Bahan kuliah IF4020 Kriptografi

# Kriptografi Klasik

## (Bagian 3)

**Oleh: Dr. Rinaldi Munir**

**Prodi Informatika**

**Sekolah Teknik Elektro dan Informatika**

**2019**

# *Affine Cipher*

- Perluasan dari *Caesar cipher*
- Enkripsi: $C \equiv mP + b \pmod{n}$
- Dekripsi: $P \equiv m^{-1}(C - b) \pmod{n}$
- Kunci: $m$ dan $b$

<u>Keterangan</u>:

*1.* $n$ adalah ukuran alfabet

*2.* $m$ bilangan bulat yang relatif prima dengan $n$

*3.* $b$ adalah jumlah pergeseran

*4.* *Caesar cipher* adalah khusus dari *affine cipher* dengan $m = 1$

*5.* $m^{-1}$ adalah inversi $m \pmod{n}$, yaitu $m \cdot m^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$

- Contoh:

  Plainteks: `kripto` (10 17 8 15 19 14)

  $n$ = 26, ambil $m$ = 7 (7 relatif prima dengan 26)

  Enkripsi: $C \equiv 7P + 10 \pmod{26}$

  $p_1 = 10 \rightarrow c_1 \equiv 7 \cdot 10 + 10 \equiv 80 \equiv 2 \pmod{26}$ (huruf 'C')

  $p_2 = 17 \rightarrow c_2 \equiv 7 \cdot 17 + 10 \equiv 129 \equiv 25 \pmod{26}$ (huruf 'Z')

  $p_3 = 8 \rightarrow c_3 \equiv 7 \cdot 8 + 10 \equiv 66 \equiv 14 \pmod{26}$ (huruf 'O')

  $p_4 = 15 \rightarrow c_4 \equiv 7 \cdot 15 + 10 \equiv 115 \equiv 11 \pmod{26}$ (huruf 'L')

  $p_5 = 19 \rightarrow c_1 \equiv 7 \cdot 19 + 10 \equiv 143 \equiv 13 \pmod{26}$ (huruf 'N')

  $p_6 = 14 \rightarrow c_1 \equiv 7 \cdot 14 + 10 \equiv 108 \equiv 4 \pmod{26}$ (huruf 'E')

  Cipherteks: `CZOLNE`

- Dekripsi:

  - Mula-mula hitung $m^{-1}$ yaitu $7^{-1}$ (mod 26) dengan memecahkan $7x \equiv 1$ (mod 26)

    Solusinya: $x \equiv 15$ (mod 26) sebab $7 \cdot 15 = 105 \equiv 1$(mod 26).

  - Jadi, $P \equiv 15\,(C - 10)$ (mod 26)

$c_1 = 2 \rightarrow p_1 \equiv 15 \cdot (2 - 10) = -120 \equiv 10 \pmod{26}$ (huruf 'k')

$c_2 = 25 \rightarrow p_2 \equiv 15 \cdot (25 - 10) = 225 \equiv 17 \pmod{26}$ (huruf 'r')

$c_3 = 14 \rightarrow p_3 \equiv 15 \cdot (14 - 10) = 60 \equiv 8 \pmod{26}$ (huruf 'i')

$c_4 = 11 \rightarrow p_4 \equiv 15 \cdot (11 - 10) = 15 \equiv 15 \pmod{26}$ (huruf 'p')

$c_5 = 13 \rightarrow p_5 \equiv 15 \cdot (13 - 10) = 45 \equiv 19 \pmod{26}$ (huruf 't')

$c_6 = 4 \rightarrow p_6 \equiv 15 \cdot (4 - 10) = -90 \equiv 14 \pmod{26}$ (huruf 'o')

Plainteks yang diungkap kembali: `kripto`

- *Affine cipher* tidak aman, karena kunci mudah ditemukan dengan *exhaustive search*,

- sebab ada 25 pilihan untuk *b* dan 12 buah nilai *m* yang relatif prima dengan 26 (yaitu 1, 3, 5,  7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, dan 25).

