

PERMASALAHAN EMPAT WARNA DALAM TEORI PEWARNAAN GRAF

Andini Indyanita – NIM : 13505018

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if15018@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Permasalahan empat warna menyatakan bahwa jika diberikan sembarang bidang datar ataupun bidang bola dibagi-bagi ke dalam daerah-daerah, daerah-daerah tersebut dapat diwarnai menggunakan tak lebih dari empat warna dalam cara tertentu sehingga tidak ada daerah yang bertetangga memiliki warna yang sama. Dua daerah dikatakan bertetangga jika mereka berbagi sebuah daerah batas, tidak hanya sebuah titik. Setiap daerah juga haruslah kontigu.

Permasalahan empat warna pertama kali diperkenalkan pada tahun 1852 ketika Francis Guthrie mencoba untuk memberikan warna daerah-daerah pada peta Inggris dengan syarat warna pada dua atau lebih daerah yang bersebelahan tidak boleh sama. Ketika itu ia menyadari bahwa cukup memerlukan empat warna saja untuk mewarnai peta tersebut. Permasalahan ini akhirnya dipecahkan pada tahun 1976, dengan bantuan komputer, oleh Wolfgang Haken dan Kenneth Appel di University of Illinois.

Pada makalah ini, penulis mencoba menjelaskan pemecahan permasalahan empat warna dengan menggunakan teori graf yang dipelajari dalam mata kuliah Matematika Diskrit. Selama 124 tahun masalah ini tidak hanya menantang dan menjadi teka-teki bagi generasi-generasi matematikawan, tetapi juga telah memberikan banyak kontribusi penting bagi perluasan area ilmu matematika.

Kata kunci: Permasalahan empat warna, graf, pewarnaan graf.

1. Pendahuluan

Permasalahan empat warna telah menjadi salah satu dari permasalahan-permasalahan besar yang belum terpecahkan pada dunia matematika dan informatika.

Sejak tahun 1852 dan berlanjut hingga hari ini, praktis hampir setiap matematikawan pernah mencoba untuk menetapkan dugaan ini. Banyak diantara ide-ide yang mulanya dikembangkan untuk menyerang dugaan empat warna telah memiliki kaitan yang penting pada disiplin ilmu lain. Contohnya, keseluruhan bidang teori graf telah berkembang hingga seperti saat ini. Maka permasalahan empat warna telah memiliki peran pada matematika terapan modern yang memiliki kemungkinan untuk berkembang di masa yang akan datang.

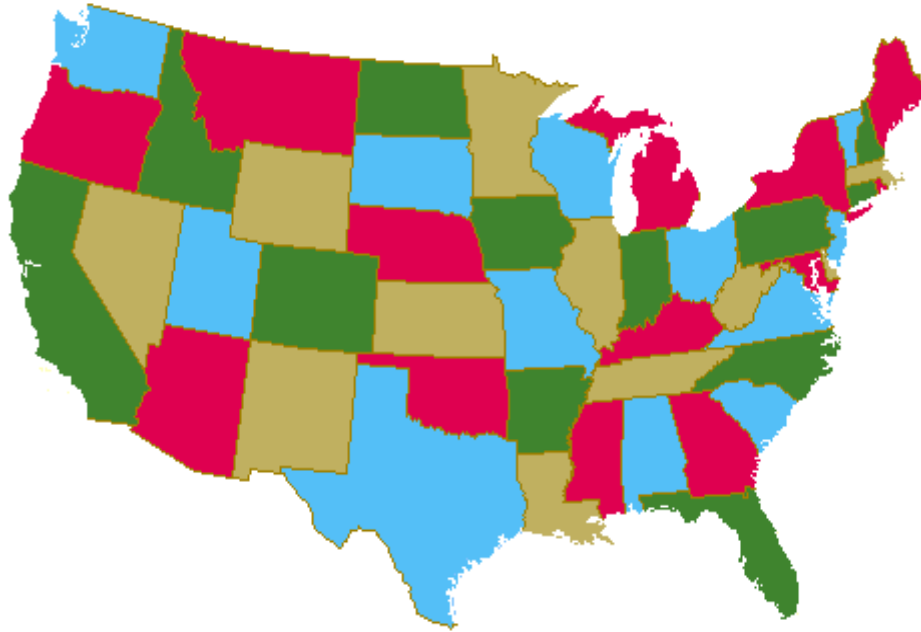
Salah satu dari transformasi fitur pada dunia matematika modern adalah penggunaan komputer digital. Ini merupakan sebuah ironi, namun mengingat bahwa permasalahan empat warna kini tampak telah dibuktikan oleh

Wolfgang Haken dan Kenneth Appel dari University of Illinois yang menggunakan sebuah pendekatan yang terformulasikan dengan baik, membutuhkan 10^{10} operasi yang terpisah pada sebuah komputer berkecepatan tinggi (pada masa itu) untuk membukikan sebuah bentuk finistik dari permasalahan tersebut.

