yang mungkin.

3. Hasil dan Pembuktian

Pada bagian ini akan ditunjukkan hubungan bilangan kromatik dan bilangan *backbone* dari graf split dengan *backbone* segitiga.

Teorema 3.1

Misal $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k$. Untuk setiap *backbone* segitiga κ dari G berlaku:

$$(a) BBC_\lambda(G,\kappa) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2\lambda & jika\ \ 3 \leq k \leq 2\lambda+1\ \ dan\ \lambda \geq 2; \\ k+1 & jika\ \ k \geq 6\ \ dan\ \lambda = 2. \end{cases}$$

$$(b) BBC_\lambda(G,\kappa) \leq 2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \lambda - 1 \quad jika\ \ k \geq 2\lambda+2\ \ dan\ \ \lambda \geq 3.$$

Batas atas tersebut adalah batas atas terbaik yang mungkin.

Pembuktian:

Misal $G=(V,E)$ adalah graf split dengan *backbone* segitiga $\kappa=(V,E_\kappa)$. Misal C dan I adalah partisi dari V sedemikian rupa sehingga C dengan $|C|=k$ adalah suatu *clique* dengan ukuran terbesar dan I adalah suatu himpunan bebas. Karena G adalah graf split, *akibatnya* $\chi(G)=\omega(G)=k$.

Misalkan κ terdiri dari p segitiga yang saling lepas dan dari p segitiga yang saling lepas tersebut terdapat q segitiga yang semua titiknya berada di C. Untuk selanjutnya, yang dimaksud dengan segitiga adalah segitiga yang berada di κ, dan yang dimaksud dengan dua titik bertetangga adalah dua titik yang bertetangga di κ kecuali jika dikatakan khusus.

Dalam makalah ini pembuktian akan terbagi menjadi dua bagian:

Pembuktian Batas Atas

Untuk bukti batas atas akan kita bagi ke dalam tiga kasus, yaitu:

(1) Kasus $3\leq k\leq 2\lambda+1$ dan $\lambda \geq 2$.
Pertama, pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya berada di C, dan namai titik-titik tersebut secara terurut dengan $v_1, v_2, ..., v_q$.

Kemudian pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap segitiga yang memuat titik di I, dan namai titik-titiknya dengan $v_{q+1}, v_{q+2}, ..., v_p$. Warnai v_i dengan $i=1,2,...,p$.

Kedua, untuk $i=1,2....,p$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik v_i dengan warna $\lambda+i$, kemudian untuk $j=1,2,...,q$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik yang berwarna j dan dengan titik yang berwarna $\lambda+j$ dengan warna $2\lambda+j$.

Terakhir, semua titik di I diwarnai dengan $p+2\lambda$. Pewarnaan di atas mendefinisikan λ-*backbone* karena:

(a) Semua titik di C memperoleh warna yang berbeda, dan untuk setiap pasang titik u,w di C dengan $uw\in E$

κ mendapatkan dua warna yang berbeda, dengan selisih sebesar λ atau 2λ.

(b) Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E\kappa$ memperoleh dua warna yang berbeda paling seidikit $p+2\lambda-(p+\lambda)=\lambda$.

(c) Warna maksimum yang terpakai dalam pewarnaan ini adalah

$$p+2\lambda \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2\lambda$$

(2) Kasus $k \geq 6$ dan $\lambda=2$.
Dalam pembuktian ini kita bagi ke dalam dua subkasus:

- Subkasus $I=\emptyset$
  Untuk $i=1,2,...,p$, warnai titik-titik di setiap segitiga ke-i dengan i, $p+i$, $2p+i$.

- Subkasus $I\neq\emptyset$
  Misalkan $u \in I$ dan $v \in C$ sehingga $uv \notin E_G$, warnai u dan v dengan 1. Warnai dua titik di C yang bertetangga dengan u berturut-turut dengan p dan $2p$. Perhatikan $p-2$ segitiga yang semua titiknya belum terwarnai.

  Untuk setiap segitiga tersebut, warnai salah satu titiknya yang berada di C beruturut-turut dengan $2,3,...,p-1$. kemudian untuk $i=1,2,...,p-1$, warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna i dengan warna $p-i$.

  Selanjutnya warnai titik-titik di C yang belum terwarnai dengan warna $2p+1$, $2p+2,...,2p+q$.

  Terakhir, titik-titik yang belum terwarnai diwarnai dengan $2p+q+1=k+1$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone* karena:

(a) Semua titik di C memperoleh warna yang berbeda, dan untuk setiap pasang titik di u,w di C dengan $uw \in E\kappa$ mendapatkan dua warna yang berbeda, dengan selisih minimal 2.

(b) Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E\kappa$ memperoleh dua warna yang berbeda paling sedikit $(k+1)-(2p-1)=2p+q-2p+2\geq 2$

(3) Kasus $k\geq 2\lambda+2$, dan $\lambda\geq 3$
Dalam pembuktian ini kita bagi menjadi dua subkasus, yaitu:

- Subkasus $p\leq\lambda$
  Pertama, pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya berada di C dan namai titik tersebut secara terurut dengan $v_1,v_2,...,v_q$.

