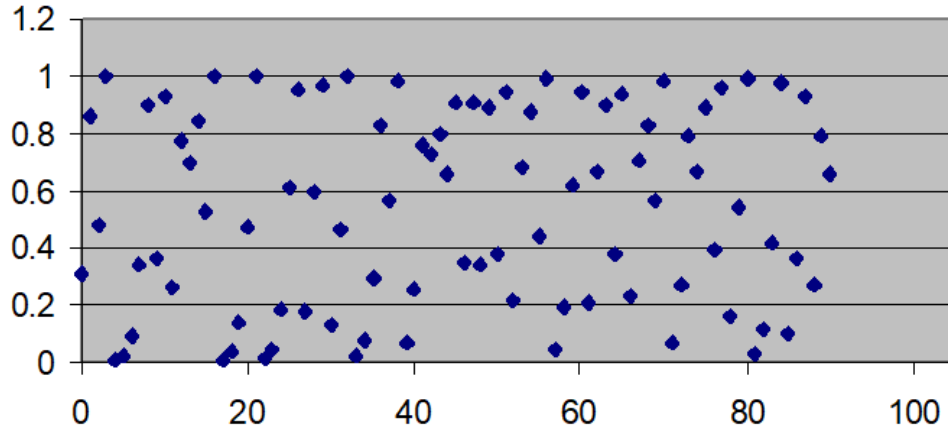
Bahan Kuliah IF4020 Kriptografi



Pembangkit Bilangan Acak

Oleh: Rinaldi M

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB
2026

Bilangan Acak

- Bilangan acak (*random number*): bilangan yang tidak dapat diprediksi nilainya dan kemunculannya

- Bilangan acak dapat berupa *integer*, bilangan riil antara 0-1, atau string biner

  Integer: 2367, 987, 1092, 1762, 563, …

  Riil: 0.985, 0.00341, 0.6297, 0.00832, …

  Biner: 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0…

- Bilangan acak sangat penting di dalam kriptografi
- Contoh:

1. Untuk pembangkitan nilai-nilai parameter kunci di dalam algoritma kriptografi kunci-publik,

   Alice membangkitkan kunci privat *a* di dalam *Diffie-Hellman Key Exchange*

2. Pembangkitan nilai acak *k* di dalam algoritma enkripsi ElGamal

   Pilih bilangan acak k , yang dalam hal ini $1 \leq k \leq p - 1$

3. Pembangkitan *initialization vector* (*IV*) di dalam *block-cipher*
4. Pembangkitan string *nonce* di dalam mekanisme *challenge and response* untuk otentikasi
5. Pembangkitan bilangan acak di dalam sub-protokol *handshaking* di dalam SSL/TLS
6. Pembangkitan garam (salt) di dalam protokol otentikasi dengan *password*

- Tidak ada prosedur komputasi yang menghasilkan barisan bilangan acak yang benar-benar sejati (*true random*).

- Bilangan acak yang dihasilkan dengan prosedur komputasi adalah bilangan acak semu (*pseudo-random*), karena pembangkitan bilangannya dapat diulang kembali (deterministic).

- Pembangkit deret bilangan acak semacam itu disebut *pseudo-random number generator* (*PRNG*).

- PRNG bersifat deterministik, artinya bilangan acak bisa diulang kembali pembangkitannya asalkan kunci (umpan) yang digunakan sama.

1. *Linear Congruential Generator (LCG)*

- Pembangkit bilangan acak kongruen-lanjar adalah *PRNG* yang berbentuk:

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \bmod m$$

x_{n+1} = bilangan acak sekarang
x_n = bilangan acak sebelumnya
a = faktor pengali $(0 < a < m)$
b = *increment* $(0 < b < m)$
m = modulus $(m > 0)$
x_0 = kunci pembangkit atau disebut **umpan** (*seed*), harus dirahasiakan.

- Nilai-nilai x_i terletak dari 0 sampai m – 1, yaitu $0 \leq x_i < m$

Contoh: $X_n = (7X_{n-1} + 11) \bmod 17$, dan $X_0 = 0$

n	X_n
0	0
1	11
2	3
3	15
4	14
5	7
6	9
7	6
8	2
9	8
10	16
11	4
12	5
13	12
14	10
15	13
16	*0*
17	*11*
18	*3*
19	*15*
20	*14*
21	*7*
22	*9*
23	*6*
24	*2*

Contoh 1: $x_{n+1} = (7x_n + 11) \bmod 17$ dan $x_0 = 0$

$x_1 = (7 \cdot 0 + 11) \bmod 17 = 11$
$x_2 = (7 \cdot 11 + 11) \bmod 17 = 3$
$x_3 = (7 \cdot 3 + 11) \bmod 17 = 15$
$x_4 = (7 \cdot 15 + 11) \bmod 17 = 14$
…
$x_{16} = (7 \cdot 13 + 11) \bmod 17 = 0$
$x_{17} = (7 \cdot 0 + 11) \bmod 17 = 11$
… (terulang kembali 11, 3, 15, ….)

