Departemen Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Bandung

Solusi UTS *IF2151 Matematika Diskrit*
Semester Ganjil Tahun 2005/2006
Hari/Tanggal: Jumat, 14 Oktober 2005
Dosen: Ir. Rinaldi Munir, M.T (K-01), Harlili, M.Sc. (K-02),
Ir. Dwi Hendratmo W., Ph.D. (K-03)
Waktu: 120 menit

Berdo'alah terlebih dahulu sebelum mengerjakan ujian ini.

1. Dengan menggunakan hukum logika, tunjukkan bahwa $\sim(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$ (ekivalen secara logika). **(10)**

Solusi:

$$\begin{aligned} \sim(p \oplus q) &\equiv \sim((\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \\ &\equiv \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \\ &\equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \\ &\equiv p \leftrightarrow q \end{aligned}$$

2. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ **(10)**

Solusi:

$$\begin{aligned} (A-B)-C &= \left(A \cap \overline{B}\right) - C \\ &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} \\ &= A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \\ &= A \cap \left(\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \varnothing\right) \\ &= A \cap \left(\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{C}\right)\right) \\ &= A \cap \left(\overline{C} \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) \\ &= \left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right) \\ &= (A-C) \cap \overline{\left(B \cap \overline{C}\right)} \\ &= (A-C) \cap \overline{(B-C)} \\ &= (A-C)-(B-C) \end{aligned}$$

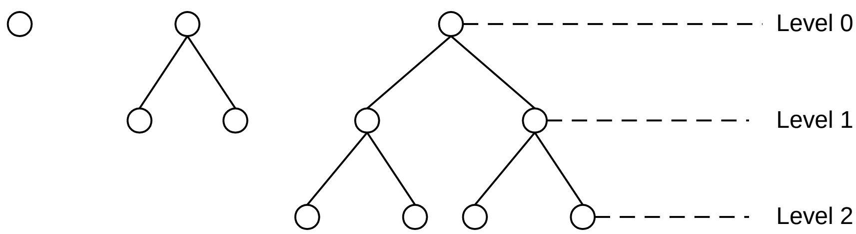
3. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan sedemikian sehingga $A \oplus C = B \oplus C$. Pada kasus ini, haruskah $A = B$? (Berikan bukti yang menjelaskan jawaban anda!) **(15)**

Solusi:

Misalkan $x \in A$ tetapi $x \notin B$. Jika $x \in C$ maka (dari definisi $\oplus$ atau *simmetric difference*) $x \notin (A \oplus C)$ tetapi $x \in (B \oplus C)$, yang memberikan kondisi yang bertentangan (kontradiksi).

Selanjutnya jika $x \notin C$, maka $x \in (A \oplus C)$ tetapi $x \notin (B \oplus C)$, yang juga memberikan kondisi yang bertentangan. Sehingga jika untuk setiap $x \in A$ maka $x \in B$, atau $A \subseteq B$. Dengan cara yang mirip dapat ditunjukkan $B \subseteq A$. Dengan demikan dapat disimpulkan bahwa $A = B$.

4. Gambar struktur di bawah ini di dalam informatika disebut **pohon biner lengkap** (*complete binary tree*). Setiap bulatan disebut simpul (*vertex*) dan garis disebut sisi (*edge*). Simpul-simpul pada pohon biner berada pada tingkatan yang disebut *level*. Level pohon dimulai dari 0 (akar atau *root*), sedangkan simpul-simpul pada tingkatan di bawahnya berada pada level 1, 2, 3, dan seterusnya. Pohon biner lengkap level n adalah pohon biner yang setiap simpulnya mempunyai tepat 2 cabang, kecuali simpul pada level terbawah. Tentukan rumus untuk jumlah seluruh simpul pada level n, lalu buktikan rumus tersebut dengan induksi matematik. **(15)**



Solusi:

Pada level 0 → jumlah simpul = 1 = 2^0
Pada level 1 → jumlah simpul = 2 = 2^1
Pada level 2 → jumlah simpul = 4 = 2^2
… dst
pada level n → jumlah simpul = 2^n

Proposisi: $p(n)$ = "Jumlah simpul pada level n di dalam pohon biner lengkap adalah 2^n "

Akan dibuktikan kebenaran proposisi tersebut dengan induksi matematik.

