

JEMBATAN KONIGSBERG

Dwinanto Cahyo – NIM : 13505025

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung

E-mail : if15025@students.if.itb.ac.id

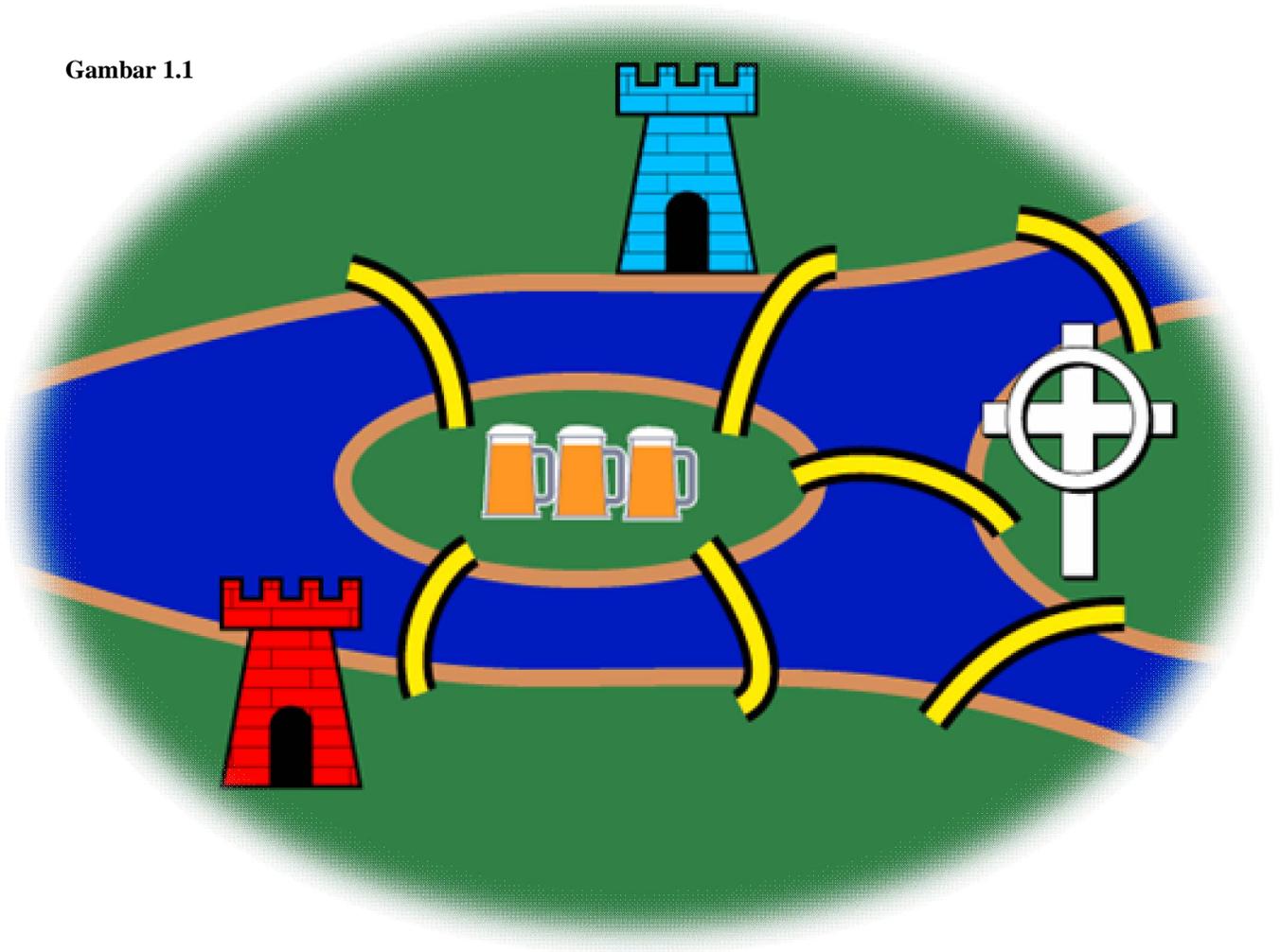
Abstrak

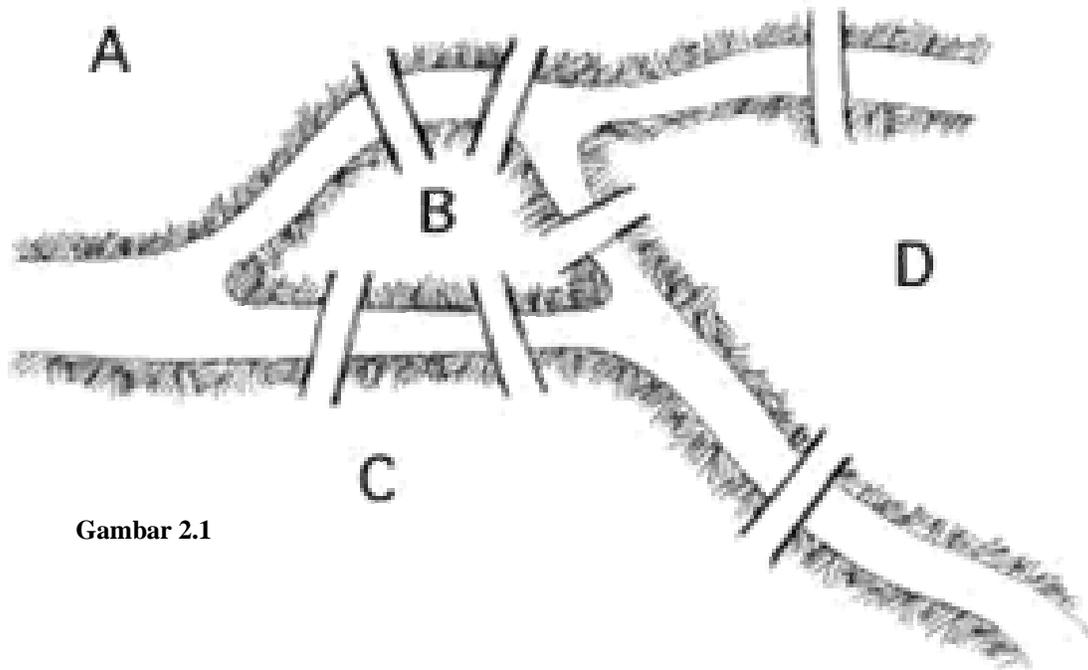
Makalah ini membahas tentang salah satu aspek penting dalam sejarah perkembangan ilmu matematika yaitu studi dan aplikasi *Konigsberg Bridge Problem* (Teka-Teki Jembatan Konigsberg) yang berawal muncul dari penduduk sebuah kota bernama yang dahulu bernama Konigsberg di Jerman. Adalah Leonard Euler, seorang pakar matematika yang mencoba mempelajari teka-teki tersebut dari sudut pandang matematis dan akhirnya mengemukakan sebuah teorema yang kini banyak digunakan dalam berbagai permasalahan, yaitu teorema graf.