- *LCG* mempunyai periode tidak lebih besar dari *m*, dan pada kebanyakan kasus periodenya kurang dari itu.

- *LCG* mempunyai periode penuh (*m* – 1) jika memenuhi syarat berikut:
  1. *b* relatif prima terhadap *m*.
  2. *a* – 1 dapat dibagi dengan semua faktor prima dari *m*
  3. *a* – 1 adalah kelipatan 4 jika *m* adalah kelipatan 4
  4. $m >$ maks(a, b, x_0)
  5. $a > 0$, $b > 0$

- Keunggulan *LCG* terletak pada kesederhanaannya dan komputasi yang relatif cepat.

- Sayangnya, *LCG* tidak dapat digunakan untuk kriptografi karena bilangan acaknya dapat diprediksi urutan kemunculannya (bilangan acak terulang secara periodik).

- Oleh karena itu *LCG* tidak aman digunakan untuk kriptografi.

- Namun demikian, *LCG* tetap berguna untuk aplikasi non-kriptografi seperti simulasi, sebab *LCG* sangkil dan memperlihatkan sifat statistik yang bagus dan sangat tepat untuk uji-uji empirik

Pembangkit Bilangan Acak yang Aman Secara Kriptografi

- Pembangkit bilangan acak yang cocok untuk kriptografi dinamakan *cryptographically secure pseudorandom generator* (*CSPRNG*).

- Persyaratan *CSPRNG* adalah:
  1. Secara statistik lolos uji keacakan (*randomness test*).
  2. Tahan terhadap serangan (*attack*) yang serius. Serangan ini bertujuan untuk memprediksi bilangan acak yang dihasilkan dari nilai-nilai sebelumnya.

- Meskipun demikian, CSPRNG tetap termasuk ke dalam pembangkit bilangan acak semu.

2. *Blum Blum Shub (BBS)*

- *BBS* adalah *CSPRNG* yang paling sederhana dan paling sangkil (secara kompleksitas teoritis).
- *BBS* dibuat pada tahun 1986 oleh Lenore Blum, Manuel Blum, dan Michael Shub.
- Berbasis teori bilangan (*number theory*)
- BBS menghasilkan barisan bilangan acak berupa bit-bit biner

- *BBS* berbentuk:

$$x_i = x_{i-1}^2 \bmod n$$

Algoritma BBS:

1. Pilih dua buah bilangan prima rahasia, *p* dan *q*, yang masing-masing kongruen dengan 3 (mod 4).
2. Kalikan keduanya menjadi $n = pq$. Bilangan *n* ini disebut **bilangan bulat Blum**
3. Pilih bilangan bulat acak lain, *s*, sebagai umpan sedemikian sehingga:
   (i) $2 \leq s < n$
   (ii) *s* dan *n* relatif prima, yaitu PBB(2, n) = 1

   kemudian hitung $x_0 = s^2 \bmod n$
4. Barisan bit acak dihasilkan dengan melakukan iterasi berikut sepanjang yang diinginkan:
   (i) Hitung $x_i = x_{i-1}^2 \bmod n$
   (ii) z_i = bit *LSB* (*Least Significant Bit*) dari x_i

   Barisan bit acak adalah $z_1, z_2, z_3, \ldots$

Contoh 2. Misalkan kita memilih $p = 11$ dan $q = 23$ sehingga $n = pq = 253$.

Perhatikan bahwa $11 \equiv 3 \pmod 4$ dan $23 \equiv 3 \pmod 4$

Kita pilih bilangan acak $s = 3$ dan kita hitung $x_0 = 3^2 \bmod 253 = 9$.

Barisan bit acak kita hasilkan sebagai berikut:

$x_1 = x_0^2 \bmod n = 9^2 \bmod 253 = 81$ ➔ $z_1 = 1$ (karena 81 ganjil, bit *LSB*-nya pasti 1)

$x_2 = x_1^2 \bmod n = 81^2 \bmod 253 = 236$ ➔ $z_2 = 0$ (karena 236 genap, bit *LSB*-nya pasti 0)

$x_3 = x_2^2 \bmod n = 236^2 \bmod 253 = 36$ ➔ $z_3 = 0$ (36 genap)

$x_4 = x_3^2 \bmod n = 36^2 \bmod 253 = 31$ ➔ $z_4 = 1$ (31 ganjil)

$x_5 = x_4^2 \bmod n = 31^2 \bmod 253 = 202$ ➔ $z_5 = 0$ (202 genap)

dst

Barisan bit acak yang dihasilkan 1 0 0 1 0…dst

- BBS adalah pembangkit bit acak yang aman secara kriptografi karena lulus uji bit berikutnya (*next-bit test*).

