<u>Shortlist soal-soal yang diajukan untuk Kuis 1 IF2153 Matematika Diskrit</u>

1. **(Fajrin)** Diberikan himpunan $S = \{1,2,...,8\}$.
   a. Berikan contoh yang menunjukkan bahwa *S* dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan tidak kosong sehingga jumlah elemen-elemen dalam subhimpunan pertama sama dengan jumlah elemen-elemen dalam subhimpunan kedua. **(10)**
   b. Buktikan bahwa *S* tidak dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan tidak kosong sehingga hasil kali elemen-elemen dalam subhimpunan pertama sama dengan hasil kali elemen-elemen dalam subhimpunan kedua. **(15)**

   Jawab :
   a. Perhatikan bahwa 1 + 2 + ... + 8 = 36. Jadi, kita cukup mencari subhimpunan dari *S* sehingga jumlah elemen-elemen di dalamnya adalah 36/2 = 18, karena dengan demikian, otomatis himpunan yang merupakan komplemen dari subhimpunan tersebut juga memiliki jumlah elemen-elemen 18. $A = \{1,2,3,4,8\}$ (sehingga $A^c = \{5,6,7\}$) adalah salah satu contohnya.

   b. Misalkan *S* dapat dipartisi sesuai ketentuan tersebut, misal menjadi dua himpunan *A* dan *B*. Perhatikan bilangan tujuh. Tujuh pasti menjadi salah satu elemen dari himpunan *A* atau *B*, tapi tidak keduanya. Misalkan $7 \in A$. Dengan demikian, hasil kali elemen-elemen *A* habis dibagi tujuh. Namun, karena 7 bilangan prima dan 7 tidak membagi satu pun di antara bilangan lain dalam *S*, maka 7 tidak mungkin membagi hasil kali elemen-elemen *B.* Artinya tidak mungkin hasil kali elemen-elemen dalam subhimpunan pertama sama dengan hasil kali elemen-elemen dalam subhimpunan kedua.

2. **(Fajrin)** Misalkan *A* suatu himpunan, dan misalkan $K(A) \subseteq P(A)$. *K(A)* disebut *antichain* dari himpunan *A* jika tidak ada dua elemen dari *K(A)* sedemikian hingga elemen yang satu merupakan subhimpunan dari elemen lainnya. Sebagai contoh, jika *A* = {1,2}, maka *K(A)* = { {1}, {1,2} } bukan *antichain* dari *A* karena $\{1\} \subseteq \{1,2\}$. Daftarkan enam buah *antichain* dari himpunan *B* = { a, b }. **(30)**
   Jawab :
   $P(B) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Subhimpunan dari $P(B)$ hanya mungkin memiliki 0 elemen, 1 elemen, 2 elemen, 3 elemen, atau 4 elemen.
   0 elemen → {} (*antichain* dari *B*)
   1 elemen → {{}} ,{{*a*}} ,{{*b*}} ,{{*a*,*b*}} (seluruhnya *antichain* dari *B*)
   2 elemen → {{*a*},{*b*}} (*antichain* dari *B*)

3. **(Fajrin)** Buktikan bahwa $f(x) = 5x \bmod 13$ adalah fungsi bijektif untuk daerah asal dan daerah hasil fungsi tersebut adalah bilangan bulat dari 0 hingga 12 (termasuk 0 dan 12). **(25)**

   Jawab :
   karena jumlah elemen daerah asal sama dengan daerah hasil, maka dengan menunjukkan fungsi tersebut injektif, maka otomatis fungsi tersebut juga bersifat surjektif, dengan demikian fungsi tersebut bersifat bijektif. Untuk membuktikan

bahwa fungsi tersebut injektif, maka cukup ditunjukkan bahwa jika $f(a) = f(b)$, maka $a = b$. Jika $f(a) = f(b)$, maka $5a \bmod 13 = 5b \bmod 13$, atau dengan kata lain, $5a \equiv 5b \bmod 13$, atau $13 | 5a - 5b$, atau $13 | 5(a-b)$. Karena 13 tidak membagi 5, dan 13 adalah bilangan prima, maka $13 | a - b$. Dengan kata lain, $a - b = 13k \Leftrightarrow a = b + 13k$ untuk suatu bilangan bulat *k*. Akan tetapi domain fungsi tersebut terbatas dari 0 hingga 12, artinya haruslah $a = b$. Jadi, fungsi tersebut adalah fungsi injektif, dan dengan demikian, maka fungsi tersebut adalah fungsi bijektif.

4. **(Fajrin)** Tentukan apakah relasi-relasi di bawah ini merupakan relasi kesetaraan atau bukan (jika bukan, sebutkan sifat-sifat yang tidak berlaku sehingga relasi tersebut tidak dapat dikatakan merupakan relasi kesetaraan) :
   a. Relasi { (*a*,*b*) | *a* memiliki orang tua yang sama dengan *b* } **(5)**
   Ya

   b. Relasi { (*a*,*b*) | jarak kota *a* ke kota Bandung sama dengan jarak kota *b* ke kota Bandung } **(5)**
   Ya

   c. Relasi { (*a*,*b*) | jarak kota *a* ke kota *b* kurang dari 50 kilometer } **(5)**
   Tidak, karena sifat menghantar tidak dipenuhi.

   d. Relasi { (*a*,*b*) | jika *a* adalah pernyataan yang bernilai benar, maka pernyataan *b* bernilai benar } **(5)**
   Tidak, karena sifat tolak setangkup tidak dipenuhi.

   e. Relasi { (*a*,*b*) | *a* dan *b* adalah dua himpunan tidak kosong yang irisannya bukan himpunan kosong } **(5)**
   Tidak, karena sifat menghantar tidak dipenuhi.