Bagaimanapun, isu ini tetap keruh karena panjangnya perhitungan (memerlukan total 1200 jam) dan karena diperlukan uraian tersendiri untuk memahami bagaimana komputasi mesin memecahkan permasalahan. Program yang begitu panjang, baik instruksi komputer maupun uraian matematis tentu saja memerlukan proses verifikasi dengan hati-hati yang mana mungkin memakan waktu bertahun-tahun.

Ketertarikan matematis pada pembuktian ini telah menjadi lebih sering, disebabkan oleh permasalahan itu sendiri dan metode yang dianggap asing yang digunakan. Sebagian besar dari perhatian ini bernada sinis. Beberapa buah kesalahan minor pada pemrograman telah ditemukan dan telah diperbaiki dengan mudah,

namun tetap membentang kemungkinan bahwa suatu saat akan ada sejumlah revisi mayor dari pembuktian ini atau akan membuatnya menjadi tidak valid.



Gambar 1. Contoh pewarnaan peta Amerika Serikat dengan 4 warna

2. Sejarah Permasalahan Empat Warna

Permasalahan empat warna pertama kali diperkenalkan pada tahun 1852 ketika Francis Guthrie mencoba untuk mewarnai peta wilayah di Inggris, ia menyadari bahwa hanya empat warna yang dibutuhkan. Pada saat itu, Guthrie adalah seorang mahasiswa dari Augustus De Morgan pada University College.

Referensi pertama yang dipublikasikan ditemukan dalam buku Arthur Cayley, *On the colourings of maps*.

Dalam membuktikan teorema ini, beberapa percobaan terdahulu telah gagal. Salah satu bukti dari teorema ini diberikan oleh Alfred Kempe pada tahun 1879, bukti ini diakui secara luas. Bukti lain diberikan oleh Peter Guthrie Tait pada 1880. Namun pada tahun 1890 bukti Kempe ditunjukkan kesalahannya oleh Percy Heawood, dan pada tahun 1891 ditunjukkan kesalahannya oleh Julius Petersen. Masing-masing bukti berdiri selama 11 tahun hingga akhirnya ditunjukkan kesalahannya.

Pada tahun 1890, sebagai tambahan dari penunjukkan kecacatan bukti Kempe, Heawood membuktikan bahwa semua graf-planar dapat diwarnai oleh lima warna.

Sepanjang tahun 1960an hingga 1970an, matematikawan Jerman Heinrich Heesch mengembangkan metode untuk mengaplikasikan komputer untuk mencari bukti.

Hingga pada tahun 1976, dugaan empat warna ini akhirnya dibuktikan oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken dari University of Illinois. Mereka dibantu dalam beberapa pekerjaan algoritmik oleh John Koch.

Jika dugaan empat warna ternyata salah, maka akan ada setidaknya satu buah peta dengan jumlah kemungkinan warna yang digunakan adalah lima. Bukti menunjukkan bahwa contoh-kontra minimal semacam itu tidak ada melalui penggunaan dari dua konsep teknis :

- Sebuah *kumpulan yang tak dapat dihindari* mengandung daerah sedemikian hingga setiap peta haruslah memiliki setidaknya satu daerah dari kumpulan tersebut.

- Sebuah *konfigurasi yang dapat diturunkan* adalah sebuah susunan dari daerah-daerah yang tidak dapat terjadi dalam contoh-kontra minimal. Jika sebuah peta mengandung konfigurasi yang dapat diturunkan, dan sisa dari peta dapat diwarnai dengan empat warna, maka keseluruhan peta dapat diwarnai dengan empat warna, dan maka peta tersebut tidaklah minimal.

Dengan menggunakan aturan matematika dan prosedur yang berdasarkan pada sifat konfigurasi yang dapat diturunkan, Appel dan Haken menemukan sebuah kumpulan yang takdapat dihindari, itu membuktikan bahwa kontra-contoh minimal dari dugaan empat warna tidak dapat ditemukan. Bukti mereka mereduksi ketidakbatasan dari peta yang mungkin menjadi 1936 konfigurasi yang dapat diturunkan (kemudian dikurangi lagi menjadi 1476) yang harus diperiksa satu persatu oleh komputer. Bagian dari pekerjaan ini telah diperiksa dua kali dengan program dan komputer yang berbeda. Bagian yang tak dapat dihindari dari bukti ini adalah lebih dari 500 halaman tulis tangan kontra-kontra-contoh, sebahian besar merupakan anak remaja Haken, Lippold, membuktikan pewarnaan graf. Program komputer sendiri berjalan selama ribuan jam.