- Sebuah pembangkit bit acak dikatakan lulus uji bit berikutnya (*next-bit test*) jika diberikan barisan *k* bit, maka tidak dapat diprediksi bit berikutnya 0 atau 1 dengan peluang lebih besar dari ½, sehingga dikatakan *unpredictable*.
- BBS adalah pembangkit bit acak yang *unpredictable*.

- BBS tidak dapat diprediksi dari arah kiri (*unpredictable to the left*) dan tidak dapat diprediksi dari arah kanan (*unpredictable to the kanan*), artinya jika diberikan barisan bit yang dihasilkan oleh BBS, kriptanalis tidak dapat memprediksi barisan bit sebelumnya dan barisan bit sesudahnya

- Karakteristik BBS yang menarik adalah kita dapat menghitung x_i secara langsung dengan persamaan:

$$x_i = (x_0^{2^i \bmod \lambda(n)}) \bmod n$$

dalam hal ini, $\lambda(n) = \lambda(pq)$ = KPK($p-1$, $q-1$), KPK = kelipatan persekutuan terkecil

- Bilangan acak yang dibangkitkan BBS tidak harus 1 bit *LSB* tetapi bisa juga *j* buah bit (*j* adalah bilangan bulat positif yang tidak melebihi $\log_2(\log_2 n)$).

- Perhatikan contoh berikut:

Contoh 3. Misalkan $p = 11351$ dan $q = 11987$ sehingga $n = pq = 136064437$.
Kita pilih $s = 80331757$ dan $j = 4$
(j tidak melebihi $\log_2(\log_2 136064437) = 4.75594$).

Hitung: $x_0 = 80331757^2 \bmod 136064437 = 1312737111$.
Barisan bit acak yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$x_1 = x_0^2 \bmod n = 131273718^2 \bmod 136064437 = 47497112$

$z_1 = 47497112 \bmod 2^4 = 8 = 1000_{\text{basis 2}}$ (4 bit *LSB* dari 47497112)

$x_2 = x_1^2 \bmod n = 47497112^2 \bmod 136064437 = 69993144$

$z_2 = 69993144 \bmod 2^4 = 8 = 1000_{\text{basis 2}}$ (4 bit *LSB* dari 69993144)

$x_3 = x_2^2 \bmod n = 69993144^2 \bmod 136064437 = 13810821$

$z_3 = 13810821 \bmod 2^4 = 5 = 0101_{\text{basis 2}}$ (4 bit *LSB* dari 13810821)

...

Barisan blok bit acak yang dihasilkan: 1000 1000 0101 …

Keamanan BBS

- Keamanan BBS bergantung pada kesulitan memfaktorkan *n*. Jika penyerang dapat memfaktorkan *n* menjadi faktor prima *p* dan *q*, maka urutan x_i dapat dikembalikan ke belakang (dihitung akar kuadrat modular menggunakan *Chinese Remainder Theorem* - CRT).

- Alasannya sebagai berikut ini. Tinjau Kembali BBS bekerja dengan iterasi:

$$x_i = x_{i-1}^2 \bmod n$$

Jika penyerang dapat menghitung akar kuadrat modulo n, yaitu:

$$x_{i-1} = \sqrt{x_i} \pmod{n}$$

maka ia bisa menelusuri *state* ke belakang, sehingga bit-bit keluaran dapat diprediksi:

$$x_{i-2} = \sqrt{x_{i-1}} \pmod{n},\ x_{i-3} = \sqrt{x_{i-2}} \pmod{n},\ x_{i-4} = \sqrt{x_{i-3}} \pmod{n}, \text{ dst}$$

Masalahnya adalah menghitung akar kuadrat modulo *n* tanpa mengetahui *p* dan *q* sangat sulit. Tetapi dengan mengetahui *p* dan *q*, menghitung akar kuadrat menjadi mudah karena bisa dilakukan dengan *Chinese Remainder Theorem* (CRT).

Jika *n* dapat difaktorkan menjadi *p* dan *q*, maka Langkah-Langkah selanjutnya adalah sbb:

1. Pecahkan kekongruenan

$$x^2 \equiv y \pmod{n}$$

menjadi dua kekongruenan

$$x^2 \equiv y \pmod{p}$$

$$x^2 \equiv y \pmod{q}$$

2. Hitung akar kuadrat dalam moulus p dan q , diperoleh 4 buah akar dalam modulo p dan q

3. Dari Langkah 2, gunakan CRT untuk mendapatkan 4 kemungkinan akar modulo n.

Pilih yang benar sebagai *state* sebelumnya, x_{i-1}. Setelah itu proses bisa diulang mundur, hingga mendapatkan seluruh *state* BBS dan seluruh bit keluaran.

