

Bahan kuliah II4021 Kriptografi

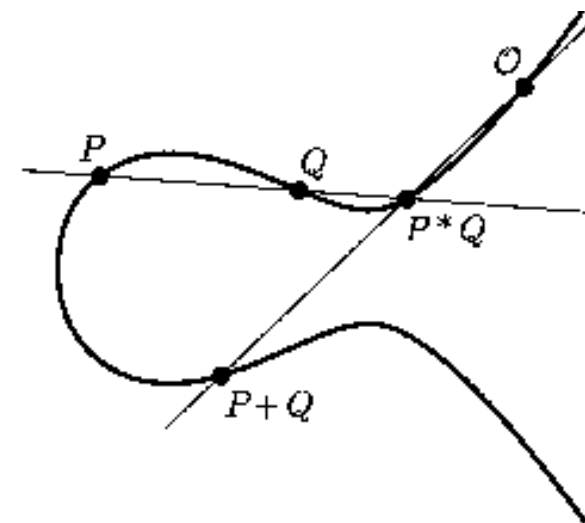
Elliptic Curve Cryptography (ECC)

(Bagian 1)



Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2026



Referensi:

1. Andreas Steffen, *Elliptic Curve Cryptography*, Zürcher Hochschule Winterthur.
2. Debdeep Mukhopadhyay, *Elliptic Curve Cryptography* , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras.
3. Anoop MS , *Elliptic Curve Cryptography, an Implementation Guide*

Teori Aljabar Abstrak

- Sebelum membahas ECC, perlu dipahami beberapa konsep aljabar abstrak yang mendasarinya.
- Konsep aljabar abstrak:
 1. Grup (*group*)
 2. Cincin (*ring*)
 3. Medan (*field*)
 3. Galois field

Grup

- Grup (*group*) adalah sistem aljabar yang terdiri dari:
 - sebuah himpunan G
 - sebuah operasi biner $*$

sedemikian sehingga untuk semua elemen a , b , dan c di dalam G berlaku aksioma berikut:

1. *Closure*: $a * b$ harus berada di dalam G
 2. Asosiatif: $a * (b * c) = (a * b) * c$
 3. Elemen netral: terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$
 4. Elemen invers: terdapat $a' \in G$ sedemikian sehingga $a * a' = a' * a = e$
- Notasi: $\langle G, * \rangle$

- $\langle G, + \rangle$ menyatakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan.
- $\langle G, \cdot \rangle$ menyatakan sebuah grup dengan operasi perkalian

Contoh-contoh grup:

1. $\langle \mathbb{R}, + \rangle$: grup dengan himpunan bilangan riil dengan operasi +
 $e = 0$ dan $a' = -a$
2. $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$: grup dengan himpunan bilangan riil tidak nol (yaitu, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)
dengan operasi kali (\cdot)
 $e = 1$ dan $a' = 1/a = a^{-1}$
3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ masing-masing adalah grup dengan himpunan bilangan bulat (*integer*) dengan operasi + dan \cdot

4. $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus \rangle$: grup dengan himpunan *integer* modulo n , yaitu $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ dan \oplus adalah operasi penjumlahan modulo n .

Contoh: $n = 5$, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $(3 \oplus 4) = (3 + 4) \bmod 5 = 2$

$\langle \mathbb{Z}_p, \oplus \rangle$: grup dengan himpunan *integer* modulo p , p adalah bilangan prima, yaitu $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ dan \oplus adalah operasi penjumlahan modulo p .

$\langle \mathbb{Z}_p^*, \otimes \rangle$: dengan himpunan integer bukan nol, p adalah bilangan prima, yaitu $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p - 1\}$ dan \otimes adalah operasi perkalian modulo p .

- Sebuah grup $\langle G, * \rangle$ dikatakan **grup komutatif** atau **grup abelian** (atau disingkat **abelian** saja) jika berlaku aksioma komutatif $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$.
- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ adalah abelian
- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ adalah abelian
- tetapi, $\langle M, \times \rangle$, dengan M adalah himpunan matriks 2×2 dengan determinan $\neq 0$ bukan abelian (tanya kenapa?)

