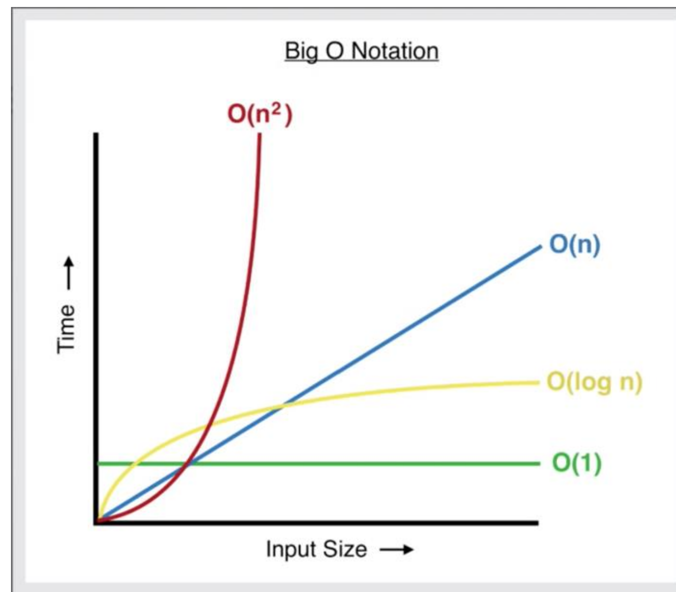


Kompleksitas Algoritma (Bagian 1)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

```
for (i = 1; i <= n, i++)   {
    for (j =1; j <= n; j++) {
        for (k =1; k <= j; k++) {
            p = p * 20 * z;
        }
    }
}
```

Pendahuluan

- Sebuah algoritma tidak saja harus benar (sesuai spesifikasi persoalan), tetapi juga harus sangkil (*efisien*).

- Algoritma yang bagus adalah algoritma yang sangkil (*efficient*).

- Kesangkilan algoritma diukur dari waktu (*time*) yang diperlukan untuk menjalankan algoritma dan ruang (*space*) memori yang dibutuhkan oleh algoritma tersebut.

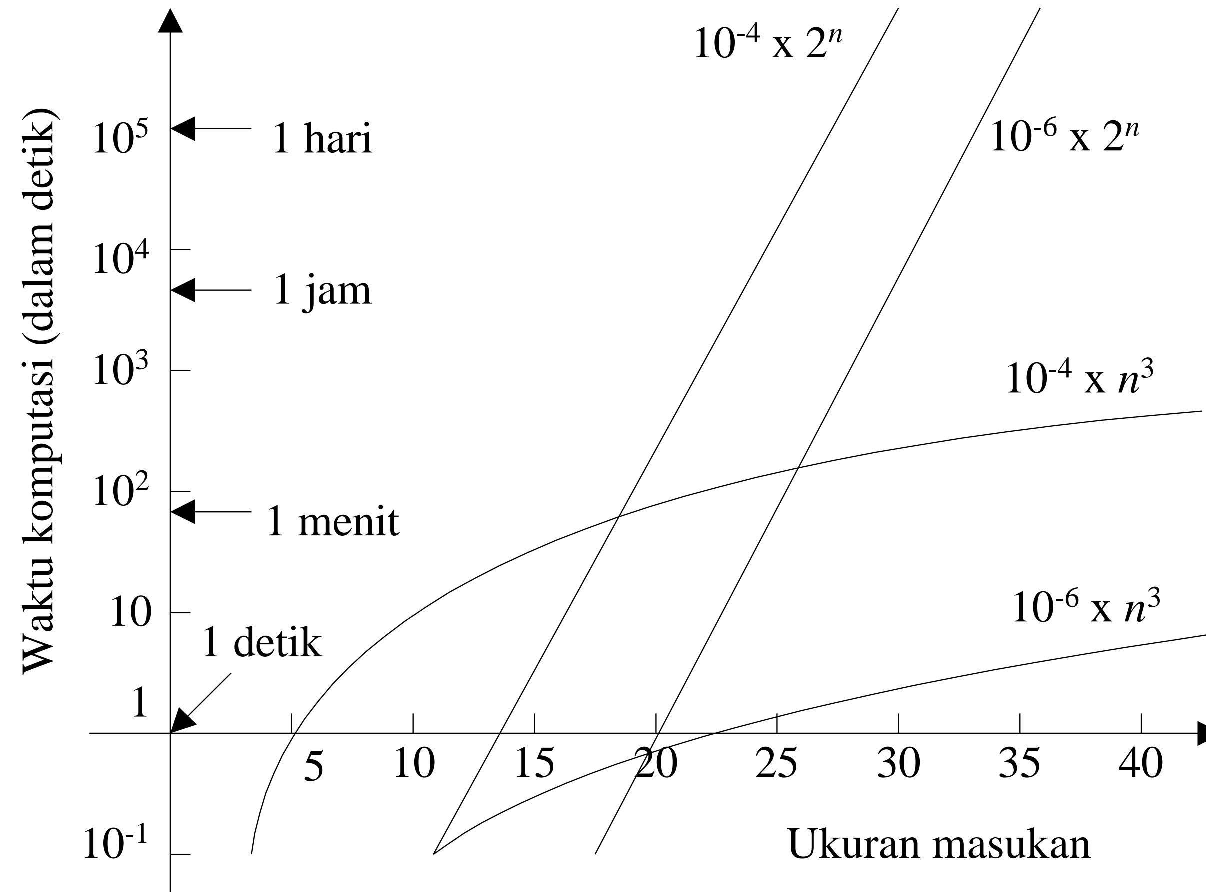
- Algoritma yang sangkil ialah algoritma yang **meminimumkan** kebutuhan waktu dan ruang memori.