  Kemudian pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap segitiga yang salah satu titiknya ada di I dan namai titik-titik tersebut secara terurut dengan $v_{q+1},v_{q+2},...,v_p$. Warnai v_i dengan i, untuk $i=1,2,...,p$.

  Selanjutnya, untuk $i=1,2,...,p$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik v_i dari setiap segitiga, dengan warna $\lambda+i$, kemudian untuk $j=1,2,...,q$, warnai titik di C yang bertetangga dengan titik berwarna j dan yang bertetangga dengan titik yang $\lambda+j$ dengan warna $2\lambda+j$.

  Terakhir, semua titik di I diwarnai dengan warna $2\lambda+p$.

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone*, karena

(a) semua titik di C memperoleh warna yang berbeda, dan untuk setiap pasang titik u,w di C dengan $uw \in E\kappa$ mendapatkan dua warna yang berbeda, dengan selisih sebesar λ atau 2λ.

(b) Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw \in E\kappa$ memperoleh dua warna yang berbeda dengan selisih paling sedikit $p+2\lambda-(p+\lambda)=\lambda$.

(c) Warna maksimum yang terpakai adalah $p+2\lambda$. Karena $k\geq 2\lambda+4$ dan $p\leq\lambda$ akibatnya
$$p+2\lambda \leq 2(\tfrac{k}{2}-1)+\lambda = k-2+\lambda$$
karena

$k - 1 \leq 2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ jelas $p+2\lambda \leq 2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor+\lambda-1$.

- Subkasus $p > \lambda$

Untuk subkasus ini akan dibagi dalam dua subsubkasus.

- Subkasus $I=\emptyset$
  Untuk $i=1,2,...,p,$ warnai titik-titik di setiap segitiga ke-i dengan $i, p+i, 2p+i$.

- Subsubkasus $I\neq\emptyset$
  Pertama warnai salah satu titik u di I dan salah satu titik v di C yang tak bertetangga dengan u dengan warna 1. kemudian warnai dua titik di C yang bertetangga dengan u berturut-turut dengan p dan $2p$. Selanjutnya,

  - Jika v berada di salah satu segitiga yang semua titiknya di C:

  Pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya di C dan tidak memuat titik v, dan namai titik tersebut secara terurut dengan $v_2,v_3,...,v_q$, kemudian pilih salah satu titik yang terletak di C dari setiap segitiga yang memuat titik di I dan namai titik tersebut dengan v_{q+1}, $v_{q+2},...,v_{p-1}$.

  Warnai v_i dengan i untuk $i=2,3,...,p-1$. Kemudian untuk $i=1,2,...,p-1$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik yang telah memperoleh warna i dengan warna $p+i$. Selanjutnya warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna j dan $p+j$ dengan warna $2p+j$ untuk $j=1,2,...,q$.

  Terakhir semua titik di I yang belum terwarnai diwarnai dengan $2p+\lambda-1$.

  - Jika v berada di salah satu segitiga yang salah satu titiknya di I:

  Pilih salah satu titik dari setiap segitiga yang semua titiknya di C dan namai titik tersebut secara terurut dengan $v_2,v_3,...,v_q$, kemudian pilih salah satu titik di C dari setiap segitiga yang memuat titik di I yang tidak memuat titik v dan namai titik tersebut dengan $v_{q+2},v_{q+3},...,v_{p-1}$.

  Warnai v_i dengan i, untuk $i=2,3,...,p-1$. kemudian untuk $i=1,2,...,p-1$, warnai salah satu titik di C yang bertetangga dengan titik yang telah memperoleh warna i dengan warna $p+i$.

  Selanjutnya warnai titik yang bertetangga dengan titik berwarna $j+1$ dan $p+j+1$ dengan warna $2p+j$ untuk $j=1,2,...,q$.

  Terakhir, semua titik di I yang belum terwarnai diwarnai dengan $2p+\lambda-1$

Pewarnaan di atas mendefinisikan pewarnaan *backbone*, karena:

(a) Semua titik di C memperoleh warna yang berbeda, dan untuk setiap pasang titik u,w di C dengan $uw\in E\kappa$ mendapatkan dua warna yang berbeda, dengan selisih sebesar p atau $2p$.

(b) Untuk setiap pasang titik u di C dan w di I dengan $uw\in E\kappa$ memperoleh dua warna yang berbeda paling sedikit $2p+\lambda-1-(2p-1)=\lambda$.

(c) Warna maksimum yang terpakai adalah $2p+\lambda-1 \leq 2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor+\lambda-1$, karena $p\leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Pembuktian Batas Atas Terbaik yang Mungkin

Perhatikan graf split $G=(V,E)$ dengan $\chi(G)=k$, dan misalkan κ adalah *backbone* segitiga dari G yang terdiri dari $p=\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ segitiga.

Untuk k genap, G dikonstruksi sehingga $\alpha(G)-1$ titik di I bertetangga di G dengan semua kecuali dengan satu titik di C, sebut titik tersebut dengan z.