Graf yang memiliki komponen dasar berupa simpul dan sisi, yang kemudian dapat membentuk graf terbuka dan graf tertutup dengan sejumlah lintasan dan sirkuit, telah menghapus tanda tanya besar dalam penyelesaian Teka-Teki Jembatan Konigsberg dan berbagai masalah yang serupa dengannya.

Kata kunci: *Konigsberg Bridge Problem*, graf, simpul, sisi, lintasan, sirkuit

Gambar 1.1





Gambar 2.1

1. Pendahuluan

Königsberg, sebuah kota di bagian utara Jerman, memiliki sebuah kisah terkenal yang memberikan pengaruh besar pada kehidupan seorang bernama Euler dan sejarah perkembangan teori Graf.

2. Teka-Teki Jembatan Königsberg

Sungai Pregel yang melalui Königsberg membagi wilayah daratan pada kota tersebut menjadi empat bagian. Tujuh buah jembatan dibangun di atas sungai tersebut pada bagian yang memungkinkan untuk bepergian antar keempat wilayah tersebut. Pada abad ke-17, warga Königsberg gemar berjalan di tepi sungai, hingga akhirnya beberapa dari mereka memikirkan apakah mungkin untuk berjalan di Königsberg dan melalui setiap jembatan hanya sekali. Hal inilah yang kemudian disebut Teka-Teki Jembatan Königsberg yang tidak dapat terselesaikan untuk waktu yang cukup lama dan menjadi terkenal di seluruh negeri. Teka-teki tersebut menarik perhatian Euler, yang diyakini ketika itu berada di St. Petersburg. Ia kemudian meneliti bahwa kasus tersebut dapat direpersentasikan dalam sebuah diagram seperti pada Gambar 2.1.

Königsberg didirikan pada tahun 1255 dan pernah menjadi ibu kota Prusia, Jerman Timur ketika itu. Kastil Prusia dahulu terletak di Königsberg, akan tetapi pada perang dunia II

hancur bersama dengan kota itu sendiri. Akibatnya, pada Perjanjian Postdam tahun 1945 diputuskan bahwa sebuah wilayah yang terletak di antara Polandia dan Lituania, termasuk di dalamnya kota Königsberg, menjadi bagian dari Rusia. Pada tahun 1946, Königsberg diubah namanya menjadi Kaliningrad berdasarkan nama Mikhail Kalinin, pemimpin Uni Soviet periode 1919-1946. Pasca keruntuhan Uni Soviet, Lituania dan negara bagian Soviet lainnya pun merdeka, sehingga Kaliningrad bukan lagi bagian dari Rusia, namun hingga saat ini nama Kaliningrad tidak kunjung dapat dirubah kembali menjadi Königsberg [1].

Kembali ke Teka-Teki Jembatan Koenigsberg, setelah sekian banyak kegagalan warga Königsberg untuk menemukan cara melalui seluruh jembatan hanya sekali, hingga akhirnya pada tahun 1736 masalah tersebut dijadikan sebuah kasus matematika dan kemustahilan untuk menyelesaikan teka-teki tersebut terbukti. Pada tahun tersebut, seorang pakar matematika ternama, Leonard Euler, menulis sebuah artikel yang membahas tidak hanya solusi atas teka-teki Königsberg semata, akan tetapi juga dilengkapi dengan metode umum untuk persoalan serupa lainnya [5]. Artikel tersebut memberikan dampak yang luar biasa bagi teori graf dan perkembangan ilmu matematika secara keseluruhan. Artikel yang berjudul asli "Solutio Problematis Ad Goemetriam Situs Pertinetis", diterjemahkan sebagai berikut :

3. Solusi Permasalahan yang Berkaitan dengan Geometri Posisi

- 1) Terdapat sebuah cabang tambahan pada bidang geometri yang membahas tentang ukuran, yang sebelumnya hampir tidak diketahui, seperti yang dijelaskan pertama kali oleh Leibniz, yaitu geometri posisi. Cabang ini menitikberatkan hanya pada determinasi persoalan dan kelengkapannya, serta sama sekali tidak terlibat dalam masalah pengukuran ataupun perhitungan terhadap keduanya. Memang belum secara jelas terdefinisi kasus seperti apa yang tergolong dalam geometri posisi atau bagaimana metode yang sebaiknya digunakan untuk menyelesaikannya. Misalnya, terdapat sebuah kasus yang telah dijelaskan sebelumnya, dan sekilas tampak geometris, akan tetapi sama sekali tidak membutuhkan ukuran jarak atau kalkulasi sama sekali, saya yakin kasus tersebut berkaitan dengan geometri posisi -khususnya karena solusinya hanya melibatkan posisi dan tanpa kalkulasi. Saya kemudian memutuskan untuk memberikan metode, yang telah saya temukan ketika menyelesaikan kasus seperti ini, sebagai contoh geometri posisi.
- 2) Kasus yang akan saya bahas -seperti yang kita semua ketahui bersama- adalah sebagai berikut:
Di Königsberg, Prusia, terdapat sebuah pulau A, disebut Kneiphof; sungai yang mengelilinginya memiliki dua anak sungai, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2.1, dan kedua anak sungai tersebut diseberangi oleh tujuh buah jembatan a,b,c,d,e,f dan g. Yang menjadi pertanyaan adalah apakah terdapat sebuah rute untuk melalui semua jembatan dan masing-masing hanya silalui tepat satu kali. Saya mendengar bahwa sejumlah orang menyatakan bahwa kasus ini adalah mustahil sedangkan yang lain masih ragu-ragu, akan tetapi tidak ada satupun yang menyatakan bahwa kasus ini mungkin untuk diselesaikan. Saya telah merangkai permasalahan umum dari kasus ini : tanpa memandang bagaimana susunan dan percabangan sungai menjadi anak sungai, dan seberapa banyak jembatan yang ada, dapatkah seseorang menentukan apakah mungkin untuk menemukan cara melalui setiap jembatan tepat satu kali?