Semenjak pembuktian teorema, algoritma yang efisien untuk mewarnai peta dengan empat warna membutuhkan hanya $O(n^2)$ waktu, dimana n adalah jumlah dari bagian. Pada tahun 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour dan Robin Thomas menciptakan sebuah algoritma waktu quadratic, menggunakan pekerjaan Belaga dan mengembangkan algoritma quartic berdasarkan pada bukti Appel dan Haken. Efisiensi ini meningkat dikarenakan bukti baru mereka, yang mirip dengan bukti Appel dan Haken namun mereduksi kompleksitas dari masalah dan hanya butuh mengecek 633 konfigurasi yang dapat diturunkan. Baik bagian 'yang tak dapat dihindari' dan bagian 'yang dapat diturunkan' dari bukti baru ini membutuhkan penggunaan sebuah komputer dan sangat tidak mungkin bagi manusia untuk mengecek dengan tangan.

Pada 1980, matematikawan asal Inggris George Spencer-Brown telah meletakkan bukti dugaannya mengenai peta empat warna pada

Royal Society. Bukti yang dimaksud dinyatakan tidak valid.

Pada 2004, Benjamin Werner dan Georges Gonthier membentuk sebuah bukti dari teorema di dalam Coq proof assistant. Ini menghilangkan keharusan untuk mempercayai bermacam program komputer yang digunakan untuk memverifikasi kasus semacam ini, yang diperlukan hanyalah mempercayai Coq proof assistant.

Ada juga beberapa algoritma yang efisien untuk menentukan apakah 1 atau 2 warna mencukupi untuk mewarnai peta. Menentukan apakah 3 warna mencukupi adalah belum dapat diselesaikan, dan tidak memiliki solusi yang cepat. Menentukan apakah graf umum (mungkin tidak planar) dapat diwarnai dengan 4 warna juga belum dapat diselesaikan.

3. Pewarnaan Graf Bukan Untuk Pembuat Peta

Walaupun teorema empat warna ditemukan dalam proses mewarnai sebuah peta sungguhan, namun ia tidak memiliki aplikasi dalam kartografi praktis. Tidak ada kecenderungan untuk meminimalkan jumlah warna yang digunakan pada peta sungguhan. Banyak peta menggunakan warna untuk hal-hal selain daerah politik. Sebagian besar peta menggunakan lebih dari empat warna, dan ketika hanya empat warna yang digunakan-pun biasanya jumlah warna yang dibutuhkan kurang dari empat.

Pada kebanyakan peta aktual, terdapat danau, yang harus diwarnai dengan menggunakan warna yang sama. Ini merupakan tambahan pada warna apapun yang dibutuhkan untuk daerah politik. Jika danau dihitung sebagai daerah tersendiri, maka teorema tidak diberlakukan. Ia dapat diaplikasikan pada peta dataran tersendiri dengan asumsi bahwa danau bukan merupakan daerah dari peta, namun pada peta sungguhan beberapa daerah pada peta non-kontigu mungkin merupakan bagian dari sebuah daerah politik yang tidak terhubung dan membutuhkan warna yang sama, maka sekali lagi teorema tersebut tidak dapat diaplikasikan,

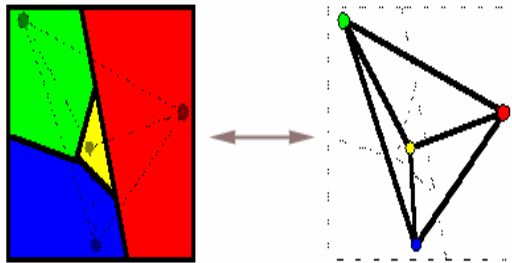
Buku-buku text berkenaan dengan kartografi dan sejarah dari kartografi tidak membahas mengenai teorema empat warna, walaupun pewarnaan peta merupakan pokok bahasan di dalamnya. Secara

umum, para pembuat peta mengatakan bahwa mereka lebih mengutamakan pada pewarnaan daerah politik ke dalam tampilan yang seimbang, sehingga tidak ada satu warna yang mendominasi. Mengenai jumlah warna yang digunakan bukanlah perhatian yang utama.

4. Pernyataan Formal Dalam Teori Graf

Untuk menyatakan teorema secara formal, cara termudah adalah dengan memfrasekannya ke dalam teori graf. Ini menyatakan bahwa daerah simpul dari setiap graf-planar dapat diwarnai dengan paling banyak empat warna sehingga tidak ada daerah simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama. Atau secara singkat "setiap graf-planar dapat diberi empat warna".