Basis induksi (n = 0). Jelas proposisi tersebut benar untuk $n = 0$ sebab pada level 0 hanya terdapat 2^0 = 1 buah simpul.

Langkah induksi ($n \geq 0$). Andaikan $p(n)$ benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$, yaitu jumlah simpul pada level n+1 adalah 2^{n+1}. Hal ini diperlihatkan sebagai berikut: simpul-simpul pada level $n + 1$ adalah anak-anak dari semua simpul pada level n. Setiap simpul pada level n menyumbangkan dua buah simpul anak. Menurut hipotesis induksi, jumlah simpul pada level n adalah 2^n, sehingga jumlah simpul pada level $n + 1$ adalah $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Karena basis induksi dan langkah induksi sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa $p(n)$ benar.

5. Misalkan m adalah suatu bilangan bulat positif dengan $m > 1$. Perlihatkan bahwa relasi R, yang dalam hal ini $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ adalah relasi kesetaraan (*equivalence*) pada himpunan bilangan bulat. **(10)**

Solusi:
R disebut relasi kesetaraan jika R refleksif, simetri, transitif.
Definisi: $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a - b$ habis dibagi m.
(i) R refleksif karena $a - a = 0$ dan 0 habis dibagi m. Jadi $a \equiv a$ (mod m) € R
(ii) R simetri karena jika $a \equiv b$ (mod m) € R artinya $a - b$ habis dibagi m, artinya:

$$a - b = km$$
$$-(a - \mathrm{b}) = -km$$
$$b - a = -km$$
$$b - a \text{ habis dibagi } m$$

Dari sini diperoleh $b \equiv a \pmod{m}$. Jadi jika $a \equiv b \pmod{m}$ € R maka $b \equiv a$ (mod m) € R.

(ii) R transitif karena jika $a \equiv b$ (mod m) € R dan $b \equiv c \pmod{m}$ € R artinya

$$a - b \text{ dan } b - c \text{ habis dibagi } m$$
$$a - b = km \text{ dan}$$
$$b - c = lm$$

Dijumlahkan $a - b$ dan $b - c$ diperoleh $a - c = km + lm = (k + l)m$
Dari sini diperoleh $a \equiv c \pmod{m}$. Jadi jika $a \equiv b \pmod{m}$ € R dan $b \equiv c \pmod{m}$ € R maka $a \equiv c \pmod{m}$ € R.
R refleksif, simetri, transitif. Jadi R relasi ekuivalen pada himpunan bilangan bulat.

6. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = x + 2$ adalah fungsi dari $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
   a. Tentukan fungsi komposisi f o g dari $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. **(10)**
   b. Periksa apakah fungsi f o g merupakan fungsi injektif (satu-ke-satu), surjektif (pada), bijektif (koresponden satu-ke-satu). **(10)**

Solusi:

(a) Fungsi komposisi f o $g = f(g(x)) = (x + 2)^2 + 1 = x^2 + 2x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$

(b) f o g **bukan** fungsi injektif karena ambil $x = -3$, f o $g = (-3)^2 + 4(-3) + 5 = 2$ dan $x = -1$, maka f o $g = (-1)^2 + 4(-1) + 5 = 2$. Jadi terdapat f o $g(x_1) = f$ o $g(x_2)$ untuk beberapa $x_1 \neq x_2$.