Ket: Abelian diambil dari kata “abel”, untuk menghormati Niels Abel, seorang Matematikawan Norwegia (1802 – 1829)

Niels Henrik Abel (5 August 1802 – 6 April 1829) was a [Norwegian mathematician](#) who made pioneering contributions in a variety of fields. His most famous single result is the first complete proof demonstrating the impossibility of solving the [general quintic equation](#) in radicals. This question was one of the outstanding open problems of his day, and had been unresolved for 250 years. He was also an innovator in the field of [elliptic functions](#), discoverer of [Abelian functions](#). Despite his achievements, Abel was largely unrecognized during his lifetime; he made his discoveries while living in poverty and died at the age of 26.

Most of his work was done in six or seven years of his working life.^[1] Regarding Abel, the French mathematician [Charles Hermite](#) said: "Abel has left mathematicians enough to keep them busy for five hundred years."^{[1][2]} Another French mathematician, [Adrien-Marie Legendre](#), said: "*quelle tête celle du jeune Norvégien!*" ("what a head the young Norwegian has!").^[3]

Sumber: Wikipedia

Born	5 August 1802 Nedstrand, Norway
Died	6 April 1829 (aged 26) Froland, Norway
Residence	Norway
Nationality	Norwegian
Fields	Mathematics
<i>Alma mater</i>	Royal Frederick University
Known for	



[Abel's binomial theorem](#)
[Abelian category](#)
[Abelian variety](#)
[Abelian variety of CM-type](#)
[Abel equation](#)
[Abel equation of the first kind](#)
[Abelian extension](#)
[Abel function](#)
[Abelian group](#)
[Abel's identity](#)
[Abel's inequality](#)
[Abel's irreducibility theorem](#)
[Abel–Jacobi map](#)
[Abel–Plana formula](#)
[Abel–Ruffini theorem](#)
[Abelian means](#)
[Abel's summation formula](#)
[Abel's theorem](#)
[Abel transform](#)
[Abel transformation](#)
[Abelian variety](#)
[Dual abelian variety](#)

Medan (*Field*)

- Medan (*field*) adalah system aljabar yang terdiri dari
 - himpunan elemen (disimbolkan dengan F)
 - operasi biner, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot).
- Sebuah struktur aljabar $\langle F, +, \cdot \rangle$ disebut medan jika dan hanya jika:
 1. $\langle F, + \rangle$ adalah grup abelian
 2. $\langle F - \{0\}, \cdot \rangle$ adalah grup abelian
 3. Operasi \cdot menyebar terhadap operasi $+$ (sifat distributif)
Distributif: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
 $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$
- Jadi, sebuah medan memenuhi aksioma: *closure*, komutatif, asosiatif, dan distributif

- Contoh medan:
 - medan bilangan bulat, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$
 - medan bilangan riil, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
 - medan bilangan rasional (p/q), $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$
- Sebuah medan disebut berhingga (*finite field*) jika himpunannya memiliki jumlah elemen yang berhingga.
Jika jumlah elemen di dalam himpunan adalah n , maka notasinya F_n
Contoh: F_2 adalah medan dengan elemen 0 dan 1
- Medan berhingga sering dinamakan juga **Galois Field**, untuk menghormati Evariste Galois, seorang matematikawan Perancis (1811 – 1832)

Evariste Galois



Born	25 October 1811 Bourg-la-Reine, French Empire
Died	31 May 1832 (aged 20) Paris, Kingdom of France
Nationality	French
Fields	Mathematics
Known for	Work on the theory of equations and Abelian integrals

Medan Berhingga F_p

- Kelas medan berhingga yang penting adalah F_p , dengan p adalah bilangan prima.
- F_p adalah medan berhingga dengan himpunan bilangan bulat $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, p bilangan prima, dan dua operasi yang didefinisikan sbb:

1. Penjumlahan, dilakukan dalam modulus p

Jika $a, b \in F_p$, maka $a + b = r$, yang dalam hal ini
 $r = (a + b) \bmod p$, $0 \leq r \leq p - 1$

2. Perkalian, dilakukan dalam modulus p

Jika $a, b \in F_p$, maka $a \cdot b = s$, yang dalam hal ini
 $s = (a \cdot b) \bmod p$, $0 \leq s \leq p - 1$

Contoh: F_{23} mempunyai anggota $\{0, 1, 2, \dots, 22\}$.

