

Bahan kuliah II4021 Kriptografi

17- Review Beberapa Block Cipher

(Bagian 2: Advanced Encryption Standard - AES)



Oleh: Rinaldi M

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2026

Latar Belakang

- DES dianggap sudah tidak aman karena kunci dapat ditemukan secara *brute-force*.
- Perlu diusulkan standard algoritma baru sebagai pengganti DES.
- *National Institute of Standards and Technology (NIST)* mengusulkan kepada Pemerintah Federal AS untuk sebuah standard kriptografi baru.
- *NIST* mengadakan lomba membuat standard algoritma kriptografi yang baru. Standard tersebut kelak diberi nama ***Advanced Encryption Standard (AES)***.

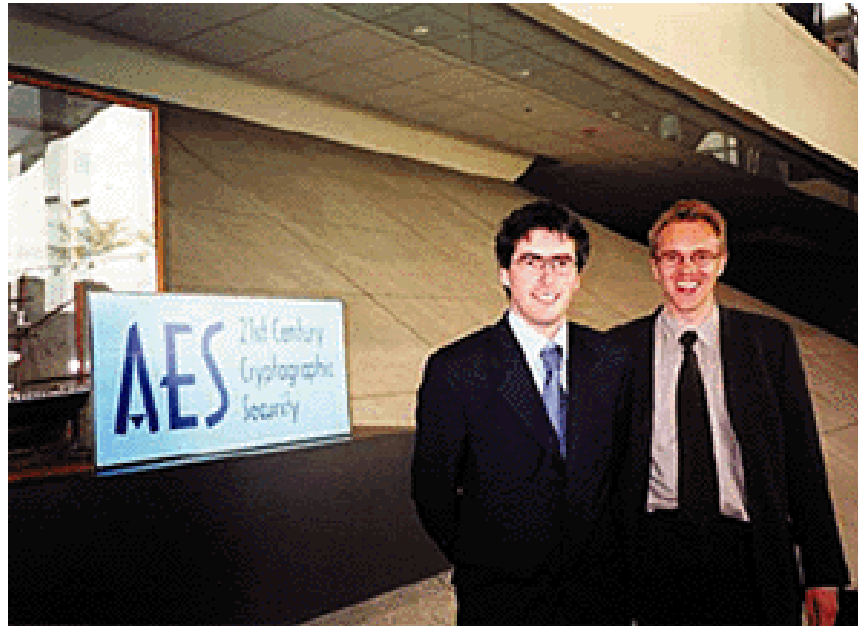
Persyaratan AES:

1. Termasuk ke dalam kelompok algoritma kriptografi simetri berbasis *cipher* blok.
2. Seluruh rancangan algoritma harus publik (tidak dirahasiakan, tidak ada yang disembunyikan)
3. Panjang kunci fleksibel: 128, 192, dan 256 bit.
4. Ukuran blok yang dienkripsi adalah 128 bit.
5. Algoritma dapat diimplementasikan baik sebagai *software* maupun *hardware*.

Lima finalis lomba AES:

1. *Rijndael* (dari Vincent **Rij**men dan Joan **Da**emen – Belgia, 86 suara)
2. *Serpent* (dari Ross Anderson, Eli Biham, dan Lars Knudsen – Inggris, Israel, dan Norwegia, 59 suara).
3. *Twofish* (dari tim yang diketuai oleh Bruce Schneier – USA, 31 suara)
4. *RC6* (dari Laboratorium *RSA* – USA, 23 suara)
5. *MARS* (dari IBM, 13 suara)

- Pada bulan Oktober 2000, *NIST* mengumumkan untuk memilih Rijndael (dibaca: Rhine-doll)
- Pada bulan November 2001, Rijndael ditetapkan sebagai AES



- Diharapkan Rijndael menjadi standard kriptografi yang dominan paling sedikit selama 10 tahun.



Joan Daemen and Vincent Rijmen, the designers of the Advanced Encryption Standard
(Sumber: <https://medium.com/@stkgroupp/what-is-the-advanced-encryption-standard-and-how-does-it-work-abd1ec582df8>)

Spesifikasi Algoritma Rijndael

- Rijndael mendukung panjang kunci 128 bit sampai 256 bit dengan step 32 bit (yaitu 128 bit, 160, 192, ..., 256 bit).
- Panjang kunci dan ukuran blok dapat dipilih secara independent (tidak harus sama. Misal: panjang blok 128 bit, kunci 256 bit).
- Setiap blok dienkripsi dalam sejumlah putaran tertentu, sebagaimana halnya pada *DES*.
- Karena *AES* menetapkan panjang kunci adalah 128, 192, dan 256, maka dikenal *AES-128*, *AES-192*, dan *AES-256*.