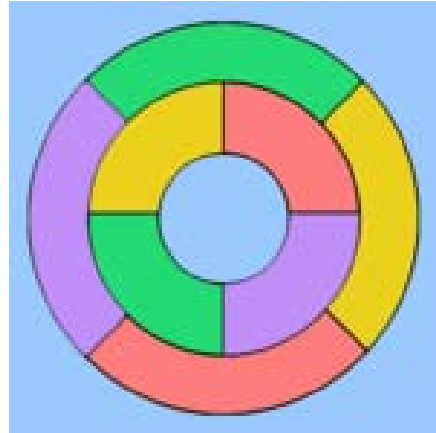
Pada gambar berikut, setiap daerah dari peta digantikan dengan simpul dari graf, dan dua buah daerah simpul terhubung melalui sisi jika dan hanya jika dua daerah membagi sebuah pembatas (tidak hanya sudutnya).



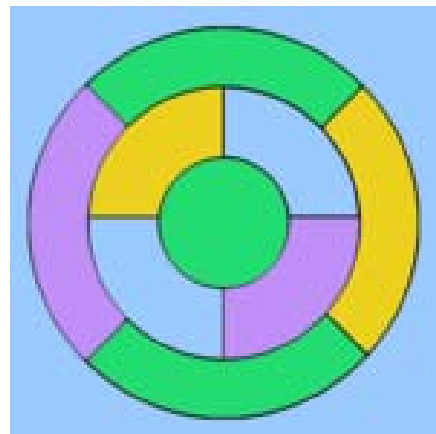
Gambar 2. Contoh pewarnaan graf

5. Sanggahan-Sanggahan terhadap Teori Empat-Warna

Seperti halnya berbagai macam permasalahan terbuka dalam ilmu matematika, Teori Empat-Warna telah memancing sejumlah besar sanggahan ataupun keraguan terhadap teori ini. Hal ini terjadi dalam waktu yang lama sehingga menciptakan sejarah panjang tersendiri. Namun semua teori sanggahan tersebut tetap saja salah. Diantaranya, seperti yang kerap disebutkan pada bahasan sebelum ini adalah *Kempe* dan *Tait*, telah melakukan penelitian yang sangat cermat dalam jangka waktu lebih dari satu dekade sebelum mereka mulai diexpose. Namun, karena tampak dibuat oleh amatir, mereka tidak pernah dipublikasikan lagi.



Gambar 3. Contoh gambar peta yang diberikan lima warna



Gambar 4. Peta yang sebelumnya diberikan lima warna, kini diubah menjadi empat warna. Dan dibutuhkan setidaknya sepuluh wilayah yang warnanya diganti

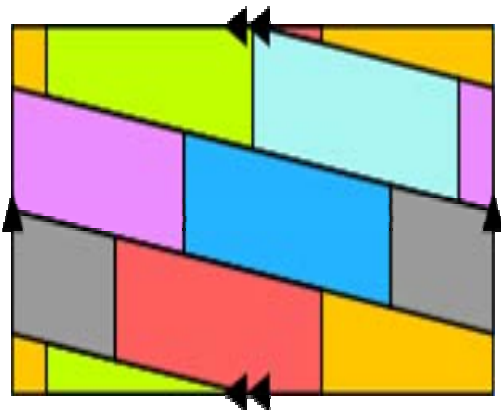
Pada umumnya, 'contoh sanggahan yang salah' berusaha membuktikan untuk membuat satu wilayah yang berbatasan langsung dengan seluruh wilayah-wilayah yang tersisa lainnya, dan berlaku teori bahwa wilayah-wilayah yang tersisa di sekitarnya tersebut dapat diwarnai dengan tiga warna saja. Karena Teori Empat-Warna ini benar, maka teori diatasi memang benar, namun karena pembuat peta hanya terfokus pada satu wilayah yang besar, mereka gagal untuk menyadari bahwa sebenarnya wilayah-wilayah yang tersisa di sekitarnya itu bisa diberi warna dengan hanya dua warna saja. Trik tersebut dapat digeneralisir yaitu ada banyak peta yang jika pewarnaan pada sebagian kecil wilayah dilakukan terlebih dahulu, maka menjadi tidak mungkin untuk memberikan warna tidak lebih dari empat jenis warna. Para penguji dari 'contoh sanggahan yang salah' tersebut tidak mungkin terpikirkan untuk mengubah

warna dari sejumlah wilayah tersebut, sehingga hasil pengujian dari sanggahan tersebut akan muncul sebagai teori yang valid.

Kemungkinan, satu pengaruh yang mendasari kesalahan konsep yang sering terjadi ini merupakan fakta bahwa batasan-batasan pewarnaan tidak lengkap, maksudnya sebuah wilayah hanya akan diberi warna yang berbeda dengan wilayah-wilayah yang berbatasan langsung dengan dirinya, bukan dengan wilayah-wilayah lain yang tidak berbatasan langsung. Jika memang benar ini hambatan, maka graf planar akan membutuhkan sejumlah besar jenis warna yang berbeda.