- Kebutuhan waktu dan ruang memori suatu algoritma bergantung pada ukuran masukan (n), yang menyatakan ukuran data yang diproses oleh algoritma.

- Kesangkilan algoritma dapat digunakan untuk menilai algoritma yang bagus dari sejumlah algoritma penyelesaian persoalan.

- Sebab, sebuah persoalan dapat memiliki banyak algoritma penyelesaian. Contoh: persoalan pengurutan (*sort*), ada puluhan algoritma pengurutan (*selection sort*, *insertion sort*, *bubble sort*, dll).

- Mengapa kita memerlukan algoritma yang sangkil? Lihat grafik di bawah ini.



Model Perhitungan Kebutuhan Waktu

- Menghitung kebutuhan waktu algoritma dengan mengukur waktu eksekusi riil nya (dalam satuan detik) ketika program (yang merepresentasikan sebuah algoritma) dijalankan oleh komputer bukanlah cara yang tepat.

- Alasan:

  1. Setiap komputer dengan arsitektur berbeda memiliki bahasa mesin yang berbeda → waktu setiap operasi antara satu komputer dengan komputer lain tidak sama.

  2. *Compiler* bahasa pemrograman yang berbeda menghasilkan kode Bahasa mesin yang berbeda → waktu setiap operasi antara *compiler* dengan *compiler* lain tidak sama.

- Model abstrak pengukuran waktu/ruang memori algoritma harus independen dari pertimbangan mesin (*computer*) dan *compiler* apapun.

- Besaran yang dipakai untuk menerangkan model abstrak pengukuran waktu/ruang ini adalah **kompleksitas algoritma**.

- Ada dua macam kompleksitas algoritma, yaitu: **kompleksitas waktu** (*time complexity*) dan **kompleksitas ruang** (*space complexity*).

- Kompleksitas waktu, $T(n)$, diukur dari jumlah tahapan komputasi yang dilakukan di dalam algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n.