	Panjang Kunci (Nk words)	Ukuran Blok (Nb words)	Jumlah Putaran (Nr)
<i>AES-128</i>	4	4	10
<i>AES-192</i>	6	4	12
<i>AES-256</i>	8	4	14

Catatan: 1 *word* = 32 bit

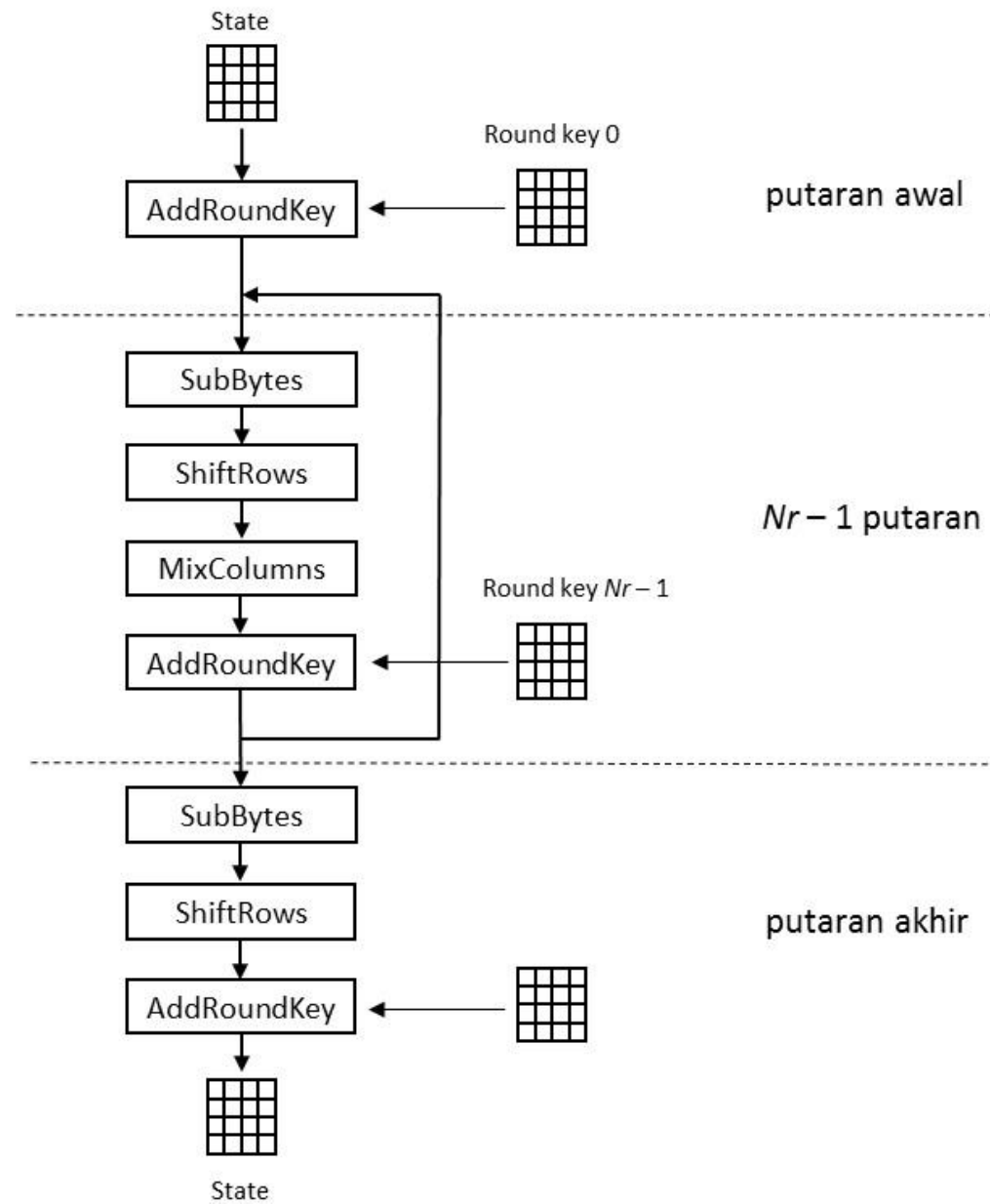
- Secara de-fakto, hanya ada dua varian *AES*, yaitu *AES-128* dan *AES-256*, karena akan sangat jarang pengguna menggunakan kunci yang panjangnya 192 bit.

