Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

UTS *IF2153 Matematika Diskrit*
Semester Ganjil Tahun 2006/2007
Hari/Tanggal: Kamis, 12 Oktober 2006
Dosen: Harlili, M.Sc. (K-01), Ir. Rinaldi Munir, M.T (K-02)
Waktu: 120 menit

Berdo'alah terlebih dahulu sebelum mengerjakan ujian ini.

1. Diberikan dua buah premis berikut:
   (i) Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukai logika.
   (ii) Jika matematika mudah, maka logika tidak sulit.

   Tunjukkan dengan pembuktian argumen (atau cara lain) apakah masing-masing konklusi berikut sah (valid) atau tidak berdasarkan dua premis di atas:
   a) Bahwa matematika tidak mudah atau logika sulit. (7,5)
   b) Bahwa matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika. (7,5)

Jawaban:

Misalkan:
p : Logika sulit
q : Banyak mahasiswa menyukai logika
r : Matematika mudah

maka kedua premis tersebut ditulis sebagai
(i) $p \vee \sim q$
(ii) $r \rightarrow \sim p$

(a) Argumen soal a dapat ditulis menjadi:

$p \vee \sim q$
$r \rightarrow \sim p$

$\sim r \vee p$

Tabel kebenaran:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$r \rightarrow \sim p$	$\sim r \vee p$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	**T**	**T**	**T**
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	*T*	*T*	*F*
F	F	F	T	T	**T**	**T**	**T**

Dari tabel di atas terdapat tiga baris (yang dicetak tebal) dimana semua premis dan konklusi benar secara bersama-sama, tetapi terdapat baris (dicetak miring) dimana semua premis benar tetapi konlusi salah, dengan kata lian argumen tersebut tidak valid. Jadi terdapat ketidakonsistenan sehingga kita katakan bahwa kesimpulan bahwa ”matematika tidak mudah atau logika sulit” adalah tidak valid.

(b) Argumen soal b dapat ditulis menjadi:

$p \vee \sim q$
$r \rightarrow \sim p$

$q \rightarrow \sim r$

Tabel kebenaran:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$r \rightarrow \sim p$	$q \rightarrow \sim r$
T	T	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	**T**	**T**	**T**
T	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	**T**	**T**	**T**
F	F	F	T	T	**T**	**T**	**T**

Dari tabel di atas terdapat empat baris (yang dicetak tebal) dimana semua premis dan konklusi benar secara bersama-sama; tidak terdapat inkonsistensi. Jadi kesimpulan bahwa ” matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika” adalah valid.

2. Buktikan dengan menggunakan aljabar himpunan:

$A \cup (B - A) = A \cup B$ (10)

<u>Jawaban</u>:

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A})$$
$$A \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$$
$$A \cup (B - A) = (A \cup B) \cap U$$
$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

3. Tentukan banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 200 (termasuk 1 dan 200) yang habis dibagi 4 atau 6 tetapi tidak habis dibagi 9. (20)

<u>Jawaban</u>:

Misal : $p =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 4

$q =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 6

$r =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 9

$t =$ banyaknya bilangan seperti yang dimaksud di soal

maka,

$$n(p) = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, \quad n(q) = \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor = 33$$
$$n(p \cap q) = \left\lfloor \frac{200}{12} \right\rfloor = 16, \quad n(p \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor = 5$$
$$n(q \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{18} \right\rfloor = 11, \quad n(p \cap q \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor = 5$$
$$\begin{aligned} n(t) &= n(p \cup q) - n((p \cup q) \cap r) \\ &= n(p) + n(q) - n(p \cap q) - n((p \cap r) \cup (q \cap r)) \\ &= n(p) + n(q) - n(p \cap q) - (n(p \cap r) + n(q \cap r) - n(p \cap q \cap r)) \\ &= 50 + 33 - 16 - (5 + 11 - 5) \\ &= 83 - 27 \\ &= 56 \end{aligned}$$

4. Perlihatkan (himpunan kuasa, $\subseteq$) adalah *poset* artinya relasi himpunan bagian pada himpunan kuasa dari himpunan *S* adalah terurut parsial. Jelaskan langkah per langkahnya. (20)

<u>Jawaban</u>:

Himpunan kuasa adalah himpunan yang anggotanya himpunan-himpunan bagian.