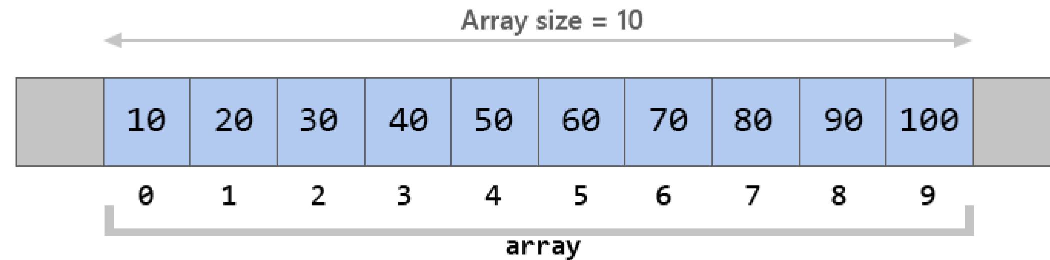
- Kompleksitas ruang, $S(n)$, diukur dari memori yang digunakan oleh struktur data yang terdapat di dalam algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n.

- Dengan menggunakan besaran kompleksitas waktu/ruang algoritma, kita dapat menentukan *laju* peningkatan waktu (ruang) yang diperlukan algoritma dengan meningkatnya ukuran masukan n.

- Di dalam kuliah ini kita hanya membatasi bahasan kompleksitas waktu saja, karena dua alasan:

  1. Materi struktur data diluar lingkup mata kuliah matematika diskrit
  2. Saat ini memori komputer bukan persoalan yang kritis dibandingkan waktu

- Ukuran masukan (*n*) menyatakan banyaknya data yang diproses oleh sebuah algoritma.



Contoh:

1. algoritma pengurutan 10 elemen larik (*array*), maka n = 10.
2. algoritma pencarian pada 500 elemen larik, maka n = 500
3. algoritma *TSP* pada sebuah graf lengkap dengan 100 simpul, maka n = 100.
4. algoritma perkalian 2 buah matriks berukuran 50 x 50, maka n = 50.
5. algoritma menghitung polinom dengan derajat $\leq$ 100, maka n = 100

- Dalam perhitungan kompleksitas waktu, ukuran masukan dinyatakan sebagai variabel n saja (bukan instans suatu nilai).

Kompleksitas Waktu

- Pekerjaan utama di dalam kompleksitas waktu adalah menghitung (*counting*) jumlah tahapan komputasi di dalam algoritma .

- Jumlah tahapan komputasi dihitung dari berapa kali suatu operasi dilakukan sebagai fungsi ukuran masukan (*n*).

- Di dalam sebuah algoritma terdapat banyak jenis operasi:
  - Operasi baca/tulis (input a, print a)
  - Operasi aritmetika (+, -, *, /) (a + b, M * N)
  - Operasi pengisian nilai (*assignment*) ($a \leftarrow 10$)
  - Operasi perbandingan ($a < b$, $k >= 10$)
  - Operasi pengaksesan elemen larik, pemanggilan prosedur/fungsi, dll

- Untuk menyederhanakan perhitungan, kita tidak menghitung semua jenis operasi, tetapi kita hanya menghitung jumlah operasi khas (tipikal) yang *mendasari* suatu algoritma.

Contoh operasi khas di dalam algoritma

- Algoritma pencarian (*searching*)
  Operasi khas: operasi perbandingan elemen larik

- Algoritma pengurutan (*sorting*)
  Operasi khas: operasi perbandingan elemen dan operasi pertukaran elemen

- Algoritma perkalian dua buah matriks *AB* = *C*
  Operasi khas: operasi perkalian dan penjumlahan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\text{x}10 + 2\text{x}20 + 3\text{x}30 & 1\text{x}11 + 2\text{x}21 + 3\text{x}31 \\ 4\text{x}10 + 5\text{x}20 + 6\text{x}30 & 4\text{x}11 + 5\text{x}21 + 6\text{x}31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+40+90 & 11+42+93 \\ 40+100+180 & 44+105+186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix}$$

- Algoritma menghitung nilai sebuah polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
  Operasi khas: operasi perkalian dan penjumlahan

Contoh 1. Tinjau algoritma menghitung rerata elemen di dalam sebuah larik (*array*).

