Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM/Kls:…………………………
T.tangan:…………………………

(Shortlist) Kuis ke-3 IF2153 Matematika Diskrit (3 SKS) – Kombinatorial dan Peluang Diskrit; Graf
Dosen: Bapak Rinaldi Munir, Ibu Harlili
Kamis, 30 November 2006
Waktu: 45 menit

---

1. **(Fajrin)** Tentukan berapa banyak kata yang panjangnya empat huruf (huruf merupakan elemen dari himpunan { *A, B, C, … , Z* }) dengan ketentuan bahwa tidak boleh ada dua huruf berurutan yang sama ? (Contoh : KUKU diperbolehkan, namun ROOT tidak diperbolehkan) **(25)**

   Jawab :
   - Untuk huruf pertama, kita bebas memilih huruf apa saja → ada 26 cara
   - Untuk huruf kedua, kita tidak boleh memilih huruf yang sama dengan huruf pertama → 25 cara
   - Untuk huruf ketiga, kita tidak boleh memilih huruf yang sama dengan huruf kedua → 25 cara
   - Untuk huruf keempat, kita tidak boleh memilih huruf yang sama dengan huruf ketiga → 25 cara

   Jadi total ada 26 * 25 * 25 * 25 = 406250 kemungkinan.

2. **(Fajrin)** Tentukan berapa banyak kata yang panjangnya 8 huruf dan hanya terdiri dari 3 huruf A dan 5 huruf B ? (Petunjuk : Pertama-tama perhatikan BBBBB. Kemudian, perhatikan di mana tiga buah huruf A bisa diletakkan di antaranya). **(30)**

   Jawab :
   _B_B_B_B_B_ → Huruf A bisa diletakkan di celah-celah tersebut, dan maksimal hanya mungkin terdapat satu huruf A di satu celah. Dengan demikian, ini menjadi persoalan kombinasi, yaitu memasukkan 3 huruf yang sama ke dalam 6 tempat yang berbeda. Dengan demikian, banyak kata yang mungkin adalah $C(6,3) = 20$ kemungkinan.

3. **(Fajrin)** a) Apakah K_{14} adalah graf Euler ? Jelaskan! **(10)**
   b) Apakah K_{15} adalah graf Euler ? Jelaskan! **(10)**

   Jawab :
   a) Tidak, karena setiap simpulnya berderajat 13 → ganjil
   b) Ya, karena setiap simpulnya berderajat 14 → genap

4. **(Fajrin)** Suatu graf memiliki jumlah simpul ganjil. Apabila tiap simpul berderajat sama, tunjukkan bahwa graf tersebut adalah graf Euler! **(25)**

   Jawab :

Apabila tiap simpul berderajat ganjil, berarti terdapat sejumlah ganjil simpul yang berderajat ganjil. Hal ini bertentangan dengan lemma jabat tangan. Dengan demikian, haruslah tiap simpul berderajat genap. Dapat disimpulkan bahwa graf tersebut adalah graf Euler.

5. **(Ilham)** Berapa banyak solusi bilangan bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ jika $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 2x_1$, $x_3 > 3x_2$? **(30)**

   Jawab :

   Analogikan dengan membagi 20 buah bola yang identik ke dalam 3 buah kotak, sebutlah kotak x_1, x_2, dan kotak x_3.

   Nilai x_1 ada 3 kemungkinan : 0, 1 dan 2. Untuk masing – masing nilai x_1, kita rinci perhitungan untuk x lainnya :

   Kasus $x_1 = 0$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 20$. Batas minimal untuk x_2 dan x_3 adalah 0, karena itu bagikan 20 buah bola sisa ke dalam x_2 dan x_3, semuanya ada $C(20 + 2 - 1, 20) = C(21,20)$ cara.

   Kasus $x_1 = 1$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 19$. Isikan 2 kedalam x_2 (karena $x_2 \geq 2x_1$) dan 7 kedalam x_3 (karena $x_3 > 3x_2$) bagikan 10 buah bola sisa ke dalam x_2 dan x_3, semuanya ada $C(10 + 2 - 1, 10) = C(11,10)$ cara.

   Kasus $x_1 = 2$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 18$. Isikan 4 kedalam x_2 (karena $x_2 \geq 2x_1$) dan 13 kedalam x_3 (karena $x_3 > 3x_2$) bagikan 1 buah bola sisa ke dalam x_2 dan x_3, semuanya ada $C(1 + 2 - 1, 1) = C(2,1)$ cara.

   Jadi solusi seluruhnya = $C(21,20) + C(11,10) + C(2,1) = 21 + 11 + 2 = 34$ cara.