5. **(Fajrin)** Tunjukkan bahwa $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ merupakan tautologi, namun $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ bukan merupakan tautologi. **(25)**

   Jawab :
   $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv (\sim (p \wedge q)) \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q)$
   $\equiv T \vee T \equiv T$ (tautologi) **(15)**

   Apabila *p* bernilai true dan *q* bernilai false, maka $p \vee q$ bernilai true, sementara $p \wedge q$ bernilai false, sehingga $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ bernilai false. **(10)**

6. **(Fajrin)** Tunjukkan bahwa $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ tanpa menggunakan tabel kebenaran. **(25)**

   Jawab :

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim (\sim q) \vee \sim p) \wedge (\sim (\sim p) \vee \sim q)$
$\equiv (\sim q \to \sim p) \wedge (\sim p \to \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$

7. **(Zakka)** Buktikan dengan hukum logika (tanpa tabel kebenaran) bahwa
$p \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ kontradiks i (ekivalen dengan F),
tuliskan pula hukum yang digunakan pada setiap langkahnya
Bukti :
$p \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge ((p \to q) \wedge (q \to p)) \wedge \sim q$ (definisi biimplikas i)
$\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \to p) \wedge \sim q$ (definisi implikasi)
$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \to p)$ (hukum asosiatif)
$\Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \to p)$ (hukum De Morgan)
$\Leftrightarrow F \wedge (q \to p)$ (hukum negasi)
$\Leftrightarrow F$ (hukum nulitas)
terbukti

8. **(Zakka)**
Tentukan banyaknya jumlah bilangan bulat antara 1 - 200 (termasuk 1 dan 200) yang habis dibagi 4 atau 6 tapi tidak habis dibagi 9
Jawab :
Misal : $p =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 4
$q =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 6
$r =$ banyaknya bilangan bulat antara 1 - 200 yang habis dibagi 9
$t =$ banyaknya bilangan seperti yang dimaksud di soal
maka,

$$n(p) = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, \quad n(q) = \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor = 33$$
$$n(p \cap q) = \left\lfloor \frac{200}{12} \right\rfloor = 16, \quad n(p \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor = 5$$
$$n(q \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{18} \right\rfloor = 11, \quad n(p \cap q \cap r) = \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor = 5$$
$$\begin{aligned} n(t) &= n(p \cup q) - n((p \cup q) \cap r) \\ &= n(p) + n(q) - n(p \cap q) - n((p \cap r) \cup (q \cap r)) \\ &= n(p) + n(q) - n(p \cap q) - (n(p \cap r) + n(q \cap r) - n(p \cap q \cap r)) \\ &= 50 + 33 + 16 - (5 + 11 - 5) \\ &= 99 - 11 \\ &= 88 \end{aligned}$$

9. **(Zakka)** Tentukan dan berikan penjelasan apakah fungsi dibawah ini merupakan

fungsi bijektif, injektif, surjektif, atau tidak ketiganya, untuk $f : N \to N$ (pemetaan dari bilangan asli ke bilangan asil)

a. $f(n) = n!$

b. $f(n) = n^2 - 4n + 10$

c. $f(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

d. $f(n) = n$

e. $f(n) = (n \bmod 100) + 1$

Jawab:

a. Karena $a > b \Rightarrow a! > b! \Rightarrow f(a) > f(b)$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Fungsi tersebut injektif.

Tidak ada n asli sehingga $f(n) = 3$. Fungsi tersebut tidak surjektif.

$\therefore$ fungsi tersebut injektif saja.

b. $f(1) = 1 - 4 + 10 = 7 = 9 - 12 + 10 = f(3)$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$f(n) = (n-2)^2 + 6 \geq 6$. Tidak ada n asli sehingga $f(n) = 5$.

Fungsi tersebut tidak surjektif.

$\therefore$ fungsi tersebut tidak ketiganya.

c. $f(3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = f(4)$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$\forall n \Rightarrow n = f(2n)$

Fungsi tersebut surjektif.

$\therefore$ fungsi tersebut surjektif saja.

d. Andai $f(a) = f(b)$

Berarti $a = f(a) = f(b) = b$

Fungsi tersebut injektif

$\forall n \Rightarrow n = f(n)$

Fungsi tersebut surjektif.

$\therefore$ fungsi tersebut bijektif.

e. $f(2) = 3 = f(102)$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$f(n) = (n \bmod 100) + 1$

$\leq 99 + 1 = 100$

Jadi tidak ada n sehingga $f(n) = 120$.

Fungsi tersebut tidak surjektif.