Contoh lain dari sanggahan yang salah adalah teori mereka mempunyai asumsi-asumsi yang didapat dengan cara tidak diduga, misalnya dalam penggunaan sebuah wilayah yang terdiri dari sejumlah bagian yang tidak terhubung satu sama lain, ataupun wilayah yang 'menolak untuk dicantumkan' menggunakan warna yang sama dengan titik yang bersentuhan.

6. Generalisasi

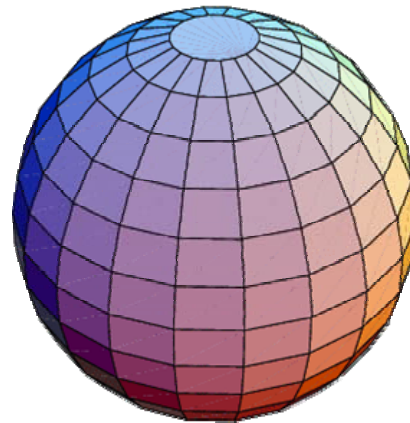


Gambar 5. Contoh peta yang diberikan tujuh warna berbeda. Dengan adanya kesatuan tanda panah tunggal ataupun ganda, maka tercipta sebuah torus dengan tujuh wilayah yang saling berbatasan satu sama lain, sehingga dibutuhkan tujuh warna yang berbeda.

Dapat diambil sebagai pertimbangan bahwa permasalahan dalam pemberian warna pada permukaan berbeda dengan pemberian warna pada bidang datar (*plane*). Permasalahan pada bidang bola ekuivalen dengan permasalahan pada bidang datar. Dalam permukaan tertutup dengan genus yang positif, maka jumlah maksimum dari jenis warna yang dibutuhkan (p) tergantung pada permukaan *Euler characteristic* (χ) yang didapat dari rumus:

$$p = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil$$

Dimana tanda kurang terluar menandakan *floor function*. Satu-satunya pengecualian dari rumus ini adalah *Klein bottle*, yang mempunyai *Euler characteristic* 0 dan dibutuhkan enam warna yang berbeda. Hal ini dikenal sebagai *Heawood conjecture* (dugaan Heawood) yang dibuktikan dalam *The Map Color Theorem* oleh Gerhard Ringel dan J. T. W. Youngs pada tahun 1968.



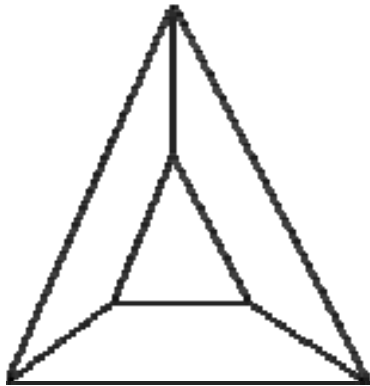
Gambar 6. Bidang Bola.

Bidang bola didefinisikan sebagai kesatuan dari seluruh titik dalam ruang Euclidean tiga dimensi \mathbb{R}^3 yang terpisah dengan jarak r (radius) dari titik pusat. Dua kali lipat dari radius adalah diameter, an titik-titik yang berpasangan pada bidang bola yang berlawanan sisi dengan diameter disebut *antipodes*

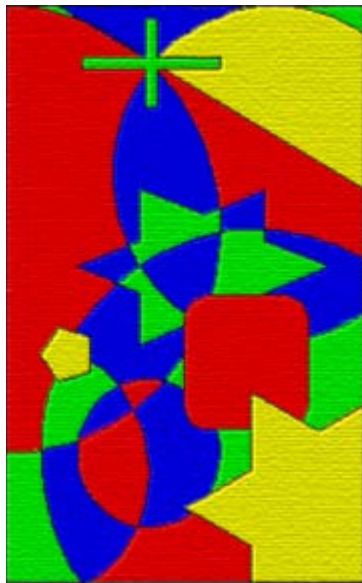
7. Pewarnaan dalam Peta

Sebuah peta dalam bidang bola (*sphere*) merupakan subbagian dari permukaan yang dibuat menjadi daerah yang berbatas. Sebuah peta dianggap telah diberi warna dengan baik jika masing-masing wilayah yang berbatasan memiliki warna yang berbeda. Memberi warna pada peta ekuivalen dengan menggambar peta pada bidang datar (*plane*). Kebanyakan peta yang asalnya berbentuk bidang bola, direpresentasikan pada bidang datar dengan lingkaran kecil yang berisi beberapa atau salah satu wilayah, dan menampilkan hasil permukaan yang didatarkan. Dan Sebaliknya, dengan kebalikan dari proses ini, peta yang berasal dari bidang datar bisa direpresentasikan dalam bentuk bidang bola.