Contoh 4: Misalkan pada contoh 2 diketahui *n* = 253 dan x_4 = 31 (z_4 = 1). Pecahkan BBS untuk memperoleh x_3, x_2, dan x_1.

Jawaban: *n* = 253 dapat difaktorkan menjadi 11 x 23 (*p* = 11, *q* = 23).

Persamaan BBS adalah $x_i = x_{i-1}^2 \bmod n$ → $x_{i-1}^2 \equiv x_i \pmod n$

Jadi, $x_3^2 \equiv x_4 \pmod n$ → $x_3^2 \equiv 31 \pmod{253}$

Karena 253 = 11 x 23, maka

$x_3^2 \equiv 31 \pmod{11}$ → $x_3^2 \equiv 9 \pmod{11}$ → x_3 =3 atau 8 (Periksa!!)

$x_3^2 \equiv 31 \pmod{23}$ → $x_3^2 \equiv 8 \pmod{23}$ → x_3 =10 atau 13 (Periksa!!)

Rumus CRT:

$x \equiv a \pmod{11}$ → $x_3 \equiv$ 3 atau 8 (mod 11)

$x \equiv b \pmod{23}$ → $x_3 \equiv$ 10 atau 13 (mod 23)

Empat kemungkinan kombinasi CRT:

(i) $x_3 \equiv 3 \pmod{11}$
$x_3 \equiv 10 \pmod{23}$

(ii) $x_3 \equiv 3 \pmod{11}$
$x_3 \equiv 13 \pmod{23}$

(iii) $x_3 \equiv 8 \pmod{11}$
$x_3 \equiv 10 \pmod{23}$

(iv) $x_3 \equiv 8 \pmod{11}$
$x_3 \equiv 13 \pmod{23}$

Penyelesaian untuk (i):

$x_3 \equiv 3 \pmod{11} \rightarrow x_3 = 3 + 11k \rightarrow$ sulihkan ke dalam $x_3 \equiv 10 \pmod{23}$

$3 + 11k \equiv 10 \pmod{23} \rightarrow 11k \equiv 7 \pmod{23} \rightarrow k \equiv 9 \pmod{23}$

Jadi, $x_3 = 3 + 11k = 3 + 11(9) = 102$

Selesaikan dengan cara yang sama untuk (ii), (iii), dan (iv), diperoleh:

$x_3 = 36$, $x_3 = 217$, dan $x_3 = 151$

Jadi, x_3 = {102, 36, 217, 151}Hanya satu nilai x_3 yang benar, yaitu nilai x_3 yang memenuhi

$x_3 \equiv y^2 \bmod 253$

Karena 253 = 11 x 23, menurut CRT, syarat ini terpenuhi jika dan hanya jika x_3 merupakan residu kuadrat modulo 11 **dan** modulo 23

Residu kuadrat modulo 11 adalah:

{0,1,3,4,5,9} (hasil modulo dari $0^2, 1^2, 3^2, \ldots, 10^2 \bmod 11$)

Residu kuadrat modulo 23 adalah

{0,1,2,3,4,6,8,9,12,13,16,18} (hasil modulo dari $0^2, 1^2, 3^2, \ldots, 22^2 \bmod 23$)

Nilai kandidat harus termasuk dalam kedua himpunan tersebut setelah direduksi terhadap masing-masing modulus.

Periksa satu per satu:

- x_3 = 102 → 102 mod 11 = 3 dan 102 mod23 = 10. Karena 10 bukan residu kuadrat modulo 23, kandidat ini tidak memenuhi syarat.
- x_3 =36 → 36 mod 11 =3 dan 36 mod23 = 13. Keduanya residu kuadrat, sehingga 36 merupakan residu kuadrat dalam modulo 253.
- x_3 = 151 → 151 mod 11 = 8. Karena 8 bukan residu kuadrat modulo 11, kandidat ini tidak memenuhi syarat.
- x_3 = 217 → 217 mod11 = 8 dan 217 mod23 = 10. Keduanya bukan residu kuadrat pada modulus masing-masing, sehingga kandidat ini juga tidak memenuhi syarat.

