Kuis ke-3 *IF251 Matematika Diskrit*
Pokok Bahasan: Relasi dan Fungsi
Tanggal: 30 September 2002, Waktu: 30 menit

Soal

1. Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat (*integer*), yang dalam hal ini $(x, y) \in R$ jika x adalah kelipatan dari y. Tentukan apakah R refleksif, setangkup, dan/atau menghantar dengan menyebutkan masing-masing alasannya:
   (i) refleksif (ya/tidak), alasan?
   (ii) setangkup (ya/tidak), alasan?
   (iii) menghantar (ya/tidak), alasan?

Jawaban:

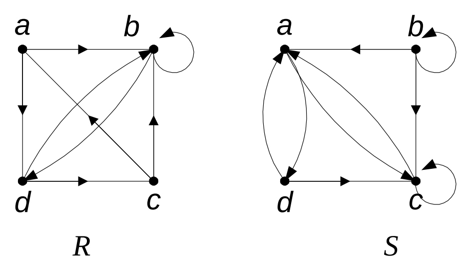
Berdasarkan pernyataan "$(x, y) \in R$ jika x adalah kelipatan dari y" kita dapat menuliskannya sebagai $x = ky$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jadi $(x, y) = (ky, y) \in R$.

(i) R jelas refleksif sebab untuk $k = 1$, $(y, y) \in R$. Misalnya, (4, 4), (5, 5), dst adalah $\in R$.

(ii) R tidak setangkup sebab $x \geq y$ sehingga tidak mungkin y adalah kelipatan dari x kecuali jika $x = y$

(iii) R menghantar sebab jika $x = ky$ dan $y = mz$, maka di sini $x = kmz$, sehingga x juga kelipatan z. Contohnya, jika $(8, 4) \in R$ dan $(4, 2) \in R$, maka $(8, 2) \in R$

2. Diketahui dua buah relasi, R dan S, yang masing-masing didefinisikan pada himpunan $A = \{a, b, c, d\}$. Masing-masing relasi direpresentasikan dalam graf berarah berikut ini:



(a) Tentukan apakah R dan S refleksif, setangkup, dan/atau menghantar. Jelaskan alasannya.
(b) Tentukan graf berarah yang menyatakan $R \oplus S$.

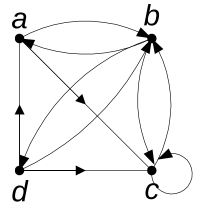
Jawaban:

(a) - R tidak refleksif sebab pada simpul a, c, dan d tidak ada sisi *loop*
- R tidak setangkup sebab dari simpul a ke d ada sisi berarah, sedangkan dari d ke a tidak ada. Begitu juga dari d ke c, dari c ke b, dan dari a ke b.
- R tidak menghantar sebab ada sisi dari b ke d dan sisi dari d ke c tetapi tidak ada sisi dari b ke c

- S tidak refleksif sebab pada simpul a dan d tidak ada sisi *loop*
- S tidak setangkup sebab dari simpul b ke a ada sisi berarah, sedangkan dari a ke b tidak ada. Begitu juga dari b ke c dan dari d ke c.
- S tidak menghantar sebab ada sisi dari c ke a dan sisi dari a ke d tetapi tidak ada sisi dari c ke d

(b) $R = \{(a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,b), (c,a), (d,b), (d,c)\}$
$S = \{(a,d), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,c), (d,a), (d,c)\}$
$R \oplus S = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (d,a), (d,b)\}$

Graf berarah yang merepresentasikan $R \oplus S$:



3. Misalkan $|A| = m$ dan $|B| = n$. Berapa banyak fungsi yang dapat dibuat dari himpunan A ke himpunan B? (Petunjuk: jawab soal ini dengan pendekatan kombinatorial)

Jawaban:
Dari definisi fungsi, setiap elemen pada himpunan A harus mempunyai pemetaan ke satu dan hanya satu elemen di himpunan B. Elemen pertama di A mempunyai n kemungkinan peta di B, elemen kedua di A mempunyai n kemungkinan peta di B. Begitu seterusnya sehingga jumlah fungsi yang dapat dibuat dari A ke B (dengan menerapkan kaidah perkalian) adalah:

$n \times n \times n \times \ldots \times n$ (sebanyak m kali)

atau

n^m

buah.

4. Misalkan f adalah fungsi dari $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke X yang didefinisikan oleh $f(x) = 4x \bmod 5$. Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah f fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*) atau dipetakan pada (*onto*)?

Jawaban:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4(0) \bmod 5 = 0$
$x = 1 \rightarrow f(1) = 4(1) \bmod 5 = 4$
$x = 2 \rightarrow f(0) = 4(2) \bmod 5 = 3$
$x = 3 \rightarrow f(0) = 4(3) \bmod 5 = 2$
$x = 4 \rightarrow f(0) = 4(4) \bmod 5 = 1$

Jadi, $f = \{(0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

Jelas fungsi f adalah fungsi satu-ke-satu karena tidak ada dua elemen di X yang mempunyai peta yang sama di himpunan hasil. Fungsi f juga fungsi dipetakan pada (*onto*) karena setiap elemen di X adalah peta dari himpunan daerah asal (yaitu X juga). Dengan kata lain, f adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu (*bijective*).