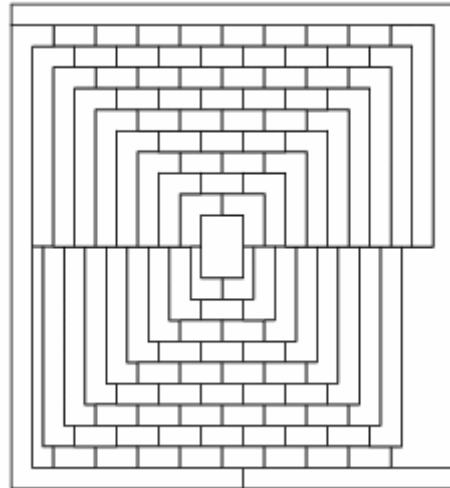
Ini cukup untuk menjabarkan tentang peta 3-regular, yaitu peta dengan tepat dibatasi tiga sisi yang saling terhubung dengan masing-masing simpul, dengan cara berikut. Gantikan masing-masing simpul yang berada pada pertemuan lebih dari tiga sisi dengan lingkaran kecil dan digabungkan bagian dalam dari lingkaran tersebut dengan salah satu dari daerah yang bersinggungan dengan simpul tersebut.



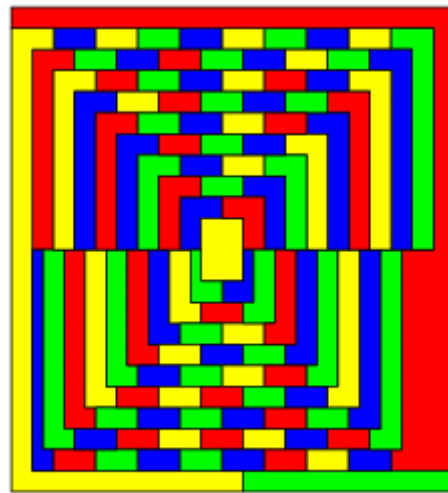
Gambar 7. Contoh peta yang dibutuhkan pemberian warna empat jenis warna



Gambar 8. Contoh peta yang diberikan empat jenis warna



Gambar 9. Martin Gardner (1975) memainkan sebuah permainan April Fool's joke by (incorrectly). Ia menyatakan bahwa peta yang terdiri dari 110 wilayah yang diilustrasikan di atas, membutuhkan lima warna yang berbeda dan menjadikannya 'contoh sanggahan' terhadap Teori Empat-Warna. Tetapi, pewarnaan Wagon (1998; 1999, pp. 535-536), membuktikan dengan algoritma menggunakan *Mathematica*, dengan sangat jelas menunjukkan bahwa peta ini bias diberikan warna dengan empat jenis warna saja



Gambar 10. peta dapat diberi warna dengan empat warna saja

Ketika Teori Empat-Warna telah terbukti, rumus Heawood juga menunjukkan untuk semua permukaan tak terhingga yang berorientasi dan tak-berorientasi dengan pengecualian yaitu terhadap *Klein bottle* (Botl Klein). Hanya untuk Botol Klein, jumlah jenis warna yang dibutuhkan (N) adalah enam—atau kurang dari $N_x = 7$ (Franklin 1934; Saaty 1986, p. 45). *Möbius strip*, yang merupakan permukaan yang terhingga juga membutuhkan enam warna.

surface	χ	N_x	N
Klein bottle	0	7	6
Möbius strip	0	7	6
plane	2	4	4
projective plane	1	6	6
sphere	2	4	4
torus	0	7	7

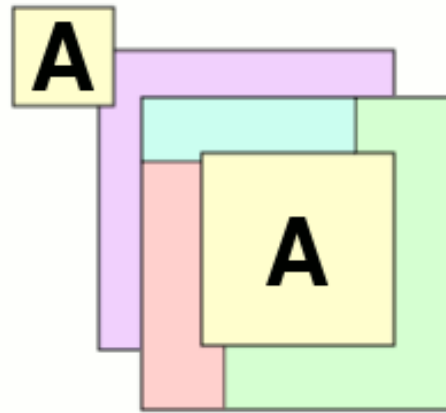
Tabel 1. Jumlah jenis warna yang dibutuhkan oleh berbagai macam bentuk peta. X adalah euler characteristic, N_x adalah jumlah maksimum warna yang dapat diberikan, X adalah jumlah jenis warna yang diberikan.