Contoh operasi aritmetika di dalam F_{23} :

$$12 + 20 = 9 \text{ (karena } 12 + 20 = 32 \text{ mod } 23 = 9)$$

$$8 \cdot 9 = 3 \quad \text{(karena } 8 \times 9 = 72 \text{ mod } 23 = 3)$$

Medan Galois (*Galois Field*)

- Medan Galois adalah medan berhingga dengan p^m elemen, p adalah bilangan prima dan $m \geq 1$.
- Notasi: $GF(p^m)$
- Kasus paling sederhana: bila $m = 1 \rightarrow GF(p)$ atau F_p
- $GF(p)$ terdiri dari himpunan $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ dan operasi penjumlahan dan perkalian dilakukan di dalam modulus p .

1. Penjumlahan, dilakukan dalam modulus p

Jika $a, b \in GF(p)$, maka $a + b = r$, yang dalam hal ini $r = (a + b) \bmod p$, $0 \leq r \leq p - 1$

2. Perkalian, dilakukan dalam modulus p

Jika $a, b \in GF(p)$, maka $a \cdot b = s$, yang dalam hal ini $s = (a \cdot b) \bmod p$, $0 \leq s \leq p - 1$

$p = 2 \rightarrow$

$GF(2):$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$p = 3 \rightarrow$

$GF(3):$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- Contoh: Bentuklah tabel perkalian untuk GF(11), kemudian tentukan solusi untuk $x^2 \equiv 5 \pmod{11}$

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	4	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$$x^2 \equiv 5 \pmod{11}$$

Maka:

$$x^2 = 16 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x^2 = 49 \rightarrow x_2 = 7$$

Cara lain: cari elemen diagonal = 5, lalu ambil elemen mendatar atau elemen Vertikalnya (dilingkari).

Sumber: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Galois Field $GF(2^m)$

- Dari $GF(p^m)$, jika $p = 2$, maka $GF(2^m)$ disebut juga medan berhingga biner.
- $GF(2^m)$ atau F_2^m adalah ruang vektor berdimensi m pada $GF(2)$. Setiap elemen di dalam $GF(2^m)$ adalah integer dalam representasi biner sepanjang maksimal m bit.

Contoh: $GF(2^4)$, $GF(2^8)$, dst

- String biner $b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0$, $b_i \in \{0,1\}$, dapat dinyatakan sebagai polinom

$$b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1x + b_0$$

- Jadi, setiap $a \in GF(2^m)$ dapat dinyatakan sebagai

$$b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1x + b_0$$

- Contoh: 1101 di dalam $GF(2^4)$ dapat dinyatakan sebagai polinom $x^3 + x^2 + 1$
01010111 di dalam $GF(2^8)$ dapat dinyatakan sebagai polinom $x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$

Operasi aritmetika pada $GF(2^m)$

Misalkan $a = (a_{m-1} \dots a_1 a_0)$ dan $b = (b_{m-1} \dots b_1 b_0) \in GF(2^m)$

- Penjumlahan:

$a + b = c = (c_{m-1} \dots c_1 c_0)$, yang dalam hal ini $c_i = (a_i + b_i) \bmod 2$, $c \in GF(2^m)$

- Perkalian: $a \cdot b = c = (c_{m-1} \dots c_1 c_0)$, yang dalam hal ini c adalah sisa pembagian polinom $a(x) \cdot b(x)$ dengan *irreducible polynomial* derajat m , $c \in GF(2^m)$.

Note: Sebuah polinom dikatakan tidak dapat direduksi (*irreducible polynomial*) jika ia tidak dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua buah polinom lain (kecuali perkalian dengan 1 dan dirinya sendiri).