- Salah satu cara memperbesar faktor kerja untuk *exhaustive key search:* enkripsi tidak dilakukan terhadap huruf individual, tetapi dalam blok huruf.

- Misal, pesan `kriptografi` dipecah menjadi kelompok 4-huruf:

```
krip togr afi
```

(ekivalen dengan 10170815 19140617 000508, dengan memisalkan 'A' = 0, 'B' = 1, …, 'Z' = 25)

- Nilai terbesar yang dapat muncul untuk merepresentasikan blok: 25252525 (ZZZZ), maka 25252525 dapat digunakan sebagai modulus *n*.
- Nilai *m* yang relatif prima dengan 25252525, misalnya 21035433,
- *b* dipilih antara 1 dan 25252525, misalnya 23210025.

- Fungsi enkripsi menjadi:

$$C \equiv 21035433P + 23210025 \pmod{25252525}$$

- Fungsi dekripsi, setelah dihitung, menjadi

$$P \equiv 5174971\,(C - 23210025) \pmod{25252525}$$

- *Affine cipher* mudah diserang dengan *known-plaintext attack*.

- Misalkan kriptanalis mempunyai dua buah plainteks, $P_1$ dan $P_2$, yang berkoresponden dengan cipherteks $C_1$ dan $C_2$,

- maka $m$ dan $b$ mudah dihitung dari buah kekongruenan simultan berikut ini:

$$C_1 \equiv mP_1 + b \pmod{n}$$
$$C_2 \equiv mP_2 + b \pmod{n}$$

- Contoh: Misalkan kriptanalis menemukan

  cipherteks **C** dan plainteks berkorepsonden K

  cipherteks **E** dan plainteks berkoresponden O.

- Kriptanalis *m* dan *n* dari kekongruenan berikut:

  $2 \equiv 10m + b \pmod{26}$ (i)

  $4 \equiv 14m + b \pmod{26}$ (ii)

- Kurangkan (ii) dengan (i), menghasilkan

  $2 \equiv 4m \pmod{26}$ (iii)

  Solusi: $m = 7$

  Substitusi $m = 7$ ke dalam (i),

  $2 \equiv 70 + b \pmod{26}$ (iv)

  Solusi: $b = 10$.

# *Hill Cipher*

- Dikembangkan oleh Lester Hill (1929)
- Menggunakan *m* buah persamaan linier
- Untuk *m* = 3 (enkripsi setiap 3 huruf),

$$C_1 = (k_{11}\, p_1 + k_{12} p_2 + k_{13}\, p_3) \bmod 26$$
$$C_2 = (k_{21}\, p_1 + k_{22} p_2 + k_{23}\, p_3) \bmod 26$$
$$C_3 = (k_{31}\, p_1 + k_{32} p_2 + k_{33}\, p_3) \bmod 26$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

**C = KP**

- Contoh:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 5 \\ 21 & 18 & 21 \\ 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

Plainteks: `paymoremoney`

Enkripsi tiga huruf pertama: `pay = (15, 0, 24)`

$$\text{Cipherteks: } C = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 5 \\ 21 & 18 & 21 \\ 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 819 \\ 486 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = \mathtt{LNS}$$

Cipherteks selengkapnya: `LNSHDLEWMTRW`

- Dekripsi perlu menghitung $\mathbf{K}^{-1}$ sedemikian sehingga $\mathbf{KK}^{-1}$ = **I** (**I** matriks identitas).

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \\ 24 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

sebab

$$\begin{pmatrix} 17 & 17 & 5 \\ 21 & 18 & 21 \\ 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \\ 24 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 443 & 442 & 442 \\ 858 & 495 & 780 \\ 494 & 52 & 365 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cara menghitung matriks invers 2 x 2:

K = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   $K^{-1}$ = $\dfrac{1}{\det(K)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Contoh: K = $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$

det(K) = (3)(9) – (15)(10) = 27 – 150 = –123 mod 26 = 7

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} = 7^{-1}\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 15\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -15 & 3 \end{pmatrix} = 15\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & 240 \\ 165 & 45 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$$