8. Daerah-daerah yang tidak kontigu



Gambar 11. Contoh peta dengan wilayah yang tidak kontigu

Pada dunia nyata, tidak semua negara merupakan wilayah yang kontigu. Contohnya adalah Alaska yang merupakan bagian dari Amerika Serikat, Nakhichevan merupakan bagian dari Azerbaijan, dan Kaliningrad merupakan bagian dari Rusia. Jika skema pilihan warna mengharuskan wilayah dari suatu negara diberikan warna yang sama, maka mungkin tidak cukup jika diberikan empat warna. Sebagai contoh, pertimbangkanlah peta sederhana di bawah ini:



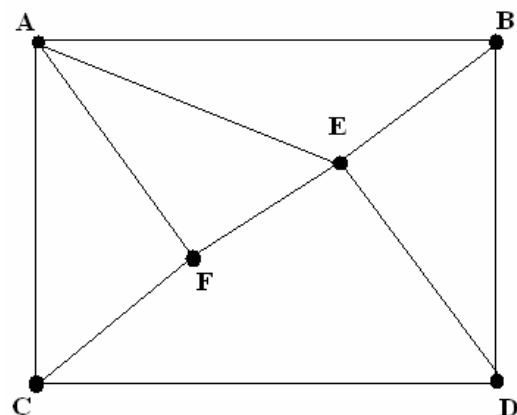
Gambar 12. Contoh peta sederhana wilayah yang tidak kontigu

Padapeta di atas, dua buah wilayah yang berlabel A merupakan bagian dari negara yang sama, dan harus diberikan warna yang sama pula. Dapat dilihat bahwa peta ini membutuhkan lima warna yang berbeda, jika dan hanya jika dua wilayah tersebut kontigu dengan keempat wilayah lainnya dimana masing-masing juga kontigu satu sama lain. Jika daerah yang berlabel A terdiri dari tiga wilayah yang tidak kontigu, maka akan dibutuhkan enam atau lebih jenis warna.

Jika semua negara adalah kontigu dan lautan dimasukkan sebagai wilayah juga, maka hanya empat jenis warna yang dibutuhkan, namun, bisa saja negara diberi warna yang sama dengan lautan. Pembuat peta biasanya menghindari pewarnaan semacam ini, sehingga mereka menggunakan lima warna.

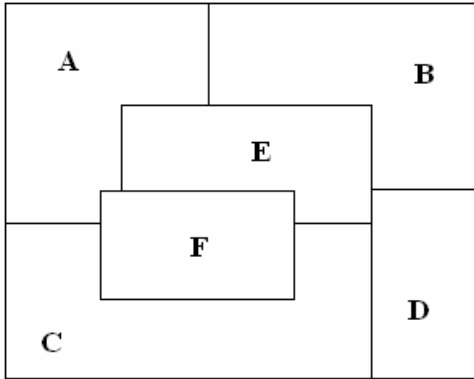
9. Contoh pengaplikasian menggambar peta dengan tidak lebih dari empat warna

Jika diberikan sebuah graf sebagai berikut:



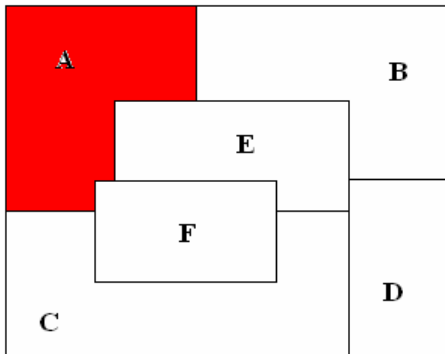
Gambar 13. Graf planar dengan enam buah simpul

Langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mengubah simpul- simpul yang ada menjadi bidang yang berisi wilayah yang merupakan percabangan dari daerah-daerah yang berbatasan dengan simpul



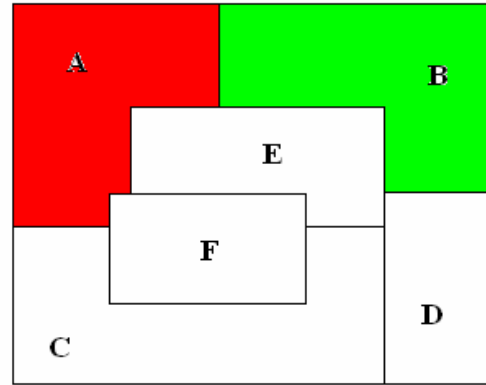
Gambar 14. Graf planar diubah dalam bentuk peta yang simpulnya diganti dengan daerah atau wilayah

Kemudian diberikan empat warna yang berbeda pada masing bidang tersebut misalnya warna biru, merah, hijau dan kuning. Maka kita warnai dulu salah satu wilayah dengan salah satu warna



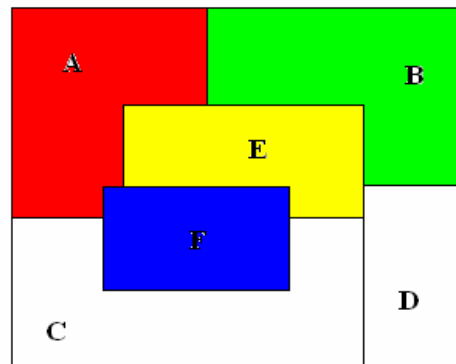
Gambar 15. Pemberian warna pada salah satu wilayah dalam peta

