Logika (*logic*)

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*).

Proposisi

- kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.
- Nama lain proposisi: **kalimat terbuka**.

Contoh 1. Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 13 adalah bilangan ganjil
(b) Soekarno adalah alumnus UGM.
(c) $1 + 1 = 2$
(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$
(e) Ada monyet di bulan
(f) Hari ini adalah hari Rabu
(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap
(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh 2. Semua pernyataan di bawah ini bukan proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
(b) Isilah gelas tersebut dengan air!
(c) $x + 3 = 8$
(d) $x > 3$

- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, ….

  p : 13 adalah bilangan ganjil.
  q : Soekarno adalah alumnus UGM.
  r : $2 + 2 = 4$

Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi.
  1. **Konjungsi** (*conjunction*): *p* dan *q*
     Notasi $p \wedge q$,

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): *p* atau *q*
     Notasi: $p \vee q$

3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p
   Notasi: $\sim p$

- p dan q disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition*

Contoh 3. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah
$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah
$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau: Hari ini *tidak* hujan) ■

Contoh 4. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge {\sim}q$
(c) ${\sim}p \wedge {\sim}q$
(d) ${\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$
(e) $p \vee ({\sim}p \wedge q)$
(f) ${\sim}({\sim}p \wedge {\sim}q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim q$
T	F
F	T

Contoh 5. Misalkan

p : 17 adalah bilangan prima (benar)
q : bilangan prima selalu ganjil (salah)

$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil (salah)

Contoh 6. Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus
- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 7. $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh 8. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

  Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh 9. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

- Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

9. Hukum distributif:	10. Hukum De Morgan:
– $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	– $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Contoh 10. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De ogran)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh 11. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$	(Hukum Identitas)
	$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$	(Hukum distributif)
	$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$	(Hukum *Null*)
	$\Leftrightarrow p$	(Hukum Identitas)

Disjungsi Eksklusif

- Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam dua cara:
  1. *Inclusive or*

     "atau" berarti "*p* atau *q* atau keduanya"

     Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa C++ atau Java".
  2. *Exclusive or*

     "atau" berarti "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya".

     Contoh: "Ia lahir di Bandung atau di Padang".

- Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*
  Notasi: $\oplus$

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Proposisi Bersyarat (kondisional atau implikasi)

- Bentuk proposisi: “jika p, maka q”
- Notasi: $p \rightarrow q$
- Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh 12.

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

- Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:
  (a) Jika p, maka q
  (b) Jika p, q
  (c) p mengakibatkan q (p *implies* q)
  (d) q jika p
  (e) p hanya jika q
  (f) p syarat cukup untuk q (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
  (g) q syarat perlu untuk p (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
  (h) q bilamana p (q *whenever* p)

Contoh 13. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

(a) Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
(b) Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
(c) Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
(d) Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
(e) Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
(f) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
(g) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
(h) Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Contoh 14. Ubahlah proposisi c sampai h pada Contoh 13 di atas ke dalam bentuk proposisi "jika *p* maka *q*"

Penyelesaian:

(c) Jika es mencair di kutub, maka permukaan air laut naik.

(d) Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia mau berangkat.

(e) Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal, maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

(f) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Percikan api dari rokok adalah syarat cukup untuk membuat pom bensin meledak" atau "Jika api memercik dari rokok maka pom bensin meledak"

(g) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan *"Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu untuk Indonesia agar ikut Piala Dunia"* atau "Jika Indonesia ikut Piala Dunia maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan".

(h) Jika hutan-hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi.

Contoh 15. Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.
(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun"*.
Ingat: $p \to q$ bisa dibaca "p hanya jika q".
Notasi simbolik: $y \to x$.

(b) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM"*. Ingat: $p \to q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q".
Notasi simbolik: $x \to y$.

(c) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM"*.
Ingat: $p \to q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q".
Notasi simbolik: $y \to x$.

(d) $\sim y \to \sim x$

(e) Ingat: $p \to q$ bisa dibaca "q bilamana p".
Notasi simbolik: $\sim x \to \sim y$.

- Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Penjelasan (dengan contoh)

  Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

  Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).

