

Kuis ke-2 IF2153 Matematika Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika dan Teori Bilangan Bulat

Dosen: Bapak Rinaldi Munir, Ibu Harlili

Kamis, 5 Oktober 2006

Waktu: 45 menit

1. **(Fajrin)** Diketahui suatu barisan bilangan  $x_n$  dengan  $x_1 = 1$  dan  $x_2 = 2$  dan

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \text{ untuk } n \geq 3. \text{ Dengan prinsip induksi kuat, buktikan bahwa}$$

$1 \leq x_n \leq 2$  untuk setiap bilangan asli  $n$ . **(25)**

**Jawab :**

Untuk  $n=1$  dan  $n=2$ , pernyataan tersebut jelas benar. Asumsikan pernyataan tersebut benar untuk semua bilangan asli  $1, 2, \dots$ , hingga  $k$ . Akan dibuktikan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk  $n = k + 1$ . Berdasarkan hipotesis,  $1 \leq x_{k-1} \leq 2$  dan

$$1 \leq x_k \leq 2. \text{ Dengan demikian, } x_{k+1} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1 \text{ dan}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \leq \frac{2+2}{2} = 2, \text{ sehingga } 1 \leq x_{k+1} \leq 2 \text{ benar. Dengan demikian,}$$

berdasarkan prinsip induksi matematika kuat,  $1 \leq x_n \leq 2$  untuk setiap bilangan asli  $n$ .

2. **(Zakka)** Sejumlah  $n$  pasang suami-istri akan mengisi tempat duduk sebanyak  $2n$  mulai dari ujung kiri sampai ujung kanan. Akan tetapi, semua suami-istri ini pencemburu, sehingga mereka hanya mau orang yang duduk di sebelah pasangannya (sebelah kiri maupun kanan) adalah kosong (jika berada di ujung), dirinya, atau orang yang berjenis kelamin sama dengan pasangannya (laki-laki dengan laki-laki, perempuan dengan perempuan). Buktikan dengan induksi matematika bahwa akan selalu ada suami-istri yang duduk bersebelahan. **(25)**

Basis: untuk satu pasangan, maka pasti mereka duduk bersebelahan, benar.

Rekurens: dimisalkan untuk  $n$  pasangan ada pasangan yang bersebelahan, akan dibuktikan untuk  $n+1$  pasang.

Bukti: pada  $n$  pasang sebut saja S dan I (S = laki-laki, I = perempuan) bersebelahan.

Kemudian pasangan ke- $n+1$  adalah H dan W (H = laki-laki, W = perempuan).

Andai keduanya duduk tidak diantara S dan I, maka S dan I tetap bersebelahan.

Andai salah satu duduk di antara S dan I, sebut saja H, maka haruslah I juga karena H tidak boleh bersebelahan dengan W (karena mereka beda jenis kelamin dan bukan pasangan), sehingga H dan W duduk bersebelahan. Begitu juga jika W duduk antara S dan I, H harus duduk antara S dan I juga karena W dan S tidak boleh duduk bersebelahan, sehingga H dan W bersebelahan.

Menurut PIM, terbukti bahwa akan selalu ada suami-istri yang duduk bersebelahan.

3. **(Ilham)** Buktikan jika,  $a \equiv b(\text{mod } m)$  dan  $c \equiv d(\text{mod } m)$ , maka berlaku hubungan  $ac \equiv bd(\text{mod } m)$ . **(25)**

Jawab :

$$a = b + k_1m$$

$$c = d + k_2m$$

maka

$$a \times c = (b + k_1m)(d + k_2m)$$

$$ac = bd + bk_2m + dk_1m + k_1k_2m^2$$

$$ac = bd + Km \quad \text{dengan } K = bk_2 + dk_1 + k_1k_2m$$

$$ac \equiv bd(\text{mod } m) \text{ (terbukti)}$$

4. **(Mira)** Nyatakan PBB(350, 128) sebagai kombinasi linier dari 350 dan 128. **(25)**

Jawab :

$$350 = 2(128) + 94$$

$$128 = 1(94) + 34$$

$$94 = 2(34) + 26$$

$$34 = 1(26) + 8$$

$$26 = 3(8) + 2$$

$$8 = 4(2) + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(350, 128) = 2**

Substitusi :

$$\begin{aligned} 2 &= 26 - 3(8) \\ &= 26 - 3(34 - 1(26)) \\ &= 4(26) - 3(34) \\ &= 4(94 - 2(34)) - 3(34) \\ &= 4(94) - 11(34) \\ &= 4(94) - 11(128 - 1(94)) \\ &= 15(94) - 11(128) \\ &= 15(350 - 2(128)) - 11(128) \\ &= 15(350) - 41(128) \end{aligned}$$

Jadi, kombinasi linier dari 350 dan 128 adalah **2 = 15(350) - 41(128)**

5. **(Mira - Bonus)** Tentukan karakter uji dari no ISBN 957-2309-87 **(15)**

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{Karakter uji} &= \left( \sum_{i=1}^9 iX_i \right) \text{ mod } 11 \\ &= (1.9 + 2.5 + 3.7 + 4.2 + 5.3 + 6.0 + 7.9 + 8.8 + 9.7) \text{ mod } 11 \\ &= (9 + 10 + 21 + 8 + 15 + 0 + 63 + 64 + 63) \text{ mod } 11 \\ &= 253 \text{ mod } 11 = 0 \end{aligned}$$

Jadi, karakter uji ISBN nya adalah 0