Kemudian beri warna pada wilayah yang berbatasan dengan wilayah yang sudah diberi warna, namun dengan warna yang berbeda



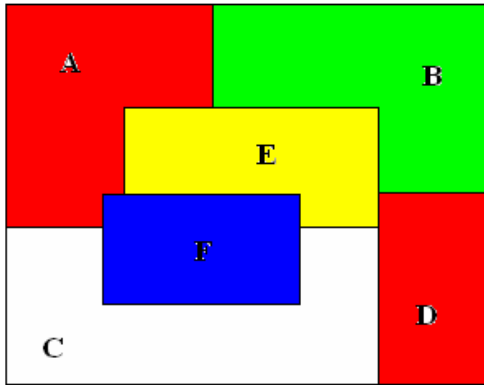
Gambar 16. Pemberian warna pada wilayah yang saling berbatasan tidak boleh dengan warna yang sama

Langkah ini terus dilakukan pada wilayah-wilayah yang saling berbatasan,



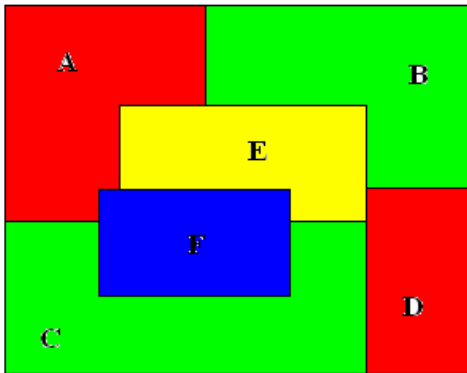
Gambar 17. Peta dengan wilayah yang saling berbatasan sudah mengandung unsur empat jenis warna

Namun jika sudah terisi dengan empat jenis warna, maka gunakan warna sebelumnya yang tidak berbatasan langsung dengan wilayah tersebut



Gambar 18. Wilayah pada peta yang tidak berbatasan boleh diberikan dengan warna yang sama

Begitu seterusnya, hingga seluruh wilayah telah terisi penuh dengan warna



Gambar 19. Peta dengan pemberian warna sejumlah empat warna

Ini adalah contoh pewarnaan peta yang merepresentasikan Teori Empat-Warna

10. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari permasalahan empat warna ini adalah bahwa:

1. Permasalahan empat warna ini membuktikan bahwa untuk memberikan warna pada peta baik dalam bidang datar maupun dalam bidang bola dengan daerah-daerah yang saling berbatasan, jumlah warna yang dibutuhkan hanyalah empat warna saja. Dengan syarat peta yang dimaksud haruslah kontigu, dan dapat dirubah bentuk menjadi sebuah graf-planar.

2. Sudah baanyak ilmuwan di bidang matematika yang berusaha untuk membuktikan teorema empat warna ini. Namun, mereka semua gagal dalam memberikan sebuah bukti kuat. Pembuktian yang cukup diakui dalam masalah ini berasal dari Appel dan Hakken, namun beberapa pihak meragukan keabsahan pembuktian mereka disebabkan karena dalm pembuktiannya menggunakan bantuan dari komputer. Teknik yang mereka pakai untuk mengorganisir dasar-dasar dari ilmu matematika yang ada merupakan bagian dari penelitian dalam intelejensia buatan
3. Selama beratus-ratus tahun permasalahan empat warna ini telah menjadi tantangan dan teka-teki bagi ahli matematika, dalam pencarian bukti permasalahan ini, mereka juga sekaligus memberikan berbagai kontribusi dalam lingkup matematika yang berbeda-beda, diantaranya adalah mempengaruhi ditemukannya disiplin dalam aljabar, *number theory*, geometri terbatas, dan teori graf.
4. Untuk mengaplikasikan pewarnaan menggunakan empat warna pada sebuah graf-planar cukuplah mudah. Yang diperlukan hanyalah sedikit ketelitian dalam memilih warna yang akan ditempatkan.
5. Kesulitan dalam membuktikan teorema ini terletak pada sulitnya mencari kontra-contoh, yaitu sebuah kasus dimana graf-planar tidak dapat diwarnai dengan hanya empat warna saja.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] *Wikipedia.org*
Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00.
- [2] *Weisstein, Eric W. "Map Coloring." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MapColoring.html>.*
Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00
- [3] *Weisstein, Eric W. "Sphere." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Sphere.html>.*
Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00
- [4] *Weisstein, Eric W. "Four-Color Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html>*
Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00
- [5] *The Four-Color Problem* by Thomas L. Saaty, Paul C. Kainen
- [6] *Thomas, Robin, The Four Color Theorem, <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>.* Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00
- [7] *Weisstein, Eric W. "Six-Color Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Six-ColorTheorem.html>.*
Tanggal akses: 20 Desember 2006 pukul 13:00