Polinom $x^2 + 1$ dan $x^4 + x + 1$ adalah *irreducible* di dalam $GF(2^m)$,

tetapi polinom $x^5 + x^2 + x + 1$ *reducible* karena $x^5 + x^2 + x + 1 = (x^5 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)$

Contoh 1: Misalkan $a = 00001101 = x^3 + x^2 + 1$ dan $b = 00000110 = x^2 + x$
 a dan $b \in GF(2^8)$ (dalam notasi Hex, $a = '0D'$ dan $b = '06'$)

(i) $a + b = '0D' + '06' = (x^3 + x^2 + 1) + (x^2 + x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \pmod{2}$
Bagi tiap koefisien dengan 2,
lalu ambil sisanya
 $= x^3 + 0x^2 + x + 1$
 $= x^3 + x + 1 = 00001011 = '0B'$

Dalam representasi biner:

00001101

00000110 +

00001011 \rightarrow sama dengan hasil operasi XOR

$$\therefore a + b = 00001011 = a \text{ XOR } b$$

Contoh 2: Misalkan $a = 01010111 = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ dan $b = 10000011 = x^7 + x + 1$
a dan $b \in GF(2^8)$ (dalam notasi Hex, $a = '57'$ dan $b = '83'$)

$$\begin{aligned} \text{(i) } a + b &= '57' + '83' = (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) + (x^7 + x + 1) \\ &= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 2 \pmod{2} && \text{Bagi tiap koefisien dengan 2,} \\ &= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 0 && \text{lalu ambil sisanya} \\ &= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x = 11010100 = 'D4' \end{aligned}$$

Dalam representasi biner:

01010111

10000011 +

11010100 → sama dengan hasil operasi XOR

$$\therefore a + b = 11010100 = a \text{ XOR } b$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad a \cdot b &= (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) \cdot (x^7 + x + 1) \\
&= x^{13} + x^7 + x^6 + x^{11} + x^5 + x^4 + x^9 + x^3 + x^2 + x^8 + x^2 + x + x^7 + x + 1 \pmod{2} \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + 2x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \pmod{2} \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + 0x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1
\end{aligned}$$

Karena $m = 8$, maka hasil perkalian di atas direduksi menjadi derajat < 8 oleh *irreducible polynomial*.

Contoh, algoritma Rijndael (AES) beroperasi dalam $GF(2^8)$ dan menggunakan *irreducible polynomial* $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$

$$x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \pmod{f(x)} = x^7 + x^6 + 1 = 11000001$$

$$\therefore a \cdot b = 11000001 = \text{'C1'}$$

$$\begin{array}{r}
 x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \quad / \quad \begin{array}{l} x^5 + x^3 + \\ \hline x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \\ x^{13} \quad + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 \\ \hline x^{11} + \quad \quad \quad + x^4 + x^3 + 1 \\ x^{11} + \quad \quad \quad x^7 + x^6 + x^4 + x^3 \\ \hline x^7 + x^6 \quad \quad \quad + 1 \end{array} \\
 \hline
 \text{Sisa pembagian}
 \end{array}$$

Jadi, $x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \pmod{f(x)} = x^7 + x^6 + 1 = 11000001$

$$\begin{aligned} \text{Contoh 3: } a \cdot b &= (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x \pmod{2} \\ &= x^5 + x^3 + x^2 + x = 10110 \end{aligned}$$

Karena $m = 4$ hasilnya direduksi menjadi derajat < 4 oleh sebuah *irreducible polynomial* $f(x) = x^4 + x + 1$

Proses pembagiannya ditunjukkan sebagai berikut:

$$x^4 + x + 1 \overline{) \begin{array}{r} x \\ x^5 + x^3 + x^2 + x \\ \underline{x^5 + \quad \quad x^2 + x \quad +} \\ x^3 \end{array} \rightarrow \text{sisa pembagian}$$

$$\text{Jadi, } (x^5 + x^3 + x^2 + x) \pmod{f(x)} = x^3 = 1000$$

$$\therefore a \cdot b = 1000$$

BERSAMBUNG