Keterangan: (i) $7^{-1}$ (mod 26) $\equiv$ 15, karena
(7)(15) = 105 mod 26 = 1
(ii) –10 $\equiv$ 16 (mod 26)
(iii) –15 $\equiv$ 11 (mod 26) )

Periksa bahwa:

$$\mathbf{KK}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + 10\cdot 9 & 3\cdot 6 + 10\cdot 19 \\ 15\cdot 5 + 9\cdot 9 & 15\cdot 6 + 9\cdot 19 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 105 & 208 \\ 156 & 261 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Untuk matriks 3 x 3:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{K})} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(\mathbf{K})} \begin{pmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{pmatrix}$$

- yang dalam hal ini,

$A = (ei - hf)$ $\quad B = -(di - fg)$ $\quad C = (dh - eg)$

$D = -(bi - hc)$ $\quad E = (ai - cg)$ $\quad F = -(ah - bg)$

$G = (bf - ec)$ $\quad H = -(af - cd)$ $\quad I = (ae - bd)$

dan

$$\det(\mathbf{K}) = aA + bB + cC$$

- Dekripsi:

**P** = **K**$^{-1}$ **C**

Cipherteks: `LNS` atau C = (11, 13, 18)

Plainteks:
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \\ 24 & 0 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 431 \\ 494 \\ 570 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

**C** = (15, 0, 24) = (P, A, Y)

- Kekuatan Hill cipher terletak pada penyembunyian frekuensi huruf tunggal

- Huruf plainteks yang sama belum tentu dienkripsi menjadi huruf cipherteks yang sama.

- *Hill cipher* mudah dipecahkan dengan *known-plaintext attack*.
- Misalkan untuk *Hill cipher* dengan $m$ = 2 diketahui:
  - P = (19, 7) → *C* = (0, 23)
  - P = (4, 17) → *C* = (12, 6)
  - Jadi, **K**(19, 7) = (0, 23) dan **K**(4, 17) = (12, 6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 23 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{K}\begin{pmatrix} 19 & 4 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \bmod 26$$