- Jadi, yang memenuhi syarat adalah x_3 = 36. Ini sesuai dengan hasil pada Contoh 2

- Dengan cara yang sama, maka dapat diketahui nilai x_2 dan x_1
- Agar BBS aman, maka *n* haruslah bilangan yang besar agar tidak dapat difaktorkan

CSPRNG Berbasis *RSA*

Algoritma:

1. Pilih dua buah bilangan prima rahasia, p dan q, dan bilangan bulat e yang relatif prima dengan $(p - 1)(q - 1)$
2. Kalikan keduanya menjadi $n = pq$
3. Pilih bilangan bulat acak lain, s, sebagai x_0 yang dalam hal ini $2 \leq s \leq n$
4. Barisan bit acak dihasilkan dengan melakukan iterasi berikut sepanjang yang diinginkan:
   (i) Hitung $x_i = x_{i-1}^{\,e} \bmod n$ dengan $x_0 = s$.
   (ii) z_i = bit *LSB* (*Least Significant Bit*) dari x_i
5. Barisan bit acak adalah $z_1, z_2, z_3, \ldots$

Teori *Chaos*

- Teori *chaos* menggambarkan perilaku sistem dinamis nirlanjar yang menunjukkan fenomena *chaos*.

- Salah satu karakteristik sistem *chaos*: **peka pada nilai awal** (*sensitive dependence on initial condition*).



1. Logistic Map

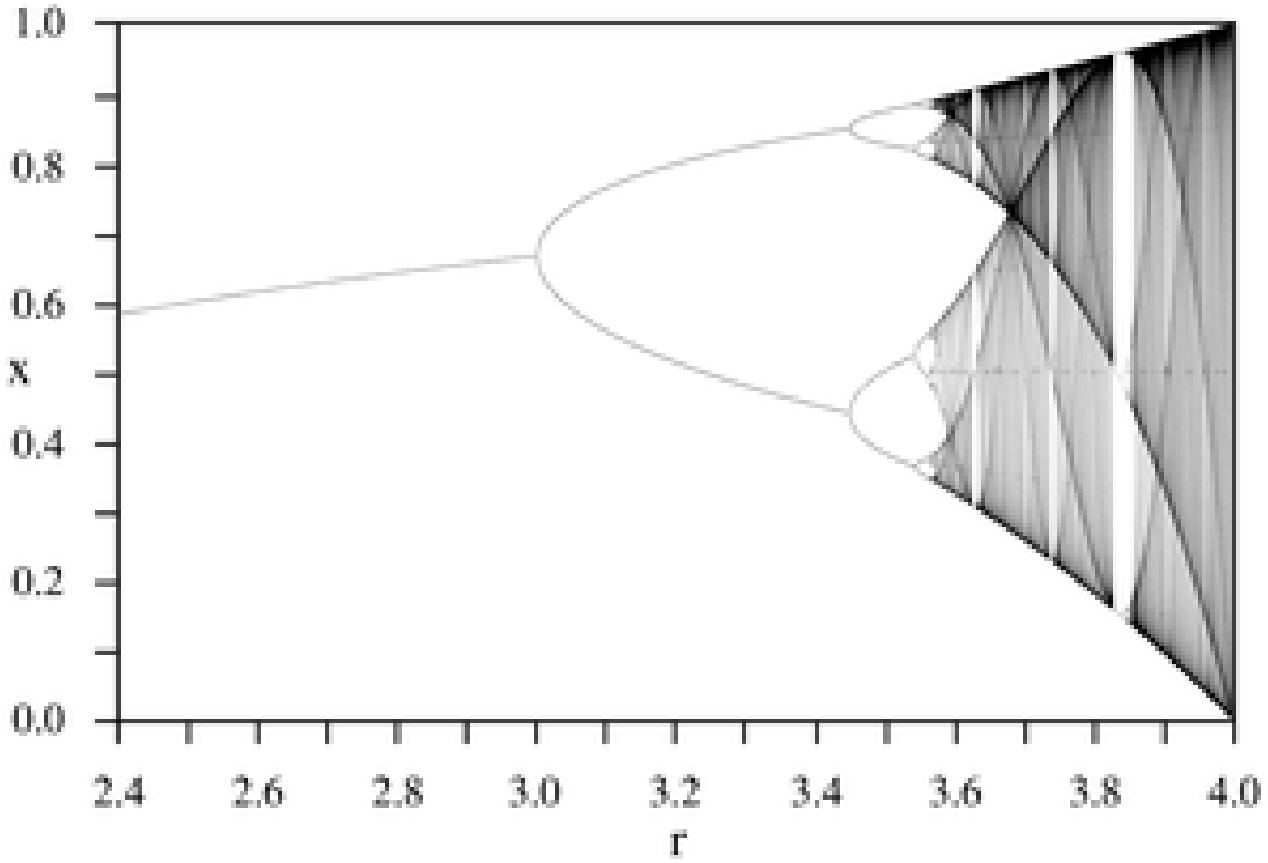
- Contoh fungsi *chaos* yang sederhana: persamaan logistik (*logistic map*)

$$x_{i+1} = r\, x_i\, (1 - x_i)$$

r : laju pertumbuhan ($0 \leq r \leq 4$)

x : nilai-nilai *chaos* ($0 \leq x \leq 1$)

