Departemen Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Bandung

UTS I *IF251 Matematika Diskrit*
Semester Ganjil Tahun 2002/2003
Hari/Tanggal: Selasa 8 Oktober 2002
Dosen: Ir. Rinaldi Munir, M.T.
Waktu: 120 menit

---

1. Sebuah himpunan beranggotakan n elemen. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.
   (a) Buktikan banyaknya himpunan bagian tersebut dengan teori kombinatorial/teorema binomial.
   (b) Buktikan banyaknya himpunan bagian tersebut dengan induksi matematik.

(Nilai: 7,5 + 7,5)

<u>Jawaban</u>:

(a) Banyaknya himpunan bagian yang beranggotakan 0 elemen: $C(n, 0)$
Banyaknya himpunan bagian yang beranggotakan 1 elemen: $C(n, 1)$
Banyaknya himpunan bagian yang beranggotakan 2 elemen: $C(n, 2)$
…
Banyaknya himpunan bagian yang beranggotakan n elemen: $C(n, n)$

Jumlah seluruh himpunan bagian = $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)$ = ?

Menurut Teorema binomial: $(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$

Dengan mengambil $x = 1$, $y = 1$, maka

$$\Leftrightarrow \ (1 + 1)^n = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}\ 1^k$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2^n = \sum_{k=1}^{n} C(n,k) \ \blacksquare$$

(b) *Basis induksi* ($n = 0$)
Untuk $n = 0$ (himpunan kosong) jelas benar sebab himpunan kosong hanya mempunyai mempunyai $2^0 = 1$ himpunan bagian, yaitu himpunan kosong itu sendiri.

Langkah induksi ($n \geq 0$)
Andaikan bahwa pernyataan "banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n" adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa jumlah himpunan bagian dari himpunan yang beranggotakan n+1 elemen dalah 2^{n+1}.
Hal ini ditunjukkan sebagai berikut. Misalkan elemen ke-n+1 adalah a. Tinjau masing-masing dari 2^n buah himpunan bagian yang sudah terbentuk. Untuk setiap himpunan bagian, buatlah himpunan baru yang anggotanya adalah seluruh anggota himpuna bagian tersebut ditambah dengan degan tambahan satu elemen a. Karena ada 2^n

buah himpunan bagian mula-mula, maka juga akan terdapat 2^n himpunan bagian tambahan. Jumlah himpunan bagian seluruhnya adalah $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Karena basis induksi dan langkah induksi sudah dibuktikan benar, maka terbukti banyaknya himpuna bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan beranggotakan n elemen adalah 2^n.

2. Misalkan A, B, dan C adalah tiga buah himpunan yang tidak kosong sedemikian sehingga $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, dan $C \subseteq A$. Apa yang dapat disimpulkan dari pernyataan tersebut? **(Nilai: 7,5)**

Jawaban: Karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka kita dapatkan $A \subseteq C$. Dari $C \subseteq A$ kita dapatkan $A = C$. Juga, karena $B \subseteq C$, dan $C \subseteq A$ maka kita dapatkan $B \subseteq A$. Dari $A \subseteq B$ kita dapatkan $A = B$. Karena $A = C$ dan $A = B$ maka kita simpulkan $A = B = C$.

3. Jika A, B, dan C masing-masing adalah himpunan, apa hasil dari operasi himpunan berikut: $(A - C) \cap (C - \mathrm{B})$? (catatan: jawab dengan menggunakan hukum-hukum operasi himpunan). **(Nilai: 10)**

Jawaban:

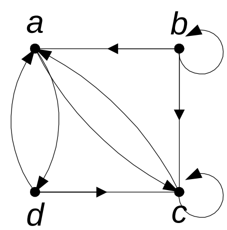
$$
\begin{aligned}
(A - C) \cap (C - \mathrm{B}) &= (A \cap C^C) \cap (C \cap B^C) && \text{(definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cap B) \cap (C \cap C^C) && \text{(hukum asosiatif)} \\
&= (A \cap B) \cap \varnothing && \text{(hukum komplemen)} \\
&= \varnothing && \text{(hukum null)}
\end{aligned}
$$

Catatan: tanda "^{C}" artinya komplemen (maaf, di komputer saya tidak tersedia Equation Editor untuk mengetik simbol-simbol matematika)

4. Misalkan A dan B himpunan, $|A| = m$, $|B| = n$, dan $m \leq n$. Berapa banyak fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*) yang dapat dibuat dari himpunan A ke himpunan B? (Petunjuk: jawab soal ini dengan pendekatan kombinatorial) **(Nilai: 10)**

Jawaban: Pada fungsi satu-ke-satu, setiap elemen di himpunan A hanya dipetakan ke satu elemen di B dan tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama di B. Misalkan elemen-elemen himpunan A adalah $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Untuk a_1 ada n pilihan bayangan di B, untuk a_2 ada n-1 pilihan bayangan di B (karena bayangan untuk a_1 tidak dapat digunakan lagi) , …, untuk a_k ada $n - k + 1$ pilihan bayangan di B, …, untuk a_m ada $n - m + 1$ pilihan bayangan. Dengan kaidah perkalian, maka akan terdapat sebanyak $n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)$ fungsi satu-ke-satu dari himpunan A ke himpunan B.