6. **(Ilham)** Buktikan bahwa $\sum (-1)^{n-k} C(n,k) = 0$. **(25)**

   Jawab :

   $(x + y)^n = \sum C(n,k)\, x^{n-k} y^k$

   ambil x = -1, y = 1, sehingga

   $(-1+1)^n = \sum C(n,k)\, (-1)^{n-k}\, 1^k$

   $0 = \sum (-1)^{n-k} C(n,k)$ (terbukti)

7. **(Ilham)** Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ? **(25)**

   Jawab :

   Tiap simpul berderajat sama -> graf teratur.

   Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah e = nr/2. Jadi, n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r.

   Untuk r = 4, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu n = 32/4 = 8.

Untuk r yang lain (r > 4 dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32)
r = 8 -> n = 32/8 = 4 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.
r = 16 -> n = 32/16 = 2 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.
Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

8. **(Ilham)** Apakah setiap graf lengkap adalah graf Hamilton ? Jelaskan ! **(20)**

Jawab :

Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n (n ≥ 3) simpul adalah graf Hamilton bila derajat tiap simpul paling sedikit n/2 (yaitu, d(v) ≥ n/2 untuk setiap simpul v di G). Sebuah graf lengkap yang memiliki n simpul, maka derajat tiap simpulnya adalah (n-1) . Karena (n-1) ≥ n/2, maka graf lengkap adalah graf Hamilton.

9. **(Zakka)** Tentukan banyaknya solusi dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

dengan x_i adalah bilangan asli.

Jawab :

Karena x_i asli, berarti $x_i \geq 1$, atau bisa juga persamaan diubah menjadi $y_i = x_i - 1$ sehingga

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$

dan persamaan terakhir ini dapat diselesaikan dengan kombinasi dengan perulangan, sehingga banyaknya cara adalah

$$C_3^{4+3-1} = C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{720}{6.6} = 20$$

10. **(Zakka)** Tersedia 6 huruf: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Berapa banyaknya cara pengurutan 4 huruf jika huruf *c* harus ada dan boleh ada huruf yang diulang

Jawab :

Banyaknya cara adalah

(6)(6)(6) + (5)(6)(6) + (5)(5)(6) + (5)(5)(5) = 216 + 180 + 150 + 125
= 671

11. **(Zakka)** Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:
a) 5, 2, 3, 2, 4
b) 4, 4, 3, 2, 3
c) 3, 3, 2, 3, 2
d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawab :

a) Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5

b) Mungkin [contoh banyak]

c) Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)

d) Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

12. **(Zakka)** a) Apakah setiap graf Hamilton adalah graf Euler? Berikan penjelasan.
b) Apakah setiap graf Euler adalah graf Hamilton? Berikan penjelasan.
c) Jika a) dan b) keduanya adalah "tidak", berikan 2 contoh graf Hamilton yang juga merupakan graf Euler (jumlah simpul 2 contoh ini harus berbeda).

Jawab :

a) Tidak, karena pada graf Hamilton mungkin saja ada sisi yang tidak dilewati (asalkan semua simpul sudah dilewati, maka sudah benar)

b) Tidak, karena pada graf Euler, mungkin saja ada simpul yang dilewati lebih dari satu kali atau mungkin saja ada simpul yang tidak dilewati (simpul terpencil / tidak bersisi)

c) Contoh: Segi-*n* dengan simpul adalah tiap titik sudut

13. **(Mira)** Berapa banyak cara untuk membagi 10 butir kelereng kepada 8 anak?
Jawab:
$C_{(8+10-1,\ 10)} = \frac{17!}{10!7!} = 19448$ cara

14. **(Mira)** Berapa banyak cara untuk membagi 5 buah kartu kepada 4 orang pemain?
Jawab:
$C_{(52,\ 5)} \,.\, C_{(47,\ 5)} \,.\, C_{(42,\ 5)} \,.\, C_{(37,\ 5)} = \frac{52!\ .\ 47!\ .\ 42!\ .\ 37!}{5!47!5!42!5!37!5!32!} =$

15. **(Mira)** Ada 8 orang pembalap dalam sebuah balapan mobil, pemenang pertama mendapat emas, kedua perak, dan ketiga perunggu. Berapa banyak cara untuk memenangkan medali tersebut jika semua hasil kemungkinan dapat terjadi dan tidak ada seri?
Jawab:
$P_{(8,\ 3)} = 8\ .\ 7\ .\ 6 = 336$ cara

16. **(Mira)** Gambarkan :
    - 2 buah graf yang memiliki lintasan Hamilton tetapi tidak memiliki sirkuit Hamilton
    - 2 buah graf yang saling planar menurut Teorema Kuratowski