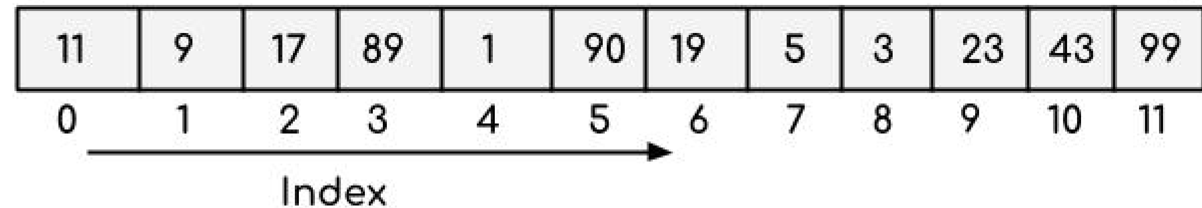
$sum \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

  $sum \leftarrow sum + a[i]$

endfor

$rata_rata \leftarrow sum/n$

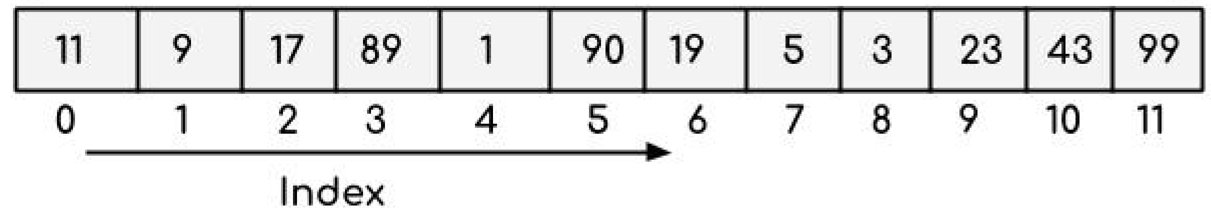


- Operasi yang mendasar pada algoritma tersebut adalah operasi penjumlahan elemen-elemen larik (yaitu $sum \leftarrow sum + a[i]$) yang dilakukan sebanyak *n* kali.

- Kompleksitas waktu: $T(n) = n$.

Contoh 2. Algoritma untuk mencari elemen terbesar di dalam sebuah larik (*array*) yang berukuran *n* elemen.

```
procedure CariElemenTerbesar(input a1, a2, ..., an : integer, output maks : integer)
{ Mencari elemen terbesar dari sekumpulan elemen larik integer a1, a2, ..., an.
  Elemen terbesar akan disimpan di dalam maks.   }
Deklarasi
   k : integer
Algoritma
  maks ← a1
  k←2
  while k ≤ n do
    if  ak > maks then
       maks←ak
    endif
    i ← i + 1
  endwhile
```



Kompleksitas waktu algoritma dihitung dari jumlah operasi perbandingan elemen larik (a_k > *maks*).
Kompleksitas waktu *CariElemenTerbesar* : $T(n) = n - 1$.

Kompleksitas waktu dibedakan atas tiga macam :

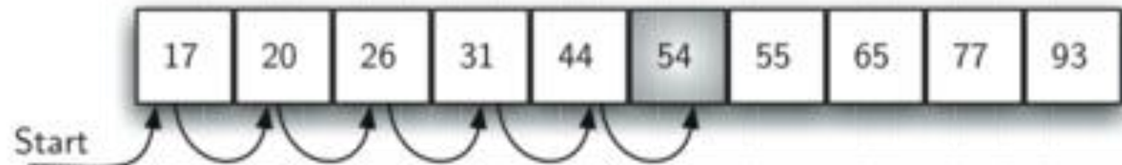
1. $T_{max}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terburuk *(worst case),*
   → kebutuhan waktu maksimum.