- 3) Selama masih dalam lingkup permasalahan teka-teki tujuh jembatan Königsberg, solusinya dapat diperoleh dengan membuat sebuah daftar lengkap semua kemungkinan rute dan menemukan rute yang memenuhi kondisi persoalan. Karena jumlah kemungkinan yang terlalu besar, maka metode ini akan terlalu sulit dan memakan waktu lama, bahkan untuk permasalahan lain yang melibatkan lebih banyak jembatan, metode ini akan menjadi mustahil untuk dilakukan. Walaupun pada akhirnya metode ini memberikan sebuah kesimpulan, masih akan terdapat banyak rute yang tidak berkaitan dan merupakan kelemahan besar. Oleh karena itu, saya memilih mencari metode lain yang hanya akan menghasilkan sebuah rute yang spesifik dengan langkah yang lebih sederhana.
- 4) Metode yang saya gunakan mengrepresentasikan cara untuk melalui sebuah jembatan dengan bentuk yang memudahkan. Dalam hal ini saya menggunakan huruf A,B,C,D untuk setiap daratan yang dipisahkan oleh sungai. Jika seseorang berjalan dari A ke B melalui jembatan a atau b, saya menuliskannya sebagai AB -di mana huruf pertama merupakan tempat awal perjalanan dan huruf kedua merupakan tempat tujuan setelah melalui jembatan. Jadi jika orang tersebut kemudian berjalan dari B menuju D dengan menyebrangi jembatan f, perjalanan ini diwakili oleh BD dan jika perjalanan ini digabungkan dengan perjalanan sebelumnya yaitu AB, maka dapat ditulis dengan ABD, dengan B sebagai huruf tengah mewakili tempat yang dilalui pada perjalanan pertama dan kedua.
- 5) Dengan cara yang sama, jika orang tadi kemudian berjalan dari D ke C melalui jembatan g, maka keseluruhan tiga perjalanan orang tersebut dapat diwakili oleh ABDC, yang berarti orang tersebut berasal dari A, menyebrang ke B, pergi ke D dan akhirnya tiba di C. Karena masing-masing daratan dipisahkan oleh anak sungai, orang tersebut pasti telah menyebrangi tiga jembatan. Dengan cara yang sama pula, kita ketahui bahwa perjalanan menyebrangi empat jembatan dapat ditulis sebagai kombinasi lima huruf dan secara umum, berapapun banyaknya jembatan yang dilalui, maka perjalanannya dapat ditulissebagai kombinasi huruf yang jumlahnya satu lebih besar dari jumlah jembatan yang dilaluinya. Dengan demikian,

perjalanan melalui tujuh jembatan dapat diwakili oleh kombinasi delapan huruf.

- 6) Dalam metode ini, saya mengabaikan jembatan mana yang dilalui dalam setiap perjalanan, akan tetapi, jika penyebrangan dari satu daratan ke daratan lainnya dapat dilakukan melalui sejumlah jembatan, maka jembatan manapun dapat digunakan, selama syarat daerah asal dan tujuan terpenuhi. Selanjutnya, jika perjalanan menyebrangi tujuh jembatan [Gambar 2.1] disusun agar setiap jembatan hanya dilalui satu kali, maka perjalanan tersebut dapat diwakili oleh kombinasi delapan huruf sedemikian rupa sehingga huruf A dan B berada bersebalahan sebanyak dua kali, karena terdapat dua buah jembatan, a dan b, yang menghubungkan A dan B, begitu pula dengan pasangan A dan C. Akan tetapi, pasangan A dan B, B dan D serta C dan D, hanya boleh muncul satu kali.
- 7) Dengan demikian, teka-teki Königsberg dapat disederhanakan menjadi mencari sebuah kombinasi delapan huruf, dari empat huruf A, B, C dan D, dengan ketentuan kemunculan sepasang huruf dengan jumlah tertentu. Sebelum kita beranjak ke pencarian kombinasi tersebut, alangkah baiknya jika kita mencari tahu terlebih dahulu apakah mungkin untuk menemukan solusi tersebut, karena jika ternyata hal tersebut adalah mustahil, maka pencarian kita akan sia-sia. Oleh karena itu, saya telah mencoba mencari aturan yang bermanfaat dalam kasus ini dan kasus lain yang sejenis, untuk mengetahui ada atau tidaknya kombinasi sebagai solusi kasus tersebut.
- 8) Ketika mencari aturan tersebut, saya mengambil wilayah A dan semua jembatan yang menyusun jalan menuju A. Pertama, kita ambil contoh jembatan a yang langsung menuju A. Jika seseorang berjalan melalui a, maka ia pasti pernah berada di A, baik di awal maupun di akhir perjalanan, jadi bagaimanapun urutannya, huruf A akan muncul sekali dalam representasi perjalanan. Jika tiga jembatan (misalnya a, b dan c) menyusun jalan menuju A, dan jika orang tersebut melalui ketiganya, maka dalam representasi perjalanannya huruf A akan muncul sebanyak dua kali, tanpa memandang apakah dia memulai perjalanannya dari A atau tidak. Dengan cara serupa, jika lima jembatan menyusun jalan menuju A, representasi

perjalanan melalui semua jembatan itu akan memiliki tiga huruf A. Secara umum dapat dikatakan bahwa, jika jumlah jembatan adalah berupa bilangan ganjil, maka jumlah kemunculan A adalah setengah dari jumlah tersebut setelah ditambah dengan satu.