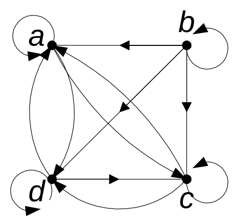
5. Diketahui relasi S yang didefinisikan pada himpunan $A = \{a, b, c, d\}$. Relasi direpesentasikan dalam graf berarah berikut ini:



(a) Jelaskan alasan mengapa relasi S tidak bersifat menghantar. Tambahkan busur tambahan yang dimaksud sehingga S bersifat menghantar.
(b) Jika didefinisikan bahwa $S^n = S \text{ o } S \text{ o } \dots \text{ o } S$ (sebanyak n kali), tentukan matriks dan graf berarah yang merepresentasikan S^2 (graf berarah S yang digunakan adalah graf pada gambar soal)

Jawaban:

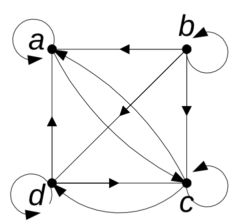
(a) Relasi S tidak menghantar karena terdapat busur (b,a) dan busur (a,d) tetapi tidak terdapat busur (b,d). Begitu juga terdapat busur (c,a) dan busur (a,d) tetapi tidak terdapat busur (c,d), terdapat busur (a,d) dan (d,a) tetapi tidak ada busur kalang (a,a), terdapat busus (d,c) dan (c,d) tetapi tidak terdapat busur (d,d). Bila busur-busur yang tidak ada tersebut ditambahkan, maka relasinya menjadi gambar graf berarah berikut:



(b) $S^2 = S \text{ o } S$

$M_{S \text{ o } S} = M_S \,.\, M_S$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \;.\; \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$



6. Berapa banyak bilangan bulat yang panjangnya 20 angka yang mengandung dua buah angka 0, empat buah angka 1, tiga buah angka 2, satu buah angka 3, dua buah angka 4, tiga buah angka 5, dua buah angka 7, dan tiga buah angka 9? **(Nilai: 10)**

Jawaban: ini adalah masalah permutasi bentuk umum

$n_1 = 2$ (dua buah angka 6)
$n_2 = 4$ (empat buah angka 1)
$n_3 = 3$ (tiga buah angka 2)
$n_4 = 1$ (satu buah angka 3)
$n_5 = 2$ (dua buah angka 4)
$n_6 = 3$ (tiga buah angka 5)
$n_7 = 2$ (dua buah angka 7)
$n_8 = 3$ (tiga buah angka 9)

dan $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_7 + n_8 = 2 + 4 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 20$

Jumlah bilangan bulat yang dapat disusun dari sejumlah angka-angka di atas adalah:

$P(20; 2, 4, 3, 1, 2, 3, 2, 3) = 20!/(2! \,.\, 4! \,.\, 3! \,.\, 1! \,.\, 2! \,.\, 3! \,.\, 2! \,.\, 3!)$

7. Berapa banyak bilangan bulat positif empat-angka antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999) yang habis dibagi 5 dan 7?

Jawaban:

antara 1 sampai 9999 ada 9999 bilangan
antara 1 sampai 999 ada 999 bilangan

banyaknya bilangan bulat antara 1000 sampai 9999 adalah

$$\lfloor 9999/35 \rfloor - \lfloor 999/35 \rfloor = 285 - 28 = 257 \text{ buah}$$

8. Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama? **(Nilai:10)**

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama
   Basis induksi: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $P(1)$ benar.
   Langkah induksi: andaikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama adalah benar. Tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, n+1. Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama (1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, n+1) juga harus berwarna sama. Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua n+1 kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Jawaban: langkah induksi tidak benar jika $n + 1 = 2$, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan $n = 1$ elemen) tidak beririsan.

9. Berapa banyak solusi bilangan bulat tak-negatif dari ketidaksamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

(Petunjuk: tambahkan sebuah peubah bantu, yaitu x_4, sedemikian sehingga
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$)

(Nilai: 10)

Jawaban:

Cara 1: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Jumlah semua solusi bilangan bulatnya adalah $C(4+10-1,10) = C(13,10) = 286$

Catatan: x_4 berfungsi menampung $10 - (x_1 + x_2 + x_3)$ jika $x_1 + x_2 + x_3 < 10$ dan menjaga agar $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$.

Cara 2: Nilai $x_1 + x_2 + x_3$ ada 11 kemungkinan yaitu 0, 1, 2, …, 10 (berdasarkan ruas kanan ketidaksamaan)

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+0-1,0) = C(2,0)$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+1-1,1) = C(3,1)$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+2-1,2) = C(4,2)$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+3-1,3) = C(5,3)$
…
$x_1 + x_2 + x_3 = k$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+k-1,k) = C(2+k,k)$
…
$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ → banyak solusi bilangan bulat = $C(3+10-1,10) = C(12,10)$

Jumlah solusi seluruhnya = $C(2,0) + C(3,1) + C(4,2) + C(5,3) + C(6,4) + C(7,5) + C(8,6) + C(9,7) + C(10,8) + C(11,9) + C(12,10)$
$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66$
$= 286$