$\therefore$ fungsi tersebut tidak ketiganya.

10. **(Ilham)** The Logic Problem, taken from WFF'N PROOF, the Game of Logic, has these two assumption:
    1. "Logic is difficult or not many students like logic".
    2. "If mathematics is easy, then logic is not difficult".

    By translating these assumption into statements involving propositional variables and logical connectives, determine whether each of the following are valid conclusions of these assumptions:
    a) That mathematics is not easy, if many students like logic.
    b) That not many students like logic, if mathematics is not easy.
    c) That mathematics is not easy or logic is difficult.
    d) That logic is not difficult or mathematics is not easy.
    e) That if not many students like logic, then either mathematics is not easy or logic is not difficult.

    Answer :

    Misalkan : p : Logic is difficult
    q : many students like logic
    r : mathematics is easy

    maka, hipotesis diatas menjadi
    1. p v ~q
    2. r → ~p

    a) q → ~r
    b) ~r → ~q
    c) ~r v p
    d) ~p v ~r
    e) ~q → (~r v ~p)

    Pembuktian dengan penurunan hipotesis :
    1. p v ~q (Hipotesis)
    2. r → ~p (Hipotesis)
    3. q → p (Ekivalensi 1)
    4. p → ~r (Kontraposisi 2)
    5. q → ~r (Resolusi 3,4) a) valid
    6. r → ~q (Kontraposisi 5) b) tidak valid
    7. ~r v ~p (Ekivalensi 2) c) tidak valid

8. ~p v ~r (Ekivalensi 7) d) valid

11. **(Ilham)** Determine whether the symmetric difference is associative; that is, if A, B, and C are sets, does it follow that A + (B + C) = (A + B) + C ?

Answer :

$$\begin{aligned}
A + (B + C) &= (A + B) + C \\
&= (A+B)\sim C + \sim(A+B)C \\
&= (A\sim B+\sim AB)\sim C + \sim(A\sim B + \sim AB)C \\
&= A\sim B\sim C + \sim AB\sim C + (\sim A+B)(A+\sim B)C \\
&= A\sim B\sim C + \sim AB\sim C + (\sim AA+\sim A\sim B+AB+B\sim B)C \\
&= A\sim B\sim C + \sim AB\sim C + (\sim A\sim B+AB)C \\
&= A\sim B\sim C + \sim AB\sim C + \sim A\sim BC + ABC \\
&= A(\sim B\sim C+BC) + \sim A(B\sim C+\sim BC) \\
&= A\sim(B+C) + \sim A\,(B+C) \\
A + (B + C) &= A + (B + C) \qquad \text{(Hk. Assosiatif berlaku)}
\end{aligned}$$

12. **(Ilham)** Jika *f* dan *f* o g keduanya merupakan fungsi injektif, apakah *g* merupakan fungsi injektif? Jelaskan!

Jawab :

Misalkan :

a,b E $D_{f\,o\,g}$

c,d E $R_{f\,o\,g}$

e,f E D_f

karena f o g injektif maka bayangan dari a dan b harus berbeda yaitu c atau d
karena f juga injektif maka bayangan dari e dan f harus berbeda yaitu c atau d
Oleh karena itu, fungsi g harus memetakan elemen D_g ke elemen D_f yang berbeda. Jika tidak, akan ada dua elemen yang mempunyai bayangan yang sama pada $R_{f\,o\,g}$.

Kesimpulannya g harus injektif.

13. **(Mira)** Tentukan sifat-sifat relasi di bawah ini :

a) {(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3),(1,3),(3,3),(2,4),(4,4)}

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) a → b
↓ ↑
c d

Jawab :

a) Refleksif, tidak setangkup, tidak tolak setangkup, menghantar
b) Tidak refleksif, tidak setangkup, tidak tolak setangkup, tidak menghantar
c) refleksif, tidak setangkup, tolak setangkup, menghantar

14. **(Mira)** Buktikan dengan menggunakan hukum operasi logika :

$$(\overline{A \cap B - A \cup} B) = \overline{B \cap A}$$

Jawab :

15. **(Mira)** Diketahui pernyataan sebagai berikut :

p : Mahasiswa terlambat melakukan daftar ulang
q : Mahasiswa diperbolehkan mengambil jumlah sks normal
r : Mahasiswa telah menyelesaikan semua persyaratan administrasi dan akademik

Terjemahkan pernyataan di bawah ini ke dalam proposisi logika :

a. Jika mahasiswa terlambat melakukan daftar ulang maka mahasiswa tidak diperbolehkan mengambil jumlah sks normal
b. Jika mahasiswa telah menyelesaikan semua persyaratan administrasi dan akademik dan tidak terlambat melakukan daftar ulang maka anda diperbolehkan mengambil jumlah sks normal
c. Mahasiswa telah menyelesaikan semua persyaratan administrasi dan akademik tetapi terlambat melakukan daftar ulang sehingga tidak diperbolehkan mengambil jumlah sks normal

Jawab :

a. $p \rightarrow \sim q$
b. $(r \wedge \sim p) \rightarrow q$
c. $(r \wedge p) \rightarrow \sim q$