Logistic Map



$$x_{i+1} = r\, x_i\, (1 - x_i)$$

Gambar 1 Diagram *bifurcation* untuk persamaan logistik $x_{i+1} = r\, x_i\, (1 - x_i)$

Logistic Map

- Fungsi *chaos* berguna untuk pembangkitan barisan bilangan acak **.**

$$x_{i+1} = r\, x_i\, (1 - x_i)$$

- Misal $r = 4.0$ dan nilai awal $x_0 = 0.456$

  $x_1 = 4.0x_0(1 - x_0) = 0.992256$

  $x_2 = 4.0x_1(1 - x_1) = 0.030736$

  …

  $x_{99} = 4.0x_{98}(1 - x_{98}) = 0.914379$

  $x_{100} = 4.0x_{99}(1 - x_{99}) = 0.313162$

  … dst

- Menariknya bilangan acak dari persamaan *logistic map* tidak punya periode

- Jika kita ingin mendapatkan barisan bilangan bulat dari nilai-nilai *floating-point* yang dihasilkan oleh *logistic map*, maka kita dapat mengambil *n* digit signifikan dari setiap nilai-nilai *floating point* tersebut.

- Contoh: n = 4

$x_1 = 4.0x_0(1 - x_0) = 0.992256 \rightarrow 9922$

$x_2 = 4.0x_1(1 - x_1) = 0.030736 \rightarrow 3073$

…

$x_{99} = 4.0x_{98}(1 - x_{98}) = 0.914379 \rightarrow 9143$

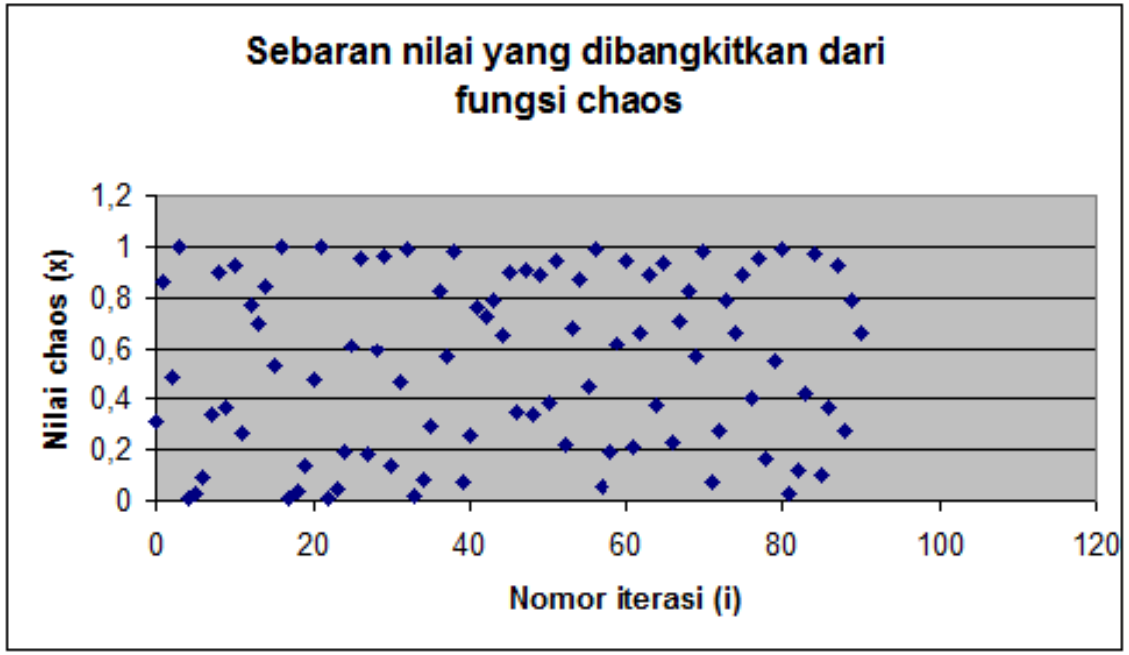
$x_{100} = 4.0x_{99}(1 - x_{99}) = 0.313162 \rightarrow 3131$