- Dengan panjang kunci 128-bit, maka terdapat sebanyak $2^{128} = 3,4 \times 10^{38}$ kemungkinan kunci.
- Jika komputer tercepat dapat mencoba 1 juta kunci setiap detik, maka akan dibutuhkan waktu $5,4 \times 10^{24}$ tahun untuk mencoba seluruh kunci.
- Jika komputer tercepat yang dapat mencoba 1 juta kunci setiap milidetik, maka dibutuhkan waktu $5,4 \times 10^{18}$ tahun untuk mencoba seluruh kunci.
- Artinya, AES diharapkan tahan terhadap serangan *exhaustive key search attack (brute force attack)*

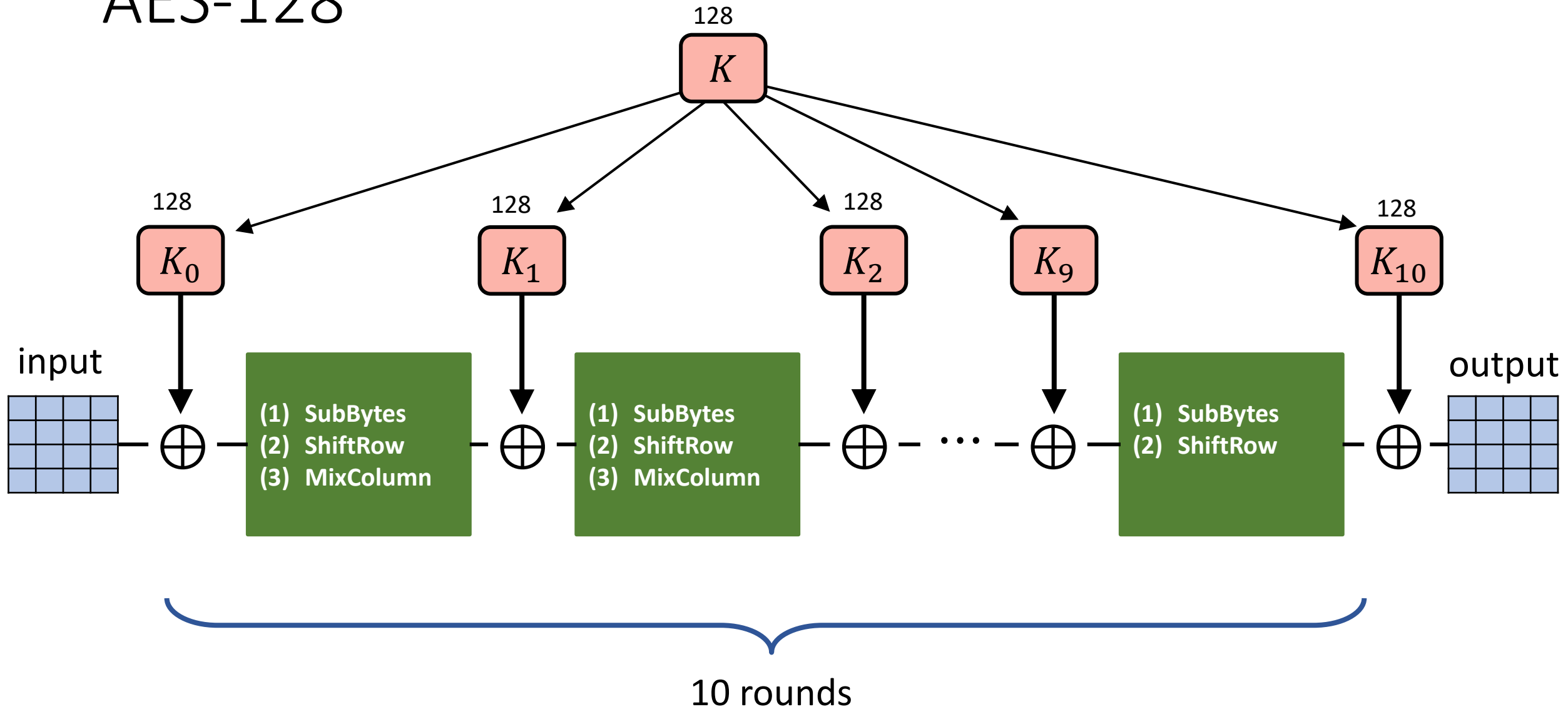
Algoritma *Rijndael*

- Yang dijelaskan di sini Rijndael 128-bit (panjang kunci 128 bit)
- Tidak seperti *DES* yang berorientasi bit, *Rijndael* beroperasi dalam orientasi *byte*.
- *Rijndael* tidak menggunakan jaringan Feistel seperti cipher blok lainnya.
- *Enciphering* dilakukan dalam sejumlah putaran (iterate cipher). Setiap putaran menggunakan kunci internal yang berbeda (disebut *round key*).
- *Enciphering* melibatkan operasi substitusi dan permutasi.