Untuk k ganjil, G dikonstruksi sehingga semua titik di I bertetangga di G dengan semua kecuali dengan satu titik di C, sebut titik tersebut z. Kita akan membagi pembuktian menjadi dua kasus, yaitu:

(1) Kasus $3 \leq k \leq 2\lambda+1$ dan $\lambda \geq 2$

Andaikan $BBC_\lambda(G,\kappa) \leq p+2\lambda-1$. Untuk setiap segitiga paling sedikit dua titiknya berada di C. Oleh karena itu, dan karena $p \leq \lambda$, akibatnya banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai *2p* titik tersebut paling sedikit $\lambda+p$. Warnai *2p* titik tersebut terlebih dahulu.

Misalkan *u* adalah titik dengan warna $p + \lambda$ dan *v* adalah titik yang telah terwarnai dan bertetangga dengan *u*. Misalkan *w* adalah titik yang bertetangga dengan *u* dan *v*.

Warna dari *w* tidak mungkin di $\{1,2,\ldots,p\}$ karena warna *v* di $\{1,2,\ldots,p\}$ dan $p< \lambda$. Warna dari *w* juga tidak mungkin di $\{p+1, p+2,\ldots, \lambda+p-1, \lambda+p, \lambda+p+1, \lambda+p+2,\ldots, 2\lambda+p-1\}$ karena $uw \in E\kappa$. Diperoleh kontradiksi.

Jadi terbukti bahwa $p+2\lambda$, adalah batas atas terbaik yang mungkin dari $BBC_\lambda (G,H)$ untuk $3 \leq k \leq 2\lambda+1$ dan $\lambda \geq 2$.

(2) Kasus $k \geq 6$ dan $\lambda=2$

Andaikan $BBC_\lambda (G,\kappa) \leq k$. Untuk setiap segitiga paling sedikit dua titiknya berada di *C*. Oleh karena itu, dan karena $p>\lambda$ akibatnya banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai *2p* titik tersebut paling sedikit *2p* warna. Warnai *2p* titik tersebut terlebih dahulu. Misalkan *z* diwarnai dengan *t* untuk suatu $t \in \{1,2,\ldots,k\}$.

- Subkasus pertama $t \in \{1,2,\ldots,k-1\}$
  Untuk subkasus ini, misalkan *y* adalah titik dengan warna $t+1$, sehingga *y* berada di segitiga yang tidak memuat *z*.

  Misalkan *x* adalah titik di *I* yang bertetangga dengan titik *y*. Jelas bahwa *x* bertetanggan di *G* dengan semua titik di *C* kecuali dengan titik *z*.

  Oleh karena itu, *x* tidak mungkin diwarnai dengan $\{1,2,\ldots,k\}$. Tetapi *x* juga tidak mungkin diwarnai dengan *t* karena $xy \in E\kappa$. Diperoleh suatu kontradiksi.

- Subkasus kedua $t=k$.
  Untuk subkasus ini, misalkan *s* adalah titik dengan warna $k-1$, sehingga *s* berada di segitiga yang tidak memuat *z*.

  Misalkan *x* adalah titik di *I* yang bertetangga dengan *s*. Jelas bahwa *x* bertetangga di *G* dengan semua titik di *C* kecuali dengan titik *z*.

  Oleh karena itu *x* tidak mungkin diwarnai dengan $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Tetapi *x* juga tidak mungkin diwarnai dengan *k* karena $xs \in E\kappa$. Kontradiksi dengan pengandaian.

3. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari studi bilangan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan backbone segitiga adalah:

(1) Terdapat hubungan antara bilangan kromatik dengan bilangan pewarnaan *λ-backbone* pada graf split dengan *backbone* segitiga

(2) Untuk $G=(V,E)$ adalah graf split dengan $\chi(G)=k$ dan *backbone* segitiga κ dari G berlaku

(a) $BBC_\lambda (G,H) \leq$

$$\begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2\lambda & \text{jika } 3 \leq k \leq 2\lambda + 1 \text{ dan } \lambda \geq 2; \\ k + 1 & \text{jika } k \geq 6 \text{ dan } \lambda = 2. \end{cases}$$

.(b) $BBC_\lambda (G,H) \leq$

$$2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \lambda - 1 \quad \text{jika } k \geq 2\lambda + 2 \text{ dan } \lambda \geq 3.$$

Batas atas tersebut adalah batas terbaik yang mungkin

(3) Terdapat hubungan

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Royle, Gordon. (2000). Counting Set Covers and Split Graph. Journal of Integer Sequences.

[2] Munir, Rinaldi. (2006). Matematika Diskrit. Program Studi Teknik Informatika, Sekolah Tinggi Teknik Elektro dan Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[3] Murwati, S. Dkk. (2005). Seminar 2005. http://www.ns.ui.ac.id/seminar2005/Data/J2A-28.pdf. Tanggal akses: 29 Desember 2006 pukul 16.00

[4] uni-rostock. (2006) Graphclass: Split. http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci/classes/gc_39.html. Tanggal akses: 2 Januari 2007 pukul 09.00.