- 9) Dengan demikian, dalam kasus jembatan Königsberg huruf A akan muncul sebanyak tiga kali, karena terdapat lima jembatan (a, b, c, d, e) yang menyusun jalan menuju A. Kemudian, karena tiga jembatan menyusun jalan menuju B, maka B akan muncul sebanyak dua kali. Dengan cara serupa kita dapatkan bahwa kemunculan C dan D juga dua kali. Maka dalam kombinasi delapan huruf, C dan D sebanyak masing-masing dua kali, ternyata kombinasi seperti itu tidak mungkin ada, sehingga kesimpulannya adalah bahwa teka-teki Königsberg adalah mustahil.
- 10) Hal serupa dapat dilakukan untuk menyatakan apakah mungkin untuk melakukan perjalanan menyebrangi setiap jembatan satu kali, untuk susunan jembatan seperti apapun, jika jumlah jumlah jembatan yang menyusun jalan ke masing-masing daerah adalah berupa bilangan ganjil. Hanya jika jumlah kemunculan setiap huruf adalah satu lebih besar daripada jumlah jembatan, maka perjalanan tersebut dapat dilakukan. Jika, seperti dalam contoh kita sebelumnya, jumlah kemunculan setiap huruf adalah dua lebih besar dari jumlah jembatan, maka perjalanan tersebut tidak akan pernah terjadi. Aturan untuk menentukan jumlah kemunculan huruf A dari jumlah jembatan yang membangun jalan menuju A adalah sama jika ternyata seluruh jembatan adalah hanya berasal dari B ataupun dari berbagai wilayah yang berbeda-beda, karena saya hanya memperhitungkan daerah A saja untuk menentukan jumlah kemunculan A.
- 11) Jika ternyata jumlah jembatan yang membangun jalan menuju A berupa bilangan genap, maka untuk menjelaskan perjalanan, harus diperhitungkan apakah perjalanan dimulai dari A atau tidak. Jika dua jembatan menyusun jalan menuju A dan perjalanan dimulai dari A, maka huruf A harus muncul sebanyak dua kali, satu untuk mewakili awal pemberangkatan dia dan satu untuk menyatakan perjalanan kembali ke A. Jika perjalanan tidak dimulai dari A, maka huruf A hanya akan muncul sebanyak satu kali, yang

mewakili kedatangan dan keberangkatan dari A, sesuai dengan metode representasi perjalanan sebelumnya.

- 12) Jika terdapat empat jembatan yang membangun jalan menuju A dan jika orang tersebut memulai perjalanan dari A, maka dalam representasi seluruh perjalanan, huruf A harus muncul sebanyak tiga kali jika ia ingin melalui setiap jembatan sebanyak satu kali, akan tetapi jika ia memulai perjalanannya tidak dari A, maka huruf A hanya akan muncul sebanyak dua kali. Jika terdapat enam jembatan yang menyusun jalan menuju A, maka huruf A akan muncul sebanyak empat kali jika perjalanan dimulai dari A atau tiga kali jika perjalanan tidak dimulai dari A. Jadi, secara umum, jika jumlah jembatan adalah berupa bilangan genap, maka jumlah kemunculan A adalah setengah jumlah jembatan jika perjalanan dimulai dari A dan jika perjalanan tidak dimulai dari A, maka kemunculannya adalah satu lebih besar dari setengah jumlah jembatan.
- 13) Karena dalam setiap perjalanan hanya akan ada satu tempat permulaan, jadi saya dapat mendefinisikan, berdasarkan jumlah jembatan yang menyusun jalan menuju setiap daerah, bahwa jumlah kemunculan huruf yang mewakili daerah tersebut adalah setengah dari jumlah jembatan setelah ditambah satu, jika jumlah jembatan adalah bilangan ganjil. Sedangkan jika jumlah jembatan adalah bilangan genap, maka jumlahnya adalah setengah dari jumlah jembatan. Kemudian, jika jumlah total dari semua kemunculan adalah sama dengan jumlah jembatan, dengan catatan jika jumlah jembatan adalah bilangan genap, maka jumlahnya lebih sedikit dari jumlah jembatan, jika jumlah huruf adalah dua kurangnya dari jumlah jembatan, maka perjalanan tersebut adalah mungkin untuk dilakukan dari tempat dengan jumlah jembatan yang menyusun jalan menuju tempat tersebut berjumlah genap, karena dengan demikian, jumlah huruf akan bertambah satu.
- 14) Jadi, bagaimanapun susunan sungai dan jembatan, metode berikut akan memastikan mungkin atau tidaknya untuk menyebrangi semua jembatan tepat satu kali; Pertama, kita definisikan huruf A,B,C,dst sebagai masing-masing daerah yang dipisahkan oleh sungai. Kemudian, hitung jumlah jembatan yang ada dan tambahkan dengan satu, tulis hasilnya di

posisi teratas dari langkah selanjutnya. Ketiga, tulis huruf A,B,C,dst pada sebuah kolom, dan tuliskan di sebelahnya jumlah jembatan yang menyusun jalan menuju masing-masing daerah tersebut. Keempat, tandai dengan asterisk huruf yang mempunyai angka genap di sebelahnya. Kelima, di sebelah setiap angka genap, tuliskan setengah jumlah bilangan tersebut, sedangkan di sebelah setiap angka ganjil, tuliskan setengah jumlah bilangan tersebut setelah ditambah dengan satu. Keenam, tambahkan kolom terakhir yang kita tulis, jika jumlahnya adalah satu kurangnya dari atau sama dengan nilai yang kita tuliskan di bagian atas langkah ini, yaitu jumlah jembatan ditambah dengan satu, maka dapat disimpulkan bahwa perjalanan tersebut mungkin untuk dilakukan. Perlu diingat bahwa jika jumlah tersebut adalah satu kurangnya dari jumlah jembatan ditambah dengan satu, maka perjalanan harus dimulai dari wilayah yang ditandai dengan asterisk, sedangkan jika jumlah tersebut sama dengan jumlah jembatan ditambah dengan satu, maka perjalanan harus dimulai dari wilayah yang tidak ditandai dengan asterisk.