… dst

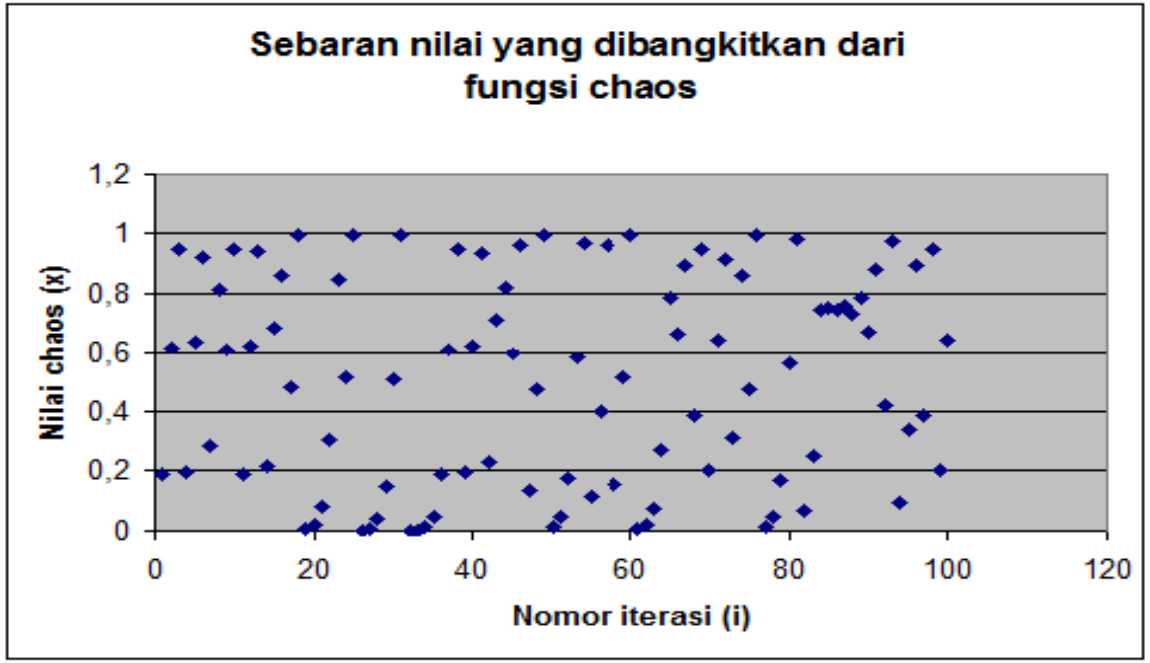
Logistic Map

```
main()
{
 int i, n
 double r, x;
 printf("Masukkan nilai awal (0 s/d 1) : "); scanf("%lf", &x);
 printf("Masukkan jumlah iterasi : "); scanf("%d", &n);
 r = 4.0;
 for (i = 1; i <= n; i++) {
    x = r * x * (1 - x);
    printf("x = %lf ", x);
 }
}
```

- Fungsi *chaos* sensitif terhadap perubahan kecil nilai-nilai awal. Jika x_0 diubah sedikit saja, maka nilai-nilai *chaos* yang dihasilkan berbeda signifikan.
- Perhatikan contoh berikut:



Gambar 1. Nilai-nilai *chaos* yang dibangkitkan dari fungsi *chaos* $x_{n+1} = 4.0\, x_n\, (1 - x_n)$ dengan $x_0 = 0.456$



Gambar 2. Nilai-nilai *chaos* yang dibangkitkan dari fungsi *chaos* $x_{n+1} = 4.0\, x_n\, (1 - x_n)$ dengan $x_0 = 0.456001$

Contoh *chaos map* lainnya:

1. *Henon map*

$$x_n = 1 + b(x_{n-2} - x_{n-3}) + cx^2{}_{n-2}$$

2. *Tent Map*

$$x_i = f_\mu(x_{i-1}) = \begin{cases} \mu x_{i-1} & , x_{i-1} < \frac{1}{2} \\ \mu(1 - x_{i-1}) & , x_{i-1} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