$\therefore$ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

$\therefore$ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

$\therefore$ dosen anda benar.

Contoh 16. Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\therefore$ "Jika p, maka q" $\Leftrightarrow$ "Tidak p atau q".

Contoh 17. Tentukan ingkaran (negasi) dari $p \rightarrow q$.

Penyelesaian:

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Contoh 18. Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto "Barang bagus tidak murah" sedangkan pedagang kedua mempunyai moto "Barang murah tidak bagus". Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

p : Barang itu bagus
q : Barang itu murah.

Moto pedagang pertama: "Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah" atau $p \rightarrow \sim q$

Moto kedua dapat ditulis sebagai "Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus" atau $q \rightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\therefore$ $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$.

$\therefore$ Kedua moto tersebut menyatakan hal yang sama.

- Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

```
if c then S
```

`c`: ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi
`S`: satu atau lebih pernyataan.

`S` dieksekusi jika `c` benar,
`S` tidak dieksekusi jika `c` salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.

- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$).

- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi `c`, jika `c` benar maka `S` dieksekusi, sebaliknya jika `c` salah maka `S` tidak dieksekusi.

Contoh 19. Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

```
if x > y then y:=x+10;
```

Berapa nilai *y* setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2$, $y = 1$
(ii) $x = 3$, $y = 5$?

Penyelesaian:

(i) `x = 2` dan `y = 1`
Ekspresi `x > y` bernilai benar
Pernyataan `y:=x+10` dilaksanakan
Nilai *y* sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) `x = 3` dan `y = 5`
Ekspresi `x > y` bernilai salah
Pernyataan `y:=x+10` tidak dilakukan
Nilai `y` tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$
Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 20. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil
Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya
Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia ia tidak mempunyai mobil

Contoh 21. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.

(c) "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar".
Kontraposisi: "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"

(d) "Jika ia mendapat pekerjaan maka ia tidak terlambat"
Kontraposisi: "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"

(e) "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin".
Kontraposisi: "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".

(f) "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin",
Ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin".
Kontraposisi: "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan".

Bikondisional (Bi-implikasi)

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan “*p* jika dan hanya jika *q*” dapat dibaca “Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*”.

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) *p* jika dan hanya jika *q*.
  (b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.
  (c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.
  (d) *p iff q*

Contoh 22. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.
(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Contoh 23. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

<u>Penyelesaian</u>:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Aanda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.
(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

- bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi.

- **Teorema:**
  Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. *Lemma* biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan *lemma*, setiap *lemma* dibuktikan secara individual [ROS03]. ***Corollary*** adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan *corollary* adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, …, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang sahih (*valid*) dan palsu (*invalid*). Catatlah bahwa kata "valid" tidak sama maknanya dengan "benar" (*true*).

Definisi 1.9. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh 1.31

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang."

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi “Air laut surut setelah gempa di laut” dan q adalah proposisi “tsunami datang”. Maka, argumen di dalam soal dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini. Keduanya menggunakan tabel kebenaran.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

Tabel 1.15 Tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

p	q	$p \to q$	
T	T	T	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \to q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa di Tabel 1.15, p dan $p \to q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen yang berbentuk modus ponen di atas sahih.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \to q)\,] \to p$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \to q)\,] \to p$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \to q)\,] \to p$ adalah tautologi

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[\, p \wedge (p \to q)\,] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

Contoh 1.32

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore p \end{array}$$

Dari Tabel 1.15 pada Contoh 1.31 tampak bahwa hipotesis q dan $p \to q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Contoh 1.33

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

$\therefore$ 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "5 lebih kecil dari 4" dan q adalah proposisi "5 adalah bilangan prima". Maka argumen di atas berbentuk:

$$\begin{array}{ll} & p \to {\sim}q \\ & {\sim}p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Tabel 1.18 memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \rightarrow {\sim}q$ dan ${\sim}\, p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar), tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

Tabel 1.18 Tabel kebenaran untuk $p \rightarrow {\sim}q$, ${\sim}p$, dan q

p	q	${\sim}q$	$p \rightarrow {\sim}q$	${\sim}\, p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T