Setelah menyajikan salah satu terjemahan dari Teori Graf Pertama Euler tadi, kita harus mendefinisikan terminologi langkah dari pembuktian beliau. Dalam pembuktiannya, beliau menggunakan simpul, sisi dan sirkuit :

4. Graf tertutup, Lintasan dan Keterhubungan

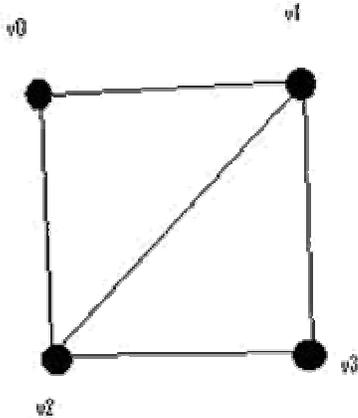
Salah satu bagian paling dasar yang dimiliki setiap graf adalah keterhubungan. Sebuah lintasan graf G adalah sebuah urutan bolak-balik dari titik dan garis, di mana setiap garis diawali dan diakhiri dengan masing-masing sebuah titik. Lintasan ini menghubungkan v_0 dan v_n , dan dapat pula dinotasikan sebagai $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ (akan dibuktikan dalam konteks). Dalam lintasan, pengulangan sisi dan simpul diperbolehkan. lintasan disebut tertutup jika $v_0 = v_n$ yang dinamakan sirkuit dan terbuka jika sebaliknya. Lintasan terbuka adalah sebuah lintasan yang setiap sisi dan simpulnya hanya dilalui tepat satu kali.

5. Lintasan tidak sederhana

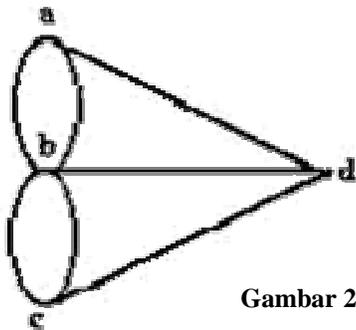
Sebuah trail pada graf G adalah lintasan di mana hanya pengulangan simpul yang diperbolehkan. Misalnya kita memiliki graf G dengan simpul $\{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in V(G)$ dan dengan sisi $\{v_0 v_1, v_0 v_2, v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3\} \in E(G)$, maka salah satu

kemungkinan trail adalah v_0, v_1, v_2, v_3 . [gambar 2.2]

Gambar 2.2



Setelah kita mengetahui definisi lintasan, lintasan tidak sederhana, sirkuit dan lintasan tertutup, kita akan menelaah dua teori Euler dengan pembuktiannya menggunakan sejumlah prinsip paling mendasar dalam teorema graf yang diperkenalkan oleh Euler sendiri. Seperti yang beliau jelaskan sebelumnya, teka-teki jembatan Konigsberg dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram [gambar 2.1]. Euler membuat sebuah titik untuk setiap wilayah daratan, kemudian menambahkan garis antara setiap titik tersebut sebagai pengganti jembatan yang menghubungkan mereka. [gambar 2.3]



Gambar 2.3

Dengan demikian, dengan melihat graf tersebut, kita dapat memulai dari titik **a** kemudian ke **b**, **d**, **c**, **b**, **a**, **b**, akan tetapi tidak terdapat cara untuk kembali ke simpul **a**, karena **d** memiliki derajat sisi genap (jumlah sisi yang menghubungkan simpul). Dengan demikian, jelaslah bahwa teka-teki Konigsberg adalah mustahil, dan hal ini membuat Euler mempresentasikan teori Graf

Euler hasil pemikirannya. Metode ini juga dapat digunakan untuk Graf Terhubung Langsung.

Meskipun Teorema 1 disusun oleh Leonard Euler, di mana beliau telah memberikan kontribusi besar dalam teori Graf, akan tetapi ternyata pembuktian Euler belumlah lengkap. Euler gagal menunjukkan bahwa jika setiap simpul dari graf terhubung G bernilai bilangan genap, maka G bersifat Eulerian [5]. Hingga akhirnya pada tahun 1873, Carl Hierholzer [8] berhasil melengkapi pembuktian Euler tersebut. Akan tetapi, sebelum Hierholzer sempat mempublikasikan hasil kerjanya tersebut, dia meninggal. Satu-satunya alasan yang menyebabkan hasil kerja Hierholzer akhirnya dipublikasikan adalah karena dia telah sebelumnya memberitahu rekan kerjanya tentang penelitian yang dia lakukan. Dan merekalah yang telah berbaik hati untuk membantu mempublikasikan hasil kerja Holzier tersebut.[5] Teorema dan pembuktian Holzier yang menampilkan sebuah cara yang brilian untuk menunjukkan kenapa dan bagaimana teorema tersebut berlaku adalah sebagai berikut :

Teorema 1

Sebuah graf terhubung tidak sederhana G bersifat Eulerian jika dan hanya jika setiap simpul memiliki derajat bernilai genap.

Bukti

Pertama-tama mari kita anggap bahwa G bersifat Eulerian. Kemudian G mengandung sebuah sirkuit Euler C . Anggap C dimulai pada simpul u (dan, dengan demikian, berakhir di u). Akan dibuktikan bahwa setiap simpul G memiliki derajat bernilai genap. Sebut v sebuah simpul lain pada graf G , karena C tidak dimulai maupun berakhir pada v , maka setiap kali u ditemukan pada C , akan ada dua buah sisi yang terlibat (satu untuk memasuki v dan satu yang lain untuk meninggalkan v). Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa v memiliki derajat bernilai genap. Karena C dimulai dan berakhir pada u , maka terdapat sebuah sisi yang berawal dari u dan sebuah sisi lagi yang berakhir pada u . Jika kemudian u muncul kembali, maka akan bertambah dua buah sisi, sehingga u juga berderajat genap. Sebaliknya, anggap bahwa G merupakan sebuah graf terhubung tidak sederhana dengan setiap simpulnya memiliki derajat bernilai genap. Akan ditunjukkan bahwa G mengandung sebuah sirkuit Euler. Dari

semua di G , pandang T sebagai yang terpanjang. Anggap T sebagai sebuah $u - v$. Maka, setiap kali kita menemui T , kita akan menemui dua sisi G , yang pertama untuk memasuki v dan yang kedua untuk meninggalkan v . Karena T berakhir pada v dan jumlah sisi v yang bernilai ganjil telah diperhitungkan. Akan tetapi, jika v memiliki derajat bernilai genap, maka akan ada paling sedikit sebuah sisi di v , sebut sebagai vw , yang tidak muncul di T . Kita dapat memperpanjang T hingga w , bertentangan dengan asumsi bahwa T memiliki panjang yang maksimum.