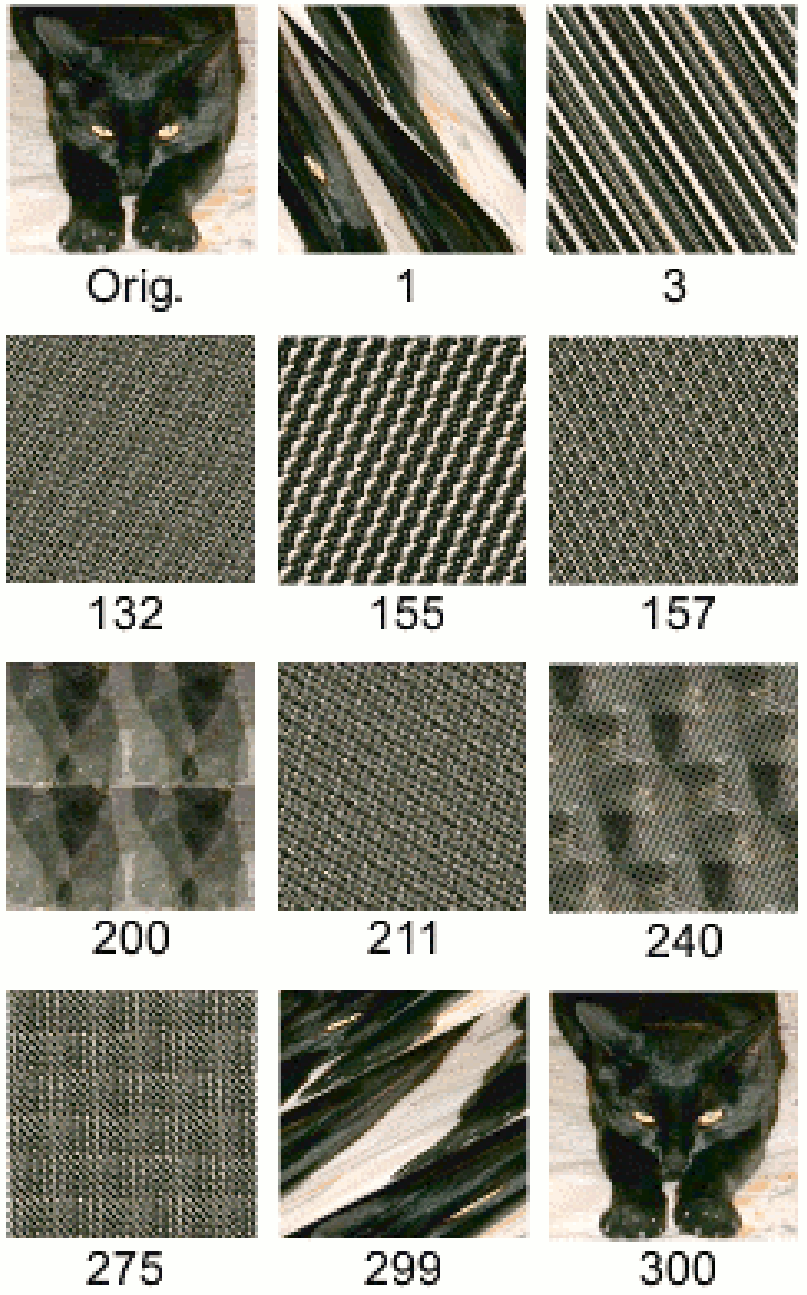
3. *Arnold's cat map*:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix} \bmod(N)$$

b dan *c* adalah *integer* positif sembarang. Determinan matriks $\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc+1 \end{bmatrix}$ harus sama dengan 1

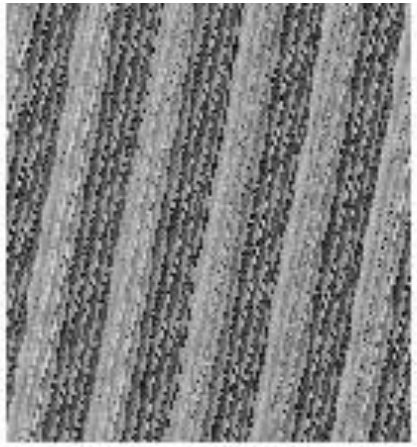
$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \bmod(N)$$

Hasil lelaran dengan
Arnold Cat Map

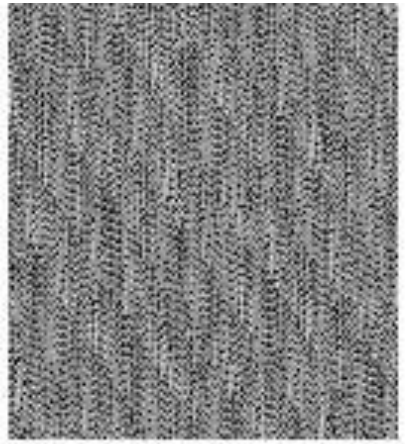




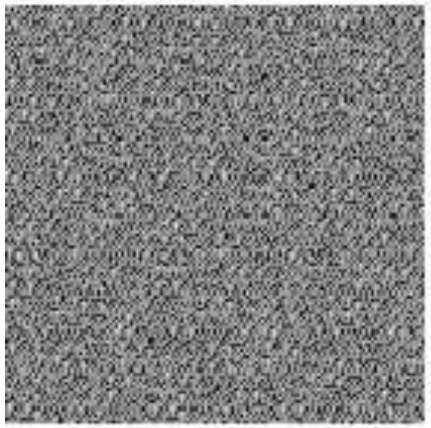
Citra awal



1



3



99



191



192