2. $T_{min}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terbaik *(best case),*
   → kebutuhan waktu minimum.

3. $T_{avg}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus rata-rata *(average case)*
   → kebutuhan waktu secara rata-rata

Contoh 3. Algoritma *sequential search* (linear search)

```
procedure PencarianBeruntun(input a1, a2, ..., an : integer, x : integer, output idx : integer)
{ Mencari elemen x di dalam larik A yang berisi n elemen. Jika x ditemukan, maka indeks elemen larik disimpan
  di dalam idx, idx bernilai –1 jika x tidak ditemukan
Deklarasi
   k : integer
   ketemu : boolean   { bernilai true jika x ditemukan atau false jika x tidak ditemukan }
Algoritma:
  k←1
  ketemu ← false
  while (k ≤ n) and (not ketemu) do
     if  ak = x  then
         ketemu←true
    else
         k ← k + 1
    endif
  endwhile
  if  ketemu then   { x ditemukan }
      idx←k
  else
      idx← –1      { x tidak ditemukan }
  endif
```



Jumlah operasi perbandingan elemen tabel:

1. *Kasus terbaik*: ini terjadi bila $a_1 = x$.

$$T_{\min}(n) = 1$$

2. *Kasus terburuk*: bila $a_n = x$ atau x tidak ditemukan.

$$T_{\max}(n) = n$$

3. *Kasus rata-rata*: Jika x ditemukan pada posisi ke-j, maka operasi perbandingan (`ak = x`) akan dieksekusi sebanyak j kali.

$$T_{avg}(n) = \frac{(1 + 2 + 3 + ... + n)}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n} = \frac{(n+1)}{2}$$

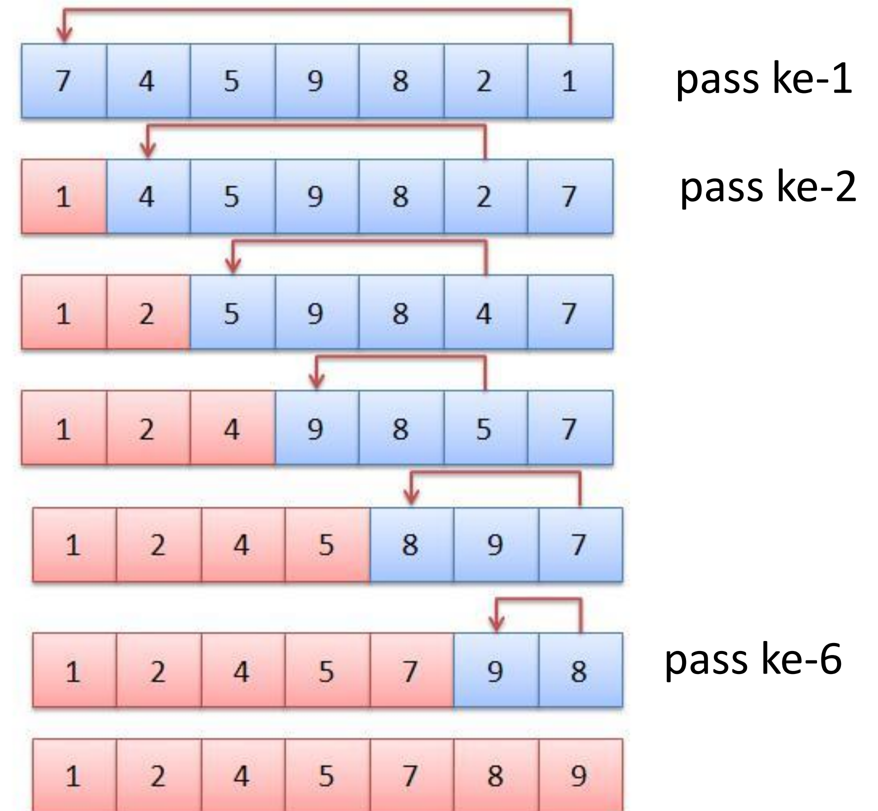
Cara lain: asumsikan bahwa $P(a_j = x) = 1/n$. Jika $a_j = x$ maka T_j yang dibutuhkan adalah $T_j = j$. Jumlah perbandingan elemen larik rata-rata:

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{j=1}^{n} T_j \, P(a[j] = x) = \sum_{j=1}^{n} T_j \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T_j$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{2}$$

Contoh 4: Algoritma pengurutan seleksi (*selection sort*)

procedure *SelectionSort*(**input/output** $a_1, a_2, ..., a_n$: **integer**)
{ Mengurutkan elemen-elemen larik A yang berisi n elemen integer sehingga terurut menaik }
Deklarasi
  i, *j*, *imin*, *temp* : **integer**
Algoritma
  for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**   *{ pass sebanyak n – 1 kali }*
    $imin \leftarrow i$
    for $j \leftarrow i + 1$ **to** n **do**
      if $a_j < a_{imin}$ **then**
        $imin \leftarrow j$
      endif
    endfor
    { pertukarkan a_{imin} *dengan* a_i *}*
    $temp \leftarrow a_i$
    $a_i \leftarrow a_{imin}$
    $a_{imin} \leftarrow temp$
  endfor



(i) Jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik ($a_j < a_{imin}$)

Untuk setiap pass ke-*i*,

i = 1 $\rightarrow$ jumlah perbandingan = n – 1

i = 2 $\rightarrow$ jumlah perbandingan = n – 2

i = 3 $\rightarrow$ jumlah perbandingan = n – 3

⋮

i = n – 1 $\rightarrow$ jumlah perbandingan = 1

```
for i←1 to n – 1 do   { pass sebanyak n – 1 kali }
   imin←i
   for j←i + 1 to n do
      if a_j < a_imin then
         imin←j
      endif
   endfor
   { pertukarkan a_imin dengan a_i }
   temp←a_i
   a_i←a_imin
   a_imin←temp
endfor
```

Jumlah seluruh operasi perbandingan elemen-elemen larik adalah

$$T(n) = (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ini adalah kompleksitas waktu untuk kasus terbaik dan terburuk, karena algoritma *SelectionSort* tidak bergantung pada apakah data masukannya sudah terurut atau acak.

```
for i←1 to n – 1 do   { pass sebanyak n – 1 kali }
    imin←i
    for j←i + 1 to n do
        if a_j < a_imin then
            imin←j
        endif
    endfor
    { pertukarkan a_imin dengan a_i }
    temp←a_i
    a_i←a_imin
    a_imin←temp
endfor
```

(ii) Jumlah operasi pertukaran

Untuk setiap i dari 1 sampai $n – 1$, terjadi satu kali pertukaran elemen, sehingga jumlah operasi pertukaran seluruhnya adalah

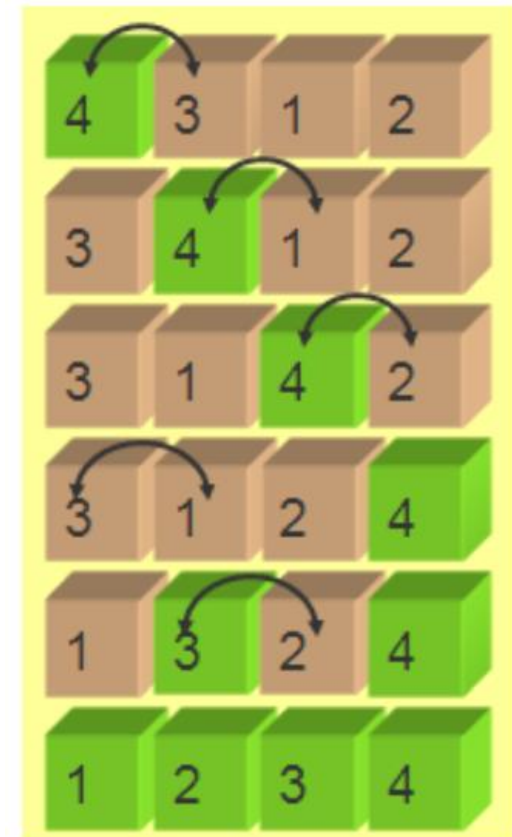
$$T(n) = n – 1.$$

Ini adalah jumlah pertukaran untuk semua kasus.