Karena T merupakan sebuah $u - u$, dengan $C = T$ adalah sebuah sirkuit. Maka jika C mengandung semua sisi G , maka C adalah sebuah sirkuit Euler dan pembuktian ini selesai.

Kemudian jika C tidak mengandung semua sisi dari G , maka akan ada sejumlah sisi G yang tidak terdapat pada C . Karena G terhubung, maka sejumlah sisi $e = xy$ tidak pada C adalah sebuah kebetulan dengan simpul x pada C . Ambil $H = G - E(C)$, sehingga H merupakan subgraf dari G yang diperoleh dengan menghilangkan sisi C . Setiap simpul C muncul ketika jumlah sisi pada C bernilai genap. Karena setiap simpul di G juga memiliki derajat genap, maka begitu pula dengan H , dengan catatan H mungkin saja tidak terhubung. Dengan kata lain, H paling sedikit memiliki satu komponen tidak sederhana, sebut sebagai H_1 , yang dimulai dari x . Seperti yang baru saja kita lihat, tersebut harus berakhir di x dan merupakan sebuah sirkuit $x - x$ di C' pada H_1 .

Jika kita ingin memasukkan C' ke dalam sirkuit C , maka ketika kita tiba di x , kita menemukan sebuah sirkuit C'' pada G dengan panjang melebihi C , yang dalam kasus kali ini merupakan sebuah kontradiksi. Hal ini menunjukkan bahwa C mengandung setiap sisi dari G dan merupakan sebuah sirkuit Euler.

Teorema 2

Sebuah graf terhubung G mengandung lintasan Euler jika dan hanya jika tepat dua simpul pada G memiliki derajat ganjil. Sehingga, setiap lintasan Euler pada G dimulai di salah satu dari kedua simpul berderajat ganjil tersebut dan berakhir pada simpul yang satunya.

Bukti

Pertama-tama anggap bahwa G mengandung sebuah lintasan Euler T . Sehingga T merupakan sebuah lintasan $u - v$ untuk sepasang simpul u dan v tertentu. Kemudian kita membentuk sebuah graf terhubung H dari graf G dengan menambahkan sebuah simpul baru berderajat dua pada graf G dan menggabungkannya dengan simpul u dan v . Dengan demikian, $C = T, x, u$ adalah sebuah sirkuit Euler di H . Berdasarkan Teorema 1, setiap simpul H berderajat genap dan hanya u dan v yang memiliki derajat ganjil di $G = H - x$.

Sebagai kebalikannya, kita lakukan dengan kasus serupa. Anggap G sebuah graf terhubung yang mengandung tepat dua simpul u dan v yang berderajat ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G mengandung sebuah lintasan Euler T , di mana T adalah lintasan $u - v$ atau $v - u$. Tambahkan sebuah simpul baru x berderajat dua ke G dan gabungkan dengan u dan v , sehingga menghasilkan sebuah graf H . Dengan demikian, H adalah sebuah graf terhubung dengan semua simpulnya berderajat genap. Berdasarkan teorema 1, H merupakan sebuah graf Euler yang mengandung sirkuit Euler C . Karena simpul manapun yang menjadi awal dan akhir sirkuit tidak menjadi masalah, maka kita asumsikan bahwa salah satu sisi sebagai awal sirkuit C dan satu sisi yang lain sebagai akhirnya. Menghapus x dari C akan menghasilkan sebuah lintasan Euler T pada G yang dimulai dari salah satu di antara u dan v dan berakhir di satu yang lainnya. [1]

Tidak ada teori lain selain yang dikemukakan oleh Euler yang telah memberikan kontribusi luar biasa di bidang Teorema Graf. Dengan kelahiran teorema graf, banyak teorema lain dikembangkan, dan terdapat sejumlah besar aplikasi penggunaan teorema graf. Salah satunya adalah Teka-Teki Tukang Pos Cina yang terkenal, di mana dengan berbagai variasi, dapat digunakan di aplikasi lain. Salah satu contohnya adalah metode pengumpulan sampah dan pembersihan jalan, pembersihan salju, pelukisan garis pada ruas jalan, sistem patroli mobil polisi, metode pengambilan sensus dan pengaturan sistem jaringan komputer.

Aplikasi pada Teka-Teki Tukang Pos Cina

Orang pertama yang memperkenalkan masalah untuk menemukan rute terpendek untuk melintasi setiap sisi graf minimal satu kali

adalah Meigu Guan [6]. Guan menganalogikan seorang pengantar surat yang ingin mengantarkan surat-suratnya melalui sebuah jaringan jalan dan kembali ke kantor pos secepat mungkin. Jack Edmonds [7] menyebutnya dengan Teka-Teki Tukang Pos Cina.

Definisi masalah:

Seorang tukang pos berjala melalui sebuah lintasan tertutup dengan menggunakan setiap sisi jalan minimal satu kali.

Rute terpendek adalah sebuah rute dengan total bobot sisi minimum.

Kumpulan M yang beranggotakan sisi-sisi $E(G)$ yang merupakan bagian dari graf G , di mana tidak ada dua sisi yang berakhir pada simpul yang sama disebut *matching* pada graf G .

Matching yang setiap simpul di dalamnya bukan merupakan simpul akhir dari sisi manapun disebut *matching* sempurna.

