Kuis ke-4 *IF251 Matematika Diskrit* (*take home quiz*)
Pokok Bahasan: Induksi Matematik
Tanggal: 1 Oktober 2002

Soal

1. Temukan rumus untuk menghitung ½ + ¼ + 1/8 + … + $1/2^n$ gan memeriksa nilai-nilai ekspresi untuk *n* yang kecil, lalu gunakan induksi matematik untuk membuktikan rumus itu.

<u>Jawaban</u>:

Rumus ditentukan secara empirik dengan mencoba untuk *n* yang kecil;

$n = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = (2^1 - 1)/2^1$
$n = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = (2^2 - 1)/2^2$
$n = 3 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 = 9/8 = (2^3 - 1)/2^3$
…
$n = k \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/2^k = (2^k - 1)/2^k$

Jadi, dapat disimpulkan (untuk sementara) bahwa

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n \qquad , n \geq 1$$

Pembuktian dengan induksi matematik:

(i) basis induksi ($n = 1$)

Untuk $n = 1$, rumus tersebut jelas benar sebab

$$1/2 = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2$$

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa untuk $n \geq 1$ jumlah deret $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$ adalah benar.
Harus dibuktikan bahwa untuk $n + 1$ jumlah deret tersebut adalah

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} = (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}$$

Ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots 1/2^n) + 1/2^{n+1} \\ &= (2^n - 1)/2^n + 1/2^{n+1} \\ &= 2(2^n - 1)/2.2^n + 1/2^{n+1} \\ &= 2(2^n - 1)/2^{n+1} + 1/2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 2 + 1)/2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1)/2^{n+1} \end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$$

2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk *n* bilangan bulat positif.

<u>Jawaban</u>:

(i) basis induksi ($n = 1$)

Untuk $n = 1$, jelas benar bahwa $1^5 - 1 = 0$ habis dibagi 5.

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa "$n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk $n > 0$" adalah benar. Harus dibuktikan bahwa untuk $(n+1)^5 - (n+1)$ juga habis dibagi 5. Ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n) \end{aligned}$$

$(n^5 - n)$ habis dibagi 5 (menurut hipotesis induksi) dan $5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ jelas juga habis dibagi 5, sehingga $(n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ habis dibagi 5. Dengan demikian, terbukti $(n+1)^5 - (n+1)$ habis dibagi 5.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk *n* bilangan bulat positif.

3. Buktikan bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif lebih besar dari 6.

Jawaban:

(i) basis induksi ($n = 7$)

Untuk $n = 7$, jelas $3^7 < 7!$ benar sebab $3^7 = 2187$ dan $7! = 5040$

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa $3^n < n!$ untuk $n > 6$ adalah benar. Harus ditunjukkan bahwa $3^{n+1} < (n+1)!$ juga benar. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$3^{n+1} < (n+1)!$

$3.3^n < (n+1) \,.\, n!$

$3^n \,.\, 3/(n+1) < n!$

Menurut hipotesis induksi, $3^n < n!$, sedangkan untuk $n > 6$, nilai $3/(n+1) < 1$, sehingga $3/(n+1)$ akan memperkecil nilai di ruas kiri persamaan. Efek nettonya, $3^n \,.\, 3/(n+1) < n!$ jelas benar.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $3^n < n!$

4. Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai 5 sen dan 6 sen? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Jawaban: Kombinasi biaya pos dengan perangko 5 sen dan 6 sen dapat ditulis sebagai $5m + 6n$, dengan m dan n adalah bilangan bulat. Dengan mencoba kombinasi nilai m dan n mulai dari 0, 1, 2, 3, 4, …, maka diperoleh biaya pos yang dapat dibayar mulai 20 sen, 21 sen, 22 sen dan seterusnya.
Akan kita buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

(i) basis induksi ($n = 20$)

Untuk biaya pos sebesar 20 sen, kita dapat menggunakan 4 perangko 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) langkah induksi

Andaikan pernyataan bahwa "biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen" adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa untuk biaya pos sebesar n +1 sen juga dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen saja.
Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:

1) jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 5 sen saja, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 5 sen (sebab $n \geq 20$), maka dengan mengganti sebuah perangko 5 sen dengan 6 sen selalu dapat dibayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen.
2) jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 6 sen, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 6 sen (sebab $n \geq 20$). Dengan mengganti 4 buah perangko 6 sen dengan 5 buah, diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

5. Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebagai berikut:

$S_{1,1} = 5$

Untuk semua pasang bilangan bulat positif (m, n), kecuali, (1,1) didefinisikan

$$S_{m,\,n} = \begin{cases} S_{m-1,\,n} + 2 & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,\,n-1} + 2 & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n), berlaku

$$S_{m,\,n} = 2(m + n) + 1$$

Jawaban: (ditinggalkan sebagai latihan saja)