Departemen Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Kuis ke-3 IF2151 Matematika Diskrit (4 SKS)
Dosen: Ir. Rinaldi Munir, M.T (01)
Jumat, 30 September 2005
Waktu: 45 menit Kelas Paralel: 01

---

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika n orang berdiri dalam satu barisan dengan aturan bahwa orang pertama di dalam barisan adalah wanita dan orang terakhir di dalam barisan adalah pria, maka di mana pun di dalam barisan tersebut selalu terdapat wanita berada di depan pria. **(20)**
2. Perlihatkan bahwa $n \mid m$, yang dalam hal ini n dan m adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, dan jika $a \equiv b \pmod{m}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat, maka $a \equiv b \pmod{n}$. **(20)**
3. Sebuah bilangan bulat jika dibagi dengan 3 bersisa 2 dan jika ia dibagi dengan 5 bersisa 3. Berapakah bilangan bulat tersebut? **(20)**
4. Tentukan balikan (*inverse*) dari 4 modulo 9, lalu gunakan balikan modulo itu untuk memecahkan kekongruenen $4x \equiv 5 \pmod{9}$. (catatan: solusi bisa lebih dari satu buah) **(20)**
5. Salah satu program enkripsi di dalam sistem operasi *Linux* adalah `rot13`. Enkripsi dilakukan dengan mengganti sebuah huruf dengan huruf ke-13 berikutnya dari susunan alfabet. (a) Nyatakan fungsi enkripsi dan dekripsi di dalam `rot13` sebagai persamaan aritmetika modulo dalam p_i dan c_i. (b) Jika enkripsi dilakukan dua kali berturut-turut terhadap plainteks, apa yang terjadi? **(20)**
6. **Bonus**: Sembilan karakter pertama di dalam kode ISBN adalah 0-07-053965. Tentukan karakter ujinya. **(10)**

Jawaban: (tuliskan jawaban anda di bawah ini, jika tidak cukup, gunakan halaman di balik)

1. Basis Induksi : $n = 1$
   Untuk $n = 1$ pernyataan pasti benar karena hanya 1 orang (pasti wanita), maka jelas ia berada di depan siapapun.

   Langkah Induksi :
   Kita asumsikan pernyataan benar untuk $n = k$ (hipotesis induksi) Kita harus membuktikan bahwa untuk $n = k + 1$ orang dengan aturan orang pertama di dalam barisan adalah wanita dan orang terakhir di dalam barisan adalah pria maka pernyataan tetap benar. Jika orang ke-k adalah wanita maka kita dapatkan bahwa wanita berada di depan pria (orang terakhir). Jika orang ke-k adalah pria, maka k orang pertama di dalam barisan memenuhi hipotesis induksi. Jadi bisa kita simpulkan bahwa pernyataan dimanapun di dalam barisan tersebut selalu terdapat wanita berada di depan pria selalu benar.

2. Diketahui bahwa $n \mid m$ atau dapat dituliskan sebagai :
   $m = k_1 . n$ ….(i)

   Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka m habis membagi $a - b$ atau dapat dituliskan :
   $a = b + k_2 . m$ ….(ii)
   Substitusikan (i) ke dalam (ii):
   $a = b + k_2 . k_1 . n$
   $a = b + k_3 . n$ (misalkan $k_3 = k_2 . k_1$) (iii)
   $a - b = k_3 . n$ yang berarti bahwa $n \mid (a - b)$ atau $a \equiv b \pmod{n}$ ■

3. Misal : bilangan bulat = x

$x \bmod 3 = 2 \rightarrow x \equiv 2 \pmod 3$
$x \bmod 5 = 3 \rightarrow x \equiv 3 \pmod 5$

Jadi, terdapat sistem kekongruenan:
$x \equiv 2 \pmod 3$ (i)
$x \equiv 3 \pmod 5$ (ii)
Untuk kekongruenan pertama:
$x = 2 + 3k_1$ (iii)
Substitusikan (iii) ke dalam (ii):
$2 + 3k_1 \equiv 3 \pmod 5$
diperoleh
$k_1 \equiv 2 \pmod 5$
atau
$k_1 = 2 + 5k_2$

$x = 2 + 3k_1$
$= 2 + 3\,(2 + 5k_2)$
$= 2 + 6 + 15k_2$
$= 8 + 15k_2$
$x \equiv 8 \pmod{15}$

Jadi, $x = 8+15k$
$k = 0 \rightarrow x = 8$
$k = 1 \rightarrow x = 23$
$k = 2 \rightarrow x = 38$
…

$k = -1 \rightarrow x = -7$

4. Tentukan terlebih dahulu balikan dari 4 modulo 9 :
Algoritma Euclidean :
$9 = 2 . 4 + 1$ (i)
$4 = 4 . 1 + 0$ (ii) (mengimplikasikan PBB(4,9) = 1)

Dari persamaan (i) menjadi
$-2 . 4 + 1 . 9 = 1$ (9 habis membagi $-2 .4 – 1 = -9$)

Maka diperoleh -2 sebagai balikan dari 4 modulo 9 ($-8 \equiv 1 \pmod 9$)

Kaliakan kedua ruas kongruen dengan baliakn tersebut:

$4x \equiv 5 \pmod 9$
-----------------------$\times$ -2
$-8x \equiv -10 \pmod 9$

Dan karena $-8 \equiv 1 \pmod 9$
Maka
$x \equiv -10 \pmod 9$
$x = 9k - 10$
untuk $k = -2$ maka x tidak bulat
$k = -1$ maka $x = -19$
$k = 0$ maka $x = -10$
$k = 1$ maka $x = -1$
$k = 2$ maka $x = 8$
$k = 3$ maka $x = 17$

k = 4 maka x = 26
k = 5 ....

5. Solusi :
   a. $c_i = E(p_i) = (p_i + 13) \bmod 26$
      $p_i = D(c_i) = (c_i - 13) \bmod 26$
   b. Jika dilakukan 2 kali enkripsi thd *plaintext*, maka hasilnya sama dengan *plaintext* awal.

6. Solusi :

karakter uji $= \sum_{i=1}^{9} ix_i \bmod 11$
$= (1.0+2.0+3.7+4.0+5.5+6.3+7.9+8.6+9.5)$
$= (0+0+21+0+25+18+63+48+45)$
$= 220 \bmod 11$
$= 0$

Jawaban dibuat oleh Asisten 2003 Mata Kuliah Matematika Diskrit