Tujuan akhir dari Teka-Teki Tukang Pos Cina ini adalah mencari sebuah rute optimal dari sebuah graf berbobot, di mana setiap bobot sisi merepresentasikan suatu kuantitas terukur tertentu, tergantung pada masing-masing kasus (contohnya jarak, waktu, biaya, dll). Sesungguhnya jika semua simpul pada graf memiliki derajat bernilai genap, maka setiap rute Euler adalah suatu rute optimal. Akan tetapi jika tidak, maka sejumlah sisi harus ditinjau ulang. Oleh karena itu, tujuan akhir solusi teka-teki ini adalah mencari setiap sisi buntu dengan jumlah bobot minimum.

Edmonds dan Johnson dengan menggunakan algoritma polinomial waktu (tabel 1) berhasil menyelesaikan Teka-Teki Tukang Pos Cina tersebut [6].

Ide utama dari algoritma Edmonds dan Johnson adalah mencari sisi dengan jalur terpendek antara simpul-simpul berderajat ganjil, di mana bobot sisi dipandang sebagai jarak. Jika sisi-sisi antara dua simpul berderajat ganjil diduplikasi, maka simpul-simpul tersebut akan tetap sama. Di bawah tabel diberikan contoh ilustrasi Algoritma pada Tabel 1. [gambar 2.4]

Gambar 2.4 menunjukkan sebuah graf lengkap berbobot dari simpul-simpul berderajat ganjil pada graf awal G yang merupakan representasi graf G . Rute terpendek antara simpul berderajat ganjil b dan d memiliki panjang 8. Sedangkan *matching* sempurna minimum dari graf G

ditunjukkan pada bagian yang dicetak tebal pada gambar 2.5.

Tabel 1

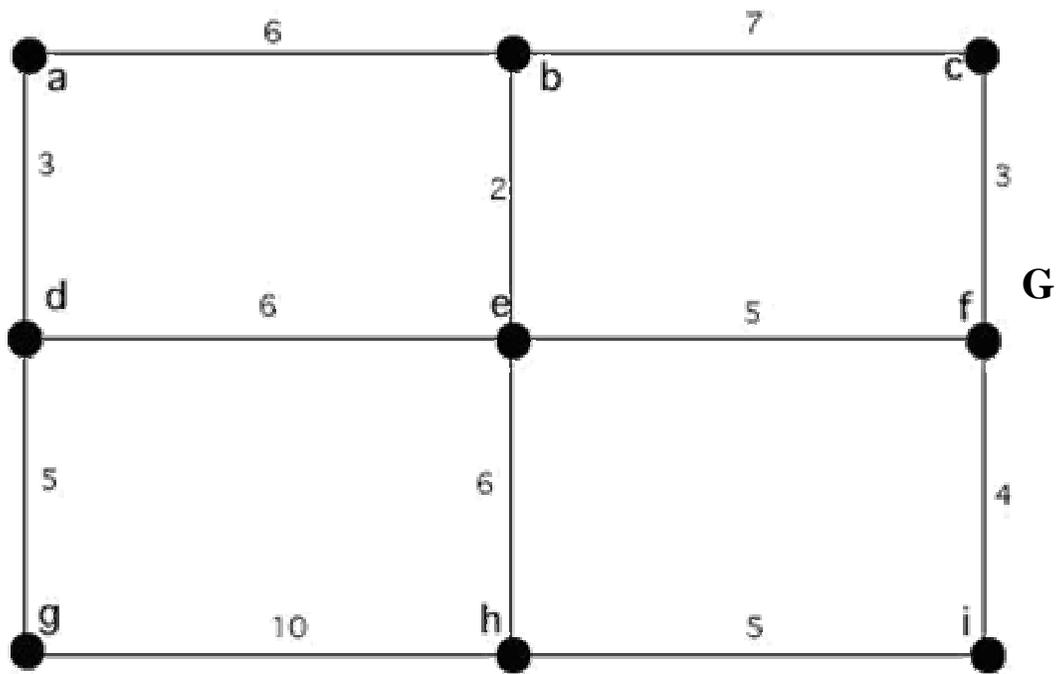
<p>Algoritma 1 Menentukan rute optimal tukang pos</p> <p>Input: sebuah graf terhubung berbobot G Output: sebuah rute optimal tukang pos W</p> <p>Cari S, sebuah kumpulan simpul berderajat ganjil pada G Untuk setiap pasang simpul berderajat ganjil u dan v pada S Cari jalur terpendek P pada G antara simpul u dan v Simpan panjang P dalam d_{uv} Buat sebuah graf lengkap K pada simpul-simpul di S Untuk setiap sisi e pada graf lengkap K Masukkan nilai d_{uv} pada bobot sisi e, di mana u dan v adalah titik ujung e Cari <i>matching</i> sempurna M pada K dengan total bobot sisi minimum Untuk setiap sisi e pada <i>matching</i> sempurna M Anggap P sebagai jalur terpendek di G antara titik akhir sisi e Untuk setiap sisi f pada jalur P Tambahkan graf G sebuah duplikasi sisi f, termasuk bobot sisinya Misalkan G^X sebuah graf Euler yang dibentuk dengan penambahan duplikasi sisi pada graf G dari langkah sebelumnya Bentuk sebuah rute Euler W pada G^X Rute W tersebut merupakan rute optimal tukang pos dari graf awal G</p>
--

Pada graf tersebut [gambar 2.5], setiap sisi pada *matching* sempurna yang diperoleh dari Algoritma pada Tabel 1 mewakili sebuah rute pada G . Sisi-sisi pada rute tersebut merupakan hasil duplikasi. Contohnya untuk memperoleh graf Euler G^X [gambar 2.6], rute Euler untuk graf G^X dalam kasus ini adalah sebuah rute optimal tukang pos untuk G . Rute tersebut diberikan pada runtunan simpul: [2]

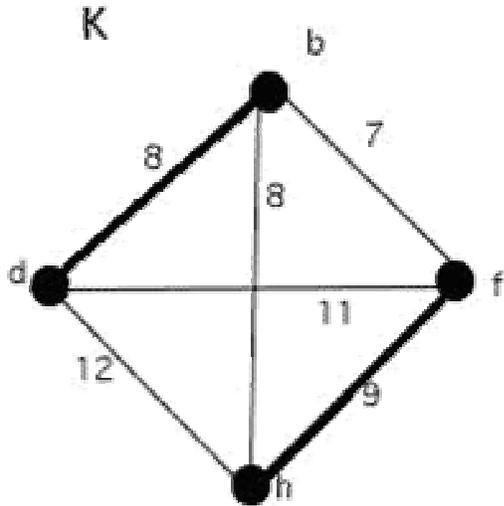
< a, b, c, f, e, b, e, d, e, h, i, f, i, h, g, d, a >