Jadi, algoritma pengurutan seleksi membutuhkan $n(n – 1)/2$ buah operasi perbandingan elemen dan $n – 1$ buah operasi pertukaran.

Contoh 5: Diberikan algoritma pengurutan *bubble-sort* seperti berikut ini. Hitung kompleksitas waktu algoritma didasarkan pada jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik dan jumlah operasi pertukaran.

```
procedure BubbleSort(input/output a1, a2, ..., an : integer)
{ Mengurut larik A yang berisi n elemen integer sehingga terrut menaik }
Deklarasi
   i, j, temp : integer
Algoritma
   for i ← n – 1 downto 1 do
      for j ← 1 to i do
         if a[j+1] < a[j] then
            { pertukarkan a[j] dengan a[j+1] }
            temp ← a[j]
            a[j] ← a[j+1]
            a[j+1] ← temp
         endif
      endfor
   endfor
```



Sumber gambar: Prof. Amr Goneid, Department of Computer Science, AUC

(i) Jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik ($a_{j+1} < a_j$)

Untuk setiap *pass* ke-*i*,

$i = n - 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 1$

$i = n - 2 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 2$

$i = n - 3 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 3$

$\vdots$

$i = 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= 1$

```
for i ← n – 1 downto 1 do
   for j ← 1 to i do
      if a[j+1] < a[j] then
         { pertukarkan a[j] dengan a[j-1] }
         temp ← a[j]
         a[j] ← a[j+1]
         a[j+1] ← temp
      endif
   endfor
endfor
```

Jumlah seluruh operasi perbandingan elemen-elemen larik adalah

$$T(n) = (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ini adalah kompleksitas waktu untuk kasus terbaik dan terburuk, karena algoritma *BubbleSort* tidak bergantung pada apakah data masukannya sudah terurut atau acak. Jumlah operasi perbandingan sama dengan *selection sort.*

(ii) Jumlah operasi pertukaran ($temp \leftarrow a_i$; $a_i \leftarrow a_{imin}$; $a_{imin} \leftarrow temp$)

Jumlah operasi pertukaran di dalam *bubble sort* hanya dapat dihitung pada kasus terbaik dan kasus terburuk. Kasus terbaik adalah tidak ada pertukaran (yaitu jika **if** $a_{j+1} < a_j$ false), yaitu semua elemen larik pada awalnya sudah terurut menaik, sehingga

$$T_{min}(n) = 0.$$

Pada kasus terburuk, (yaitu jika **if** $a_{j+1} < a_j$ bernilai true), pertukaran elemen selalu dilakukan. Jadi, jumlah operasi pertukaran elemen pada kasus terburuk sama dengan jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik, yaitu

$$T_{max}(n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Jadi, algoritma pengurutan *bubble sort* membutuhkan $n(n-1)/2$ buah operasi pertukaran, lebih banyak daripada algoritma *selection sort*. Ini berarti secara keseluruhan *bubble sort* lebih buruk daripada *selection sort*.