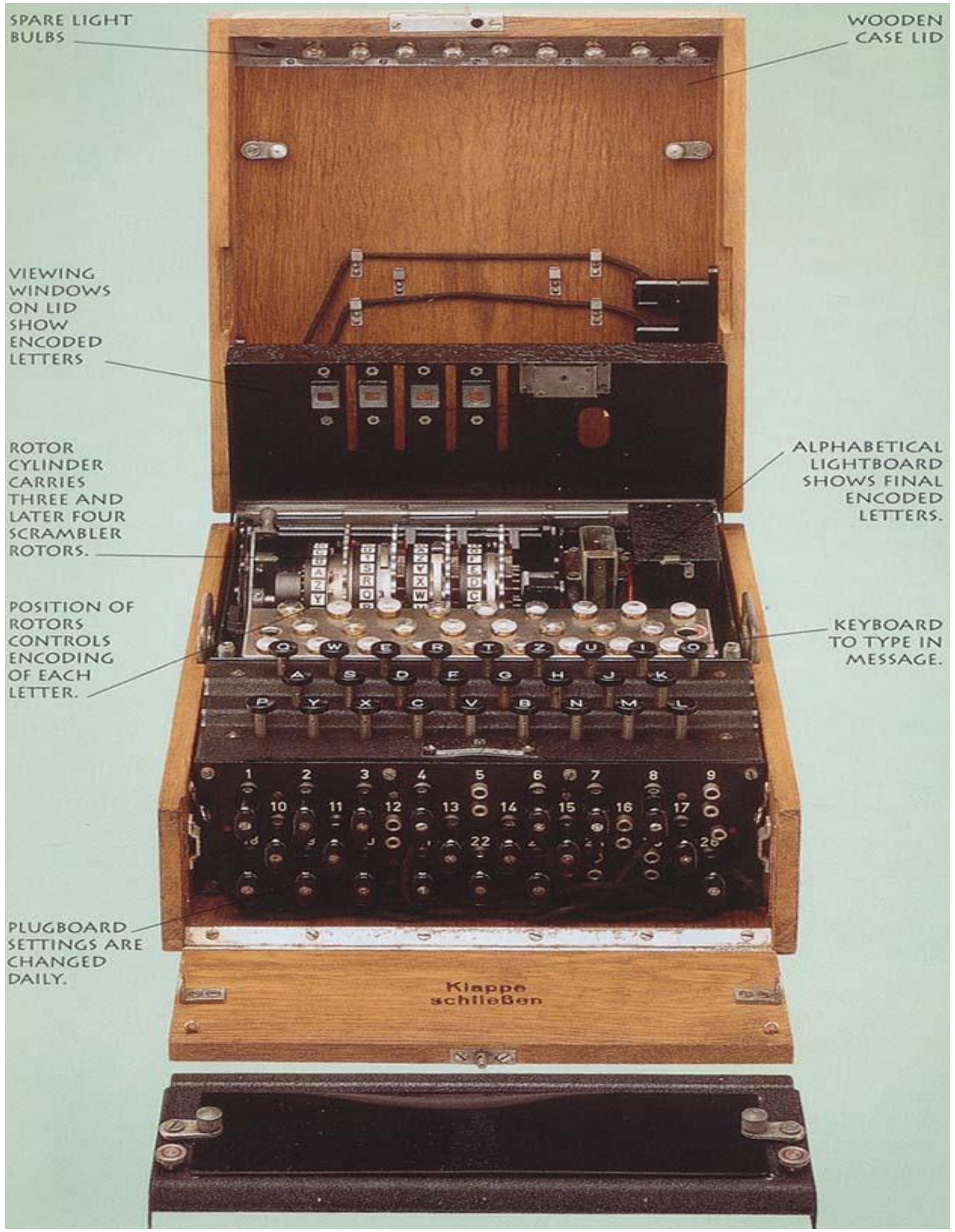
$$\leftarrow \mathrm{C} \rightarrow \qquad\qquad \leftarrow \mathrm{P} \rightarrow$$

  - Inversi dari *P* adalah $P^{-1}$ = $\begin{pmatrix} 19 & 4 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
  - Sehingga

$$\mathbf{K} = \mathbf{CP}^{-1} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 23 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

# Enigma *Cipher*

- Enigma adalah mesin yang digunakan Jerman selama Perang Dunia II untuk mengenkripsi/dekripsi pesan-pesan militer.



- Enigma  menggunakan sistem *rotor* (mesin berbentuk roda yang berputar) untuk membentuk huruf cipherteks yang berubah-ubah.

- Setelah setiap huruf dienkripsi, *rotor* kembali berputar untuk membentuk huruf cipherteks baru untuk huruf plainteks berikutnya.

- Enigma menggunakan 4 buah *rotor* untuk melakukan substitusi.

- Ini berarti terdapat $26 \times 26 \times 26 \times 26$ = 456.976 kemungkinan huruf cipherteks sebagai pengganti huruf plainteks sebelum terjadi perulangan urutan cipherteks.

- Setiap kali sebuah huruf selesai disubstitusi, *rotor* pertama bergeser satu huruf ke atas.

- Setiap kali *rotor* pertama selesai bergeser 26 kali, rotor kedua juga melakukan hal yang sama, demikian untuk *rotor* ke-3 dan ke-4.