Misal S = {a,b,c,...}

Himpunan Kuasa S = $\{\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, ...\{a,b\}....\{a,b,c,...\}\}$

Relasi R = {(A,B)|A $\subseteq$ B, A,B di Himpunan kuasa }

Untuk memperlihatkan (himpunan kuasa, $\subseteq$) adalah *poset* berarti harus diperlihatkan relasi R bersifat refleksif, antisimetri, dan transitif.

R bersifat refleksif karena A $\subseteq$ A, bagi setiap A di himpunan kuasa.
R bersifat antisimetri karena jika A $\subseteq$ B, B $\subseteq$ A, maka berlaku A=B.
R transitif karena jika A $\subseteq$ B, B $\subseteq$ C, maka A $\subseteq$ C
Jadi (himpunan kuasa, $\subseteq$) adalah poset.

5. Tentukan semua balikan dari 9 (mod 11). (10)

   Jawaban:

   Misalkan $9^{-1} = x$

   Maka $9x \equiv 1 \pmod{11}$ atau $9x = 1 + 11k$ atau $x = \dfrac{1+11k}{9}$

   Dengan mencoba semua nilai k yang bulat (k = 0, -1, -2, ..., 1, 2, ...) maka diperoleh x = 5. Semua bilangan lain yang kongruen dengan 5 (mod 11) juga merupakan solusi, yaitu –6, 16, 27, ...

6. Carilah semua bilangan ganjil positif yang bersisa 3 jika dibagi 4 (*Petunjuk*: nyatakan bilangan ganjil sebagai $2k + 1$). (10)

   Jawaban:

   Misal bilangan tersebut adalah $x = 2k+1$ untuk k bilangan bulat tidak negatif.

   $2k + 1 \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow 2k \equiv 2 \pmod 4$

   $2k = 4n + 2$ atau $k = 2n + 1$ untuk n bilangan bulat tidak negatif.

   Berarti $x = 2(2n+1)+1 = 4n+3$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

   Jadi bilangan-bilangan yang memenuhi adalah $x = \{3, 7, 11, 15, 19, 27, 35, \ldots\}$

7. Buktikan dengan induksi matematika bahwa semua bilangan berbentuk $x = 11...1_n$ (n adalah jumlah perulangan angka 1, misalnya n = 4 maka x = 1111) pasti kongruen dengan 0 (mod 11) atau 1 (mod 11) (misalnya $111 \equiv 1 \pmod{11}$ dan $111111 \equiv 0 \pmod{11}$). (15)

   Jawaban:

   (i) Basis: untuk n = 1, maka $1 \equiv 1 \pmod{11}$. Benar.

   (ii) Rekurens:

   Tinjau dua kasus:

   - Andaikan bahwa 11...1 (n buah 1) $\equiv 1 \pmod{11}$ adalah benar, maka harus ditunjukkan bahwa 11...1 (n+1 buah 1) $\equiv 1 \pmod{11}$ atau 11...1 (n+1 buah 1) $\equiv 0 \pmod{11}$. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

     11...1 (n+1 buah 1) $\equiv$ 11...1 (n buah 1) $\times 10 + 1 \pmod{11}$
     $\equiv 1 \times 10 + 1 \pmod{11}$
     $\equiv 0 \pmod{11}$

   - Andaikan bahwa 11...1 (n buah 1) $\equiv 0 \pmod{11}$ adalah benar, maka harus ditunjukkan bahwa 11...1 (n+1 buah 1) $\equiv 1 \pmod{11}$ atau 11...1 (n+1 buah 1) $\equiv 0 \pmod{11}$. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
11...1(n+1 \text{ buah } 1) &\equiv 11...1\ (n \text{ buah } 1) \times 10 + 1 \pmod{11} \\
&\equiv 0 \times 10 + 1 \pmod{11} \\
&\equiv 1 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Karena langkah (i) dan (ii) benar, maka terbukti bahwa semua bilangan berbentuk $x = 11...1_n$ pasti kongruen dengan 0 (mod 11) atau 1 (mod 11).