Latihan 1

Hitung kompleksitas waktu algoritma berikut berdasarkan jumlah operasi perkalian.

```
procedure Kali(input x : integer, n : integer, output jumlah : integer)
{Mengalikan x dengan i = 1, 2, ..., j, yang dalam hal ini j = n, n/2, n/4, ...,1. Hasil perkalian disimpan di
dalam peubah jumlah. }
Deklarasi
    i, j, k : integer
Algoritma
  j ← n
  while  j ≥ 1 do
     for  i ← 1 to j do
         x ← x * i
     endfor
     j  ← j  div 2
  endwhile
  jumlah←x
```

Jawaban

```
j ← n
while j ≥ 1 do
   for i ← 1 to j do
      x ← x * i
   endfor
   j ← j div 2
endwhile
jumlah ← x
```

Untuk

$j = n$, jumlah operasi perkalian = n

$j = n/2$, jumlah operasi perkalian = $n/2$

$j = n/4$, jumlah operasi perkalian = $n/4$

…

$j = 1$, jumlah operasi perkalian = 1

Jumlah operasi perkalian seluruhnya adalah

$= n + n/2 + n/4 + \ldots + 2 + 1$ → deret geometri

$$= \frac{n(1 - 2^{{}^2\log n - 1})}{1 - \frac{1}{2}} = 2n - 1$$

Latihan 2

Di bawah ini adalah algoritma untuk menguji apakah dua buah matriks, *A* dan *B*, yang masing-masing berukuran $n \times n$, sama.

```
function samaMatriks(A, B : matriks; n : integer) → boolean
{ true jika A dan B sama; sebaliknya false jika A ≠ B }
 Deklarasi
    i, j : integer
 Algoritma:
   for i ← 1 to n do
     for j ← 1 to n do
        if  A[i,j] ≠ B[i,j] then
           return  false
        endif
     endfor
   endfor
   return true
```

(a) Apa kasus terbaik dan terburuk untuk algoritma di atas?

(b) Tentukan kompleksitas waktu terbaik dan terburuknya.

Jawaban:

(a) Kasus terbaik terjadi jika ketidaksamaan matriks ditemukan pada elemen pertama ($A_{1,1} \neq B_{1,1}$)

Kasus terburuk terjadi jika ketidaksamaan matriks ditemukan pada elemen ujung kanan bawah ($A_{n,n} \neq B_{n,n}$) atau pada kasus matriks A dan B sama, sehingga seluruh elemen matriks dibandingkan.

(b) $T_{min}(n) = 1$

$T_{max}(n) = n^2$

Latihan Mandiri

1. Diberikan matriks persegi berukuran n x n. Hitung kompleksitas waktu untuk memeriksa apakah matriks tersebut merupakan matriks simetri terhadap diagonal utama.

2. Berapa kompleksitas waktu untuk menjumlahkan matriks A dan B yang keduanya berukuran n x n?

3. Ulangi soal 2 untuk perkalian matriks A dan B.

4. Tulislah algoritma pengurutan *insertion sort* pada larik yang berukuran n elemen, hitung masing-masing kompleksitas waktu algoritma diukur dari jumlah operasi perbandingan dan jumlah operasi pertukaran elemen-elemen larik.

5. Berapa kali operasi penjumlahan pada potongan algoritma ini dilakukan?

```
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
        for k ← 1 to j do
            x ← x + 1
        endfor
    endfor
endfor
```

6. Algoritma di bawah ini menghitung nilai polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

```
function p(input x:real)→real
{ Mengembalikan nilai p(x)}
Deklarasi
    j, k : integer
    jumlah, suku : real
Algoritma
   jumlah ← a0
   for  j ← 1 to n do
     { hitung aj x^j }
      suku ← aj
      for  k ← 1 to j do
           suku ← suku * x
       endfor
       jumlah ← jumlah + suku
    endfor
    return jumlah
```

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma tsb

Algoritma menghitung polinom yang lebih baik dapat dibuat dengan metode Horner berikut: $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)))\ldots))$

```
function p2(input x:real)→real
{ Mengembalikan nilai p(x) dengan metode Horner}
 Deklarasi
   k : integer
   b1, b2, ..., bn : real
Algoritma
  bn←an
  for k←n – 1 downto 0 do
      bk←ak + bk+1 * x
  endfor
  return b0
```

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma di atas? Manakah yang terbaik, algoritma *p* atau *p*2?

BERSAMBUNG