f o g bukan fungsi surjektif karena daerah nilai fungsi $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ = positif + positif = positif. R terdiri dari nilai-nilai negatif, nol, positif. Nilai-nilai negatif dan nol tidak termasuk dalam daerah nilai fungsi. (atau dapat juga dilihat dari diskriminan $x^2 + 4x + 5$ yang bernilai $\mathrm{D} = 4^2 + 4(1)(5) = 36 > 0$, yang berarti fungsi f o $g = x^2 + 4x + 5$ seluruhnay berada di atas sumbu-x (tidak berpotongan dengan sumbu-x), dengan kata lain seluruh nilai fungsi adalah positif)

f o g bukan fungsi bijektif karena f o g bukan fungsi surjektif maupun injektif

7. Sebuah area parkir mempunyai sejumlah *slot* atau *space* yang dinomori 0 sampai 25. Mobil yang hendak parkir di area tersebut ditentukan dengan sebuah fungsi *hash*. Fungsi *hash* tersebut menentukan nomor *slot* yang akan ditempati mobil yang hendak parkir <u>berdasarkan 3 angka terakhir</u> pada plat nomor polisinya.
   (a) Tentukan fungsi *hash* yang dimaksudkan. **(5)**
   (b) Tentukan nomor *slot* yang ditempati mobil yang datang berturut-turut dengan plat nomor polisinya adalah

   423251, 76540, 17121, 2310, 4124, 1102, 1724 **(10)**

Solusi:

(a) $h = x \bmod 26$

(b) 423251 → 3 angka terakhir = 251 → 251 mod 26 = 17 (slot nomor 17)

76540 → 3 angka terakhir = 540 → 540 mod 26 = 20 (slot nomor 20)
17121 → 3 angka terakhir = 121 → 121 mod 26 = 17 (tetapi slot nomor 17 sudah terisi, jadi isi slot kosong berikutnya, yaitu 18)
2310 → 3 angka terakhir = 310 → 310 mod 26 = 24 (slot nomor 24)
4124 → 3 angka terakhir = 124 → 124 mod 26 = 20 (slot nomor 21 karena slot 20 sudah terisi)
1102 → 3 angka terakhir = 102 → 102 mod 26 = 24 (slot nomor 25 karena slot 24 sudah terisi)
1724 → 3 angka terakhir = 724 → 724 mod 26 = 22 (slot nomor 22)

Jadi, mobil-mobil yang datang mengisi slot 17, 20, 18, 24, 21, 25, da 22

8. Sebuah bilangan bulat jika dibagi dengan 5 bersisa 2 dan jika ia dibagi dengan 7 bersisa 5. Berapakah bilangan bulat tersebut? (jawaban bisa lebih dari satu) **(10)**

Solusi:

Sistem kekongruenan:

$x \equiv 2 \pmod 5$ (i)

$x \equiv 5 \pmod 7$ (ii)

Dari (i) diperoleh hubungan:

$x = 2 + 5k_1$ (iii)

Substitusikan (iii) ke dalam (ii):

$2 + 5k_1 \equiv 5 \pmod 7$ (iv)

Dari (iv) diperoleh hubungan:

$\Leftrightarrow\ 2 + 5k_1 = 5 + 7k_2$

$\Leftrightarrow\ 5k_1 = 3 + 7k_2$

$\Leftrightarrow\ k_1 = (3 + 7k_2)/5$ diperoleh $k_1 = 2 \pmod 7$ untuk $k_2 = 1$

$k_1 = 2 \pmod 7 \Leftrightarrow k_1 = 2 + 7k_3$

Substitusikan $k_1 = 2 + 7k_3$ ke dalam (iii):

$x = 2 + 5k_1 = 2 + 5(2 + 7k_3) = 12 + 35k_3 \Leftrightarrow x \equiv 12 \pmod{35}$

Jadi $x \equiv 12 \pmod{35}$, sehingga nilai x yang memenuhi adalah semua bilangan yang kongruen dengan x dalam modulus 35, yaitu $x = 12$, $x = 47$, …, $x = -23$, $x = -58$, …

Keterangan:
1. Total Nilai = 105
2. Soal nomor 1, 2, dan 3 dibuat oleh Dwi Hendratmo
   Soal nomor 4, 7, dan 8 dibuat oleh Rinaldi Munir
   Soal nomor 5 dan 6 dibuat oleh Harlili