6. Kesimpulan

Dampak dari Teka-Teki Jembatan Konigsberg sungguh luar biasa. Teka-teki tersebut telah membuka jalan bagi terciptanya teorema baru yang disebut teorema graf. Aplikasi teorema graf



Gambar 2.4 Graf berbobot dari Teka-Teki Tukang Pos Cina



Gambar 2.5

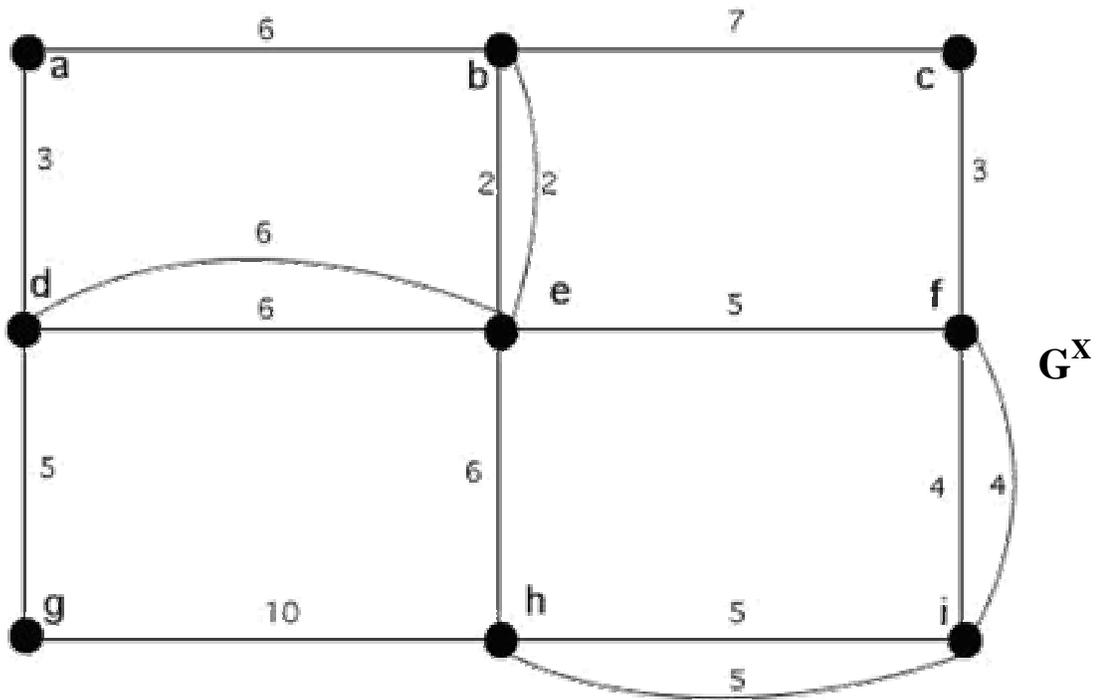
sangat beragam di bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

Solusi permasalahan pada Teka-Teki Tujuh Jembatan Konigsberg dapat diperoleh dengan

menganalogikan setiap jembatan sebagai sisi dan setiap daratan sebagai simpul pada graf, sehingga terbentuk sebuah graf lengkap. Dan dengan memperhitungkan derajat dari setiap simpul yang terdapat dalam graf, menggunakan metode yang diungkapkan dalam pembuktian di atas, kita akan dapat mengetahui apakah graf tersebut merupakan suatu lintasan di mana setiap sisi dilalui hanya satu kali saja.

Fakta bahwa teorema graf lahir ketika Euler menyelesaikan masalah berdasarkan Teka-Teki Jembatan Konigsberg menyatakan hubungan tersendiri antara jaringan spasial (seperti jalur transportasi) dengan graf. Dalam memodelkan suatu jaringan spasial, sebagai tambahan, selain simpul dan sisi, biasanya diberikan sebuah nilai selaku bobot berupa panjang atau satuan ukuran nilai lainnya yang menyatakan kuantitas segmen jalan yang diwakili oleh sisi pada graf tersebut. Dengan demikian, kitadapat pula mencari suatu rute pada jaringan spasial tersebut yang menggunakan sarana atau beban yang minimal, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada solusi Teka-Teki Tukang Pos Cina.

Gambar 2.6 Berat minimum matching sempurna dari graf lengkap K



Setelah mempelajari lebih dalam mengenai salah satu aplikasi Teorema Euler, saya mengetahui bahwa hasil kerja Euler mengenai graf telah menjadi sebuah kunci penting dalam keberhasilan penyelesaian berbagai aplikasi masalah di dunia nyata. Abstraksi dari hasil kerjanya dan semua peningkatan yang diberikan bertindak sebagai dasar dari berbagai bidang keilmuan baik yang telah ada sebelumnya maupun bagi yang baru muncul.

VII. Edmonds, J. and Johnson, E. (1973), *Matching Euler tours and the Chinese postman*, *Math. Programming* 5, pp, 88-124.

VIII. Hierholzer, C. (1873), *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren*. *Math. Ann.* 6, pp, 30- 32.

DAFTAR PUSTAKA

I. Chartrand, Gary (2005), *Introduction to Graph Theory*, pp, 133-138.

II. Gross, Jonathan (1999), *Graph Theory and Its Applications*, pp, 208-119.

III. Hartsfield, Nora (1990), *Pearls in Graph Theory A comprehensive introduction*, pp, 49-55.

IV. Harary, Frank, (1972), *Graph Theory*, pp, 64-65, 204.

V. Wilson J. Robin, (1976), *Graph Theory 1936-1936*, pp, 2-20.

VI. Guan, Meigu, (1962), *Graphic programming usind odd and even points*, *Chinese Math*, pp, 273- 274.