Arah gerakan rotor

| | *Slow rotor* | | *Medium rotor* | | *Fast rotor* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 24 | 21 | 26 | 20 | 1 | 8 | A |
| B | 25 | 3 | 1 | 1 | 2 | 18 | B |
| C | 26 | 15 | 2 | 6 | 3 | 26 | C |
| D | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 17 | D |
| E | 2 | 19 | 4 | 15 | 5 | 20 | E |
| F | 3 | 10 | 5 | 3 | 6 | 22 | F |
| G | 4 | 14 | 6 | 14 | 7 | 10 | G |
| H | 5 | 26 | 7 | 12 | 8 | 3 | H |
| I | 6 | 20 | 8 | 23 | 9 | 13 | I |
| J | 7 | 8 | 9 | 5 | 10 | 11 | J |
| K | 8 | 16 | 10 | 16 | 11 | 4 | K |
| L | 9 | 7 | 11 | 2 | 12 | 23 | L |
| M | 10 | 22 | 12 | 22 | 13 | 5 | M |
| N | 11 | 4 | 13 | 19 | 14 | 24 | N |
| O | 12 | 11 | 14 | 11 | 15 | 9 | O |
| P | 13 | 5 | 15 | 18 | 16 | 12 | P |
| Q | 14 | 17 | 16 | 25 | 17 | 25 | Q |
| R | 15 | 9 | 17 | 24 | 18 | 16 | R |
| S | 16 | 12 | 18 | 13 | 19 | 19 | S |
| T | 17 | 23 | 19 | 7 | 20 | 6 | T |
| U | 18 | 18 | 20 | 10 | 21 | 15 | U |
| V | 19 | 2 | 21 | 8 | 22 | 21 | V |
| W | 20 | 25 | 22 | 21 | 23 | 2 | W |
| X | 21 | 6 | 23 | 9 | 24 | 7 | X |
| Y | 22 | 24 | 24 | 26 | 25 | 1 | Y |
| Z | 23 | 13 | 25 | 17 | 26 | 14 | Z |

(a) Kondisi rotor pada penekanan huruf A

Arah gerakan rotor

| | *Slow rotor* | | *Medium rotor* | | *Fast rotor* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 24 | 21 | 26 | 20 | 26 | 14 | A |
| B | 25 | 3 | 1 | 1 | 1 | 8 | B |
| C | 26 | 15 | 2 | 6 | 2 | 18 | C |
| D | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 26 | D |
| E | 2 | 19 | 4 | 15 | 4 | 17 | E |
| F | 3 | 10 | 5 | 3 | 5 | 20 | F |
| G | 4 | 14 | 6 | 14 | 6 | 22 | G |
| H | 5 | 26 | 7 | 12 | 7 | 10 | H |
| I | 6 | 20 | 8 | 23 | 8 | 3 | I |
| J | 7 | 8 | 9 | 5 | 9 | 13 | J |
| K | 8 | 16 | 10 | 16 | 10 | 11 | K |
| L | 9 | 7 | 11 | 2 | 11 | 4 | L |
| M | 10 | 22 | 12 | 22 | 12 | 23 | M |
| N | 11 | 4 | 13 | 19 | 13 | 5 | N |
| O | 12 | 11 | 14 | 11 | 14 | 24 | O |
| P | 13 | 5 | 15 | 18 | 15 | 9 | P |
| Q | 14 | 17 | 16 | 25 | 16 | 12 | Q |
| R | 15 | 9 | 17 | 24 | 17 | 25 | R |
| S | 16 | 12 | 18 | 13 | 18 | 16 | S |
| T | 17 | 23 | 19 | 7 | 19 | 19 | T |
| U | 18 | 18 | 20 | 10 | 20 | 6 | U |
| V | 19 | 2 | 21 | 8 | 21 | 15 | V |
| W | 20 | 25 | 22 | 21 | 22 | 21 | W |
| X | 21 | 6 | 23 | 9 | 23 | 2 | X |
| Y | 22 | 24 | 24 | 26 | 24 | 7 | Y |
| Z | 23 | 13 | 25 | 17 | 25 | 1 | Z |

(b) Posisi rotor stelah penekanan huruf A

- Posisi awal keempat *rotor* dapat di-*set*; dan posisi awal ini menyatakan kunci dari Enigma.

- Jerman meyakini bahwa cipherteks yang dihasilkan Enigma tidak mungkin dipecahkan. Namun, sejarah membuktikan bahwa pihak Sekutu berhasil juga memecahkan kode Enigma.

- Keberhasilan memecahkan Enigma dianggap sebagai faktor yang memperpendek Perang Dunia II menjadi hanya 2 tahun.