- Garis besar Algoritma *Rijndael* yang beroperasi pada blok 128-bit dengan kunci 128-bit adalah sebagai berikut (di luar proses pembangkitan *round key*):
 1. *AddRoundKey*: melakukan *XOR* antara *state* awal (plainteks) dengan *cipher key*. Tahap ini disebut juga *initial round*.
 2. Putaran sebanyak $Nr - 1$ kali. Proses yang dilakukan pada setiap putaran adalah:
 - a. *SubBytes*: substitusi *byte* dengan menggunakan tabel substitusi (*S-box*).
 - b. *ShiftRows*: pergeseran baris-baris *array state* secara *wrapping*.
 - c. *MixColumns*: mengacak data di masing-masing kolom *array state*.
 - d. *AddRoundKey*: melakukan *XOR* antara *state* sekarang *round key*.
 3. *Final round*: proses untuk putaran terakhir:
 - a. *SubBytes*
 - b. *ShiftRows*
 - c. *AddRoundKey*



AES-128



```

#define LENGTH 16          /* Jumlah byte di dalam blok atau kunci */
#define NROWS 4            /* Jumlah baris di dalam state */
#define NCOLS 4            /* Jumlah kolom di dalam state */
#define ROUNDS 10         /* Jumlah putaran */
typedef unsigned char byte; /* unsigned 8-bit integer */

rijndael (byte plaintext[LENGTH], byte ciphertext[LENGTH],
          byte key[LENGTH])
{
    int r;                  /* pencacah pengulangan */
    byte state[NROWS][NCOLS]; /* state sekarang */
    struct{byte k[NROWS][NCOLS];} rk[ROUNDS + 1]; /* kunci pada setiap putaran */

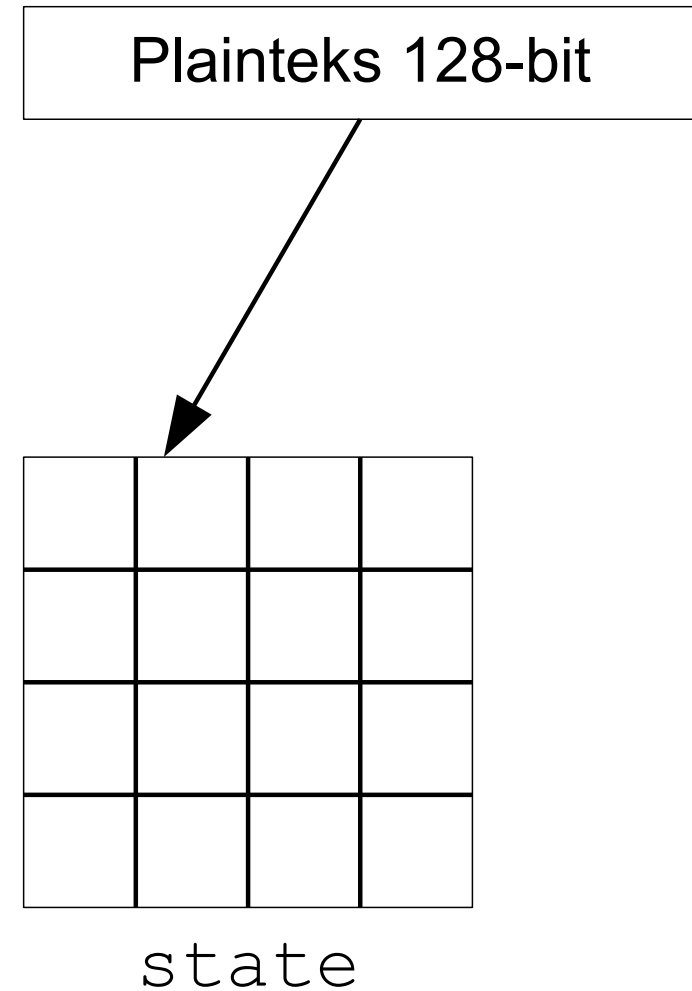
    KeyExpansion(key, rk);   /* bangkitkan kunci setiap putaran */
    CopyPlaintextToState(state, plaintext); /* inisialisasi
                                              state sekarang */
    AddRoundKey(state, rk[0]); /* XOR key ke dalam state */

    for (r = 1; r<= ROUNDS - 1; r++)
    {
        SubBytes(state);    /* substitusi setiap byte dengan S-box */
        ShiftRows(state);   /* rotasikan baris i sejauh i byte */
        MixColumns(state);  /* acak masing-masing kolom */
        AddRoundKey(state, rk[r]); /* XOR key ke dalam state */
    }
    SubBytes(state);        /* substitusi setiap byte dengan S-box */
    ShiftRows(state);       /* rotasikan baris i sejauh i byte */
    AddRoundKey(state, rk[ROUNDS]); /* XOR key ke dalam state */

    CopyStateToCiphertext(ciphertext, state); /* blok cipherteks yang dihasilkan */
}

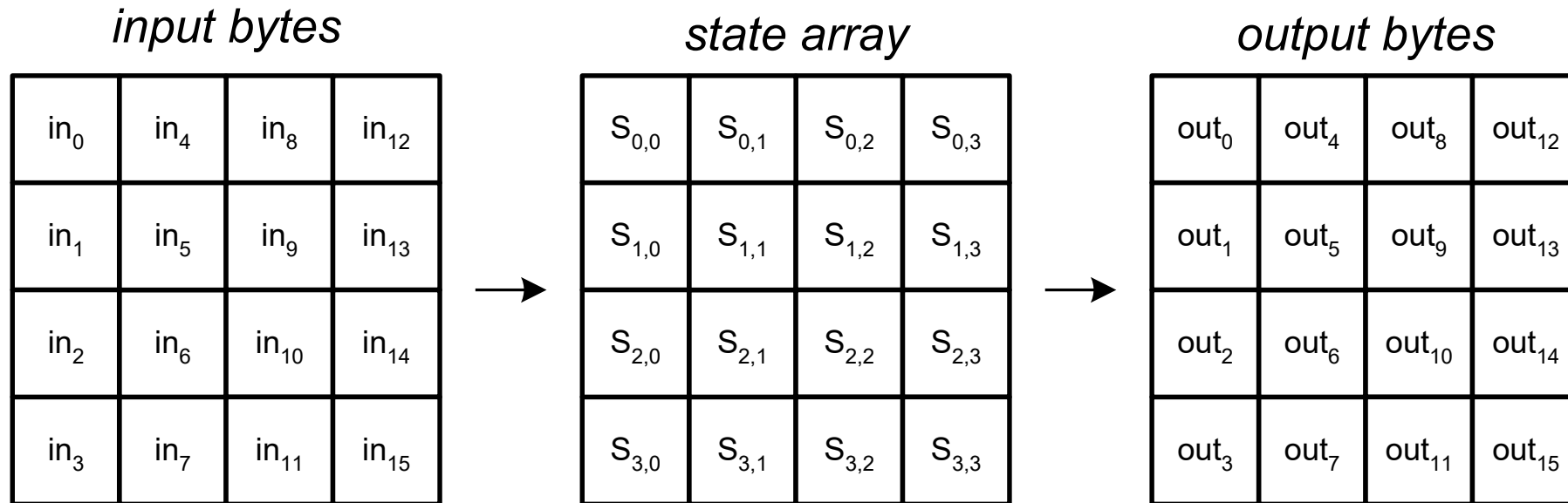
```

- Selama kalkulasi plainteks menjadi cipherteks, status data sekarang disimpan di dalam matriks dua dimensi, `state`.
- `state` bertipe *byte* dan berukuran $Nrows \times Ncols$
- Untuk blok data 128-bit, ukuran `state` adalah 4×4 , seperti gambar di samping.



- Pada awal enkripsi, 16-byte data masukan, $in_0, in_1, \dots, in_{15}$ disalin ke dalam *array* state, direalisasikan oleh fungsi:

`CopyPlaintextToState(state, plaintext)`



- Pada akhir enkripsi, state disalin ke dalam *ciphertext*, direalisasikan oleh fungsi:

`CopyStateToCiphertext(ciphertext, state)`

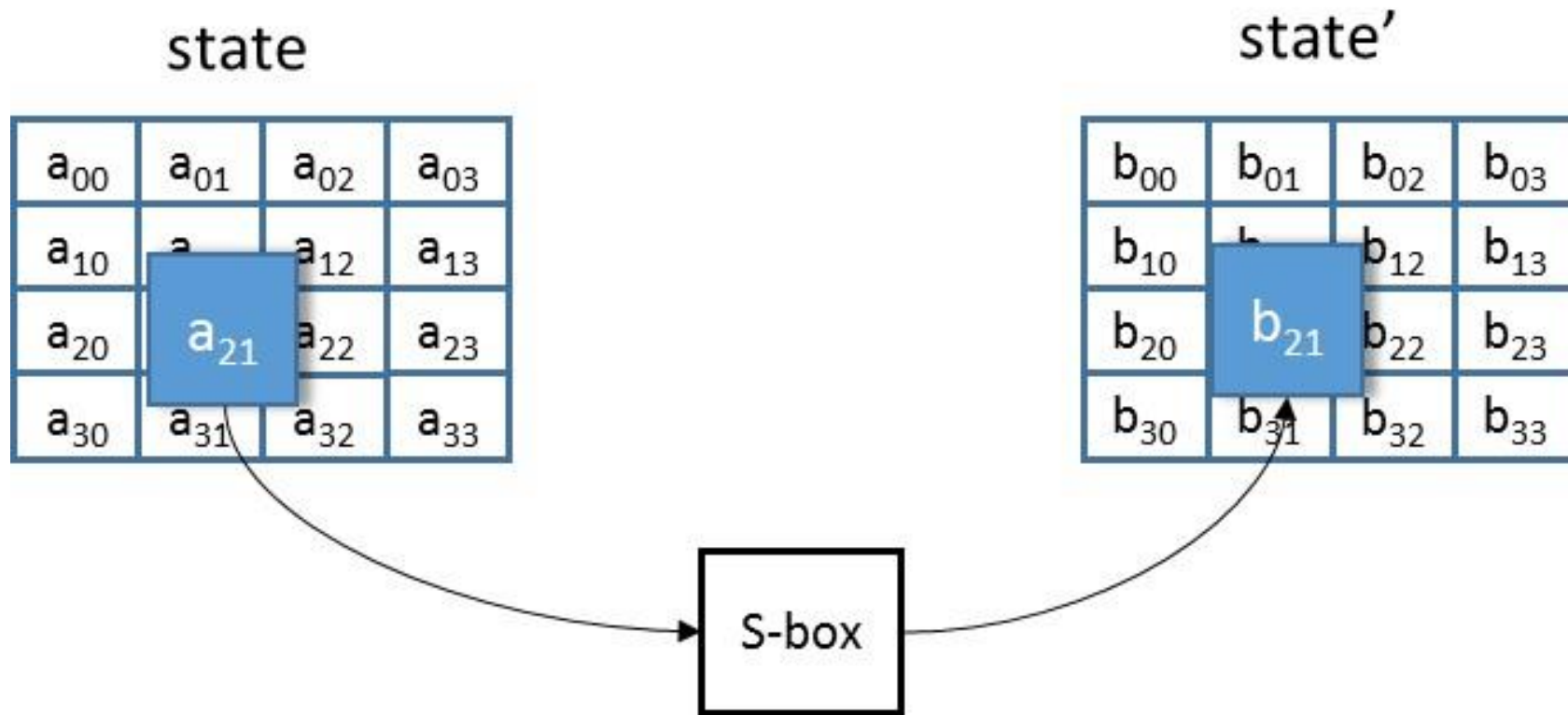
Contoh elemen state dalam notasi HEX:

23	A2	BC	4A
D4	03	97	F3
16	48	CD	50
FF	DA	10	64

Transformasi *SubBytes()*

- *SubBytes()* melakukan operasi substitusi dengan memetakan setiap byte dari *array state* dengan menggunakan *S-box*.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F0	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C0
2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A0	52	3B	D6	B3	29	E3	2F	84
5	53	D1	00	ED	20	FC	B1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
6	D0	EF	AA	FB	43	4D	33	85	45	F9	02	7F	50	3C	9F	A8
7	51	A3	40	8F	92	9D	38	F5	BC	B6	DA	21	10	FF	F3	D2
8	CD	0C	13	EC	5F	97	44	17	C4	A7	7E	3D	64	5D	19	73
9	60	81	4F	DC	22	2A	90	88	46	EE	B8	14	DE	5E	0B	DB
A	E0	32	3A	0A	49	06	24	5C	C2	D3	AC	62	91	95	E4	79
B	E7	C8	37	6D	8D	D5	4E	A9	6C	56	F4	EA	65	7A	AE	08
C	BA	78	25	2E	1C	A6	B4	C6	E8	DD	74	1F	4B	BD	8B	8A
D	70	3E	B5	66	48	03	F6	0E	61	35	57	B9	86	C1	1D	9E
E	E1	F8	98	11	69	D9	8E	94	9B	1E	87	E9	CE	55	28	DF
F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16



Transformasi *SubBytes*

Contoh:

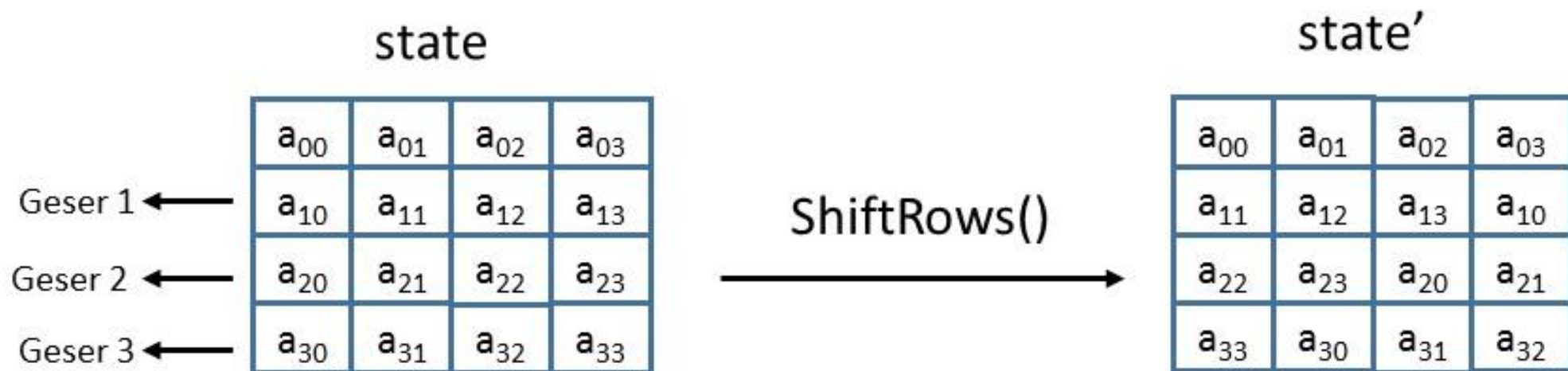
state					state'			
23	A2	BC	4A	→	26	3A	65	D6
D4	03	97	F3		48	7B	88	0D
16	48	CD	50		47	52	BD	53
FF	DA	10	64		16	57	CA	43

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F0	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C0
2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A0	52	3B	D6	B3	29	E3	2F	84
5	53	D1	00	ED	20	FC	B1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
6	D0	EF	AA	FB	43	4D	33	85	45	F9	02	7F	50	3C	9F	A8
7	51	A3	40	8F	92	9D	38	F5	BC	B6	DA	21	10	FF	F3	D2
8	CD	0C	13	EC	5F	97	44	17	C4	A7	7E	3D	64	5D	19	73
9	60	81	4F	DC	22	2A	90	88	46	EE	B8	14	DE	5E	0B	DB
A	E0	32	3A	0A	49	06	24	5C	C2	D3	AC	62	91	95	E4	79
B	E7	C8	37	6D	8D	D5	4E	A9	6C	56	F4	EA	65	7A	AE	08
C	BA	78	25	2E	1C	A6	B4	C6	E8	DD	74	1F	4B	BD	8B	8A
D	70	3E	B5	66	48	03	F6	0E	61	35	57	B9	86	C1	1D	9E
E	E1	F8	98	11	69	D9	8E	94	9B	1E	87	E9	CE	55	28	DF
F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16

Proses substitusi 23 menjadi 26

Transformasi *ShiftRows()*

- Transformasi *ShiftRows()* melakukan operasi permutasi dengan pergeseran secara *wrapping* (siklik) pada 3 baris terakhir *array state*.
- Jumlah pergeseran bergantung pada nilai baris (r). Baris $r = 1$ digeser sejauh 1 *byte*, baris $r = 2$ sejauh 2 *byte*, dan baris $r = 3$ sejauh 3 *byte*. Baris $r = 0$ tidak digeser.



26	3A	65	D6
48	7B	88	0D
47	52	BD	53
16	57	CA	43

ShiftRows()



26	3A	65	D6
7B	88	0D	48
BD	53	47	52
43	16	57	CA

Transformasi *MixColumns()*

- Transformasi *MixColumns()* mengalikan matriks *state* dengan sebuah matriks tertentu sbb:

$$\begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_{0,0} & s'_{0,1} & s'_{0,2} & s'_{0,3} \\ s'_{1,0} & s'_{1,1} & s'_{1,2} & s'_{1,3} \\ s'_{2,0} & s'_{2,1} & s'_{2,2} & s'_{2,3} \\ s'_{3,0} & s'_{3,1} & s'_{3,2} & s'_{3,3} \end{bmatrix}$$

state

	a_{01}		
a_{00}	a_{11}	a_{02}	a_{03}
a_{10}	a_{21}	a_{12}	a_{13}
a_{20}	a_{31}	a_{22}	a_{23}
a_{30}		a_{32}	a_{33}

state'

	b_{01}		
b_{00}	b_{11}	b_{02}	b_{03}
b_{10}	b_{21}	b_{12}	b_{13}
b_{20}	b_{31}	b_{22}	b_{23}
b_{30}		b_{32}	b_{33}

$$\begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$s'(x) = a(x) \otimes s(x)$$

$$\begin{bmatrix} s'_{0,c} \\ s'_{1,c} \\ s'_{2,c} \\ s'_{3,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0,c} \\ s_{1,c} \\ s_{2,c} \\ s_{3,c} \end{bmatrix}$$

$$s'_{0,c} = (\{02\} \bullet s_{0,c}) \oplus (\{03\} \bullet s_{1,c}) \oplus s_{2,c} \oplus s_{3,c}$$

$$s'_{1,c} = s_{0,c} \oplus (\{02\} \bullet s_{1,c}) \oplus (\{03\} \bullet s_{2,c}) \oplus s_{3,c}$$

$$s'_{2,c} = s_{0,c} \oplus s_{1,c} \oplus (\{02\} \bullet s_{1,c}) \oplus (\{03\} \bullet s_{3,c})$$

$$s'_{3,c} = (\{03\} \bullet s_{0,c}) \oplus s_{0,c} \oplus s_{1,c} \oplus (\{02\} \bullet s_{3,c})$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 7B \\ BD \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F \\ 4F \\ F9 \\ 2A \end{bmatrix}$$

$$(02 \bullet 26) \oplus (03 \bullet 7B) \oplus (01 \bullet BD) \oplus (01 \bullet 43) = 3F$$

$$(01 \bullet 26) \oplus (02 \bullet 7B) \oplus (03 \bullet BD) \oplus (01 \bullet 43) = 4F$$

$$(01 \bullet 26) \oplus (01 \bullet 7B) \oplus (02 \bullet BD) \oplus (03 \bullet 43) = F9$$

$$(03 \bullet 26) \oplus (01 \bullet 7B) \oplus (01 \bullet BD) \oplus (02 \bullet 43) = 2A$$

Semua perkalian dan penjumlahan dilakukan dalam $GF(2^8)$

Penjelasan tentang $GF(2^m)$ dapat dilihat pada lampiran

$$(02 \bullet 26) \oplus (03 \bullet 7B) \oplus (01 \bullet BD) \oplus (01 \bullet 43) = 3F$$

$$\begin{aligned}(02 \bullet 26) &= (0000\ 0010) \times (0010\ 0110) \\ &= x \times (x^5 + x^2 + x) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= (x^6 + x^3 + x^2) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= x^6 + x^3 + x^2 \\ &= (01001100) \\ &= 4C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(03 \bullet 7B) &= (0000\ 0011) \times (0111\ 1011) \\ &= (x + 1) \times (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= ((x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x) + (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= (x^7 + (1 + 1)x^6 + (1 + 1)x^5 + (1 + 1)x^4 + x^3 + x^2 + (1 + 1)x + 1) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= (x^7 + x^3 + x^2 + 1) \bmod (x^8 + x^4 + x^3 + x + 1) \\ &= (x^7 + x^3 + x^2 + 1) \\ &= (1000\ 1101) = 8D\end{aligned}$$

$$(01 \bullet BD) = BD = 10111101$$

$$(01 \bullet 43) = 43 = 01000011$$

$$(02 \bullet 26) \oplus (03 \bullet 7B) \oplus (01 \bullet BD) \oplus (01 \bullet 43) = 3F$$

Selanjutnya, XOR-kan semua hasil antara tersebut:

$$(02 \bullet 26) = 4C = 0100 \ 1100$$

$$(03 \bullet 7B) = 8D = 1000 \ 1101$$

$$(01 \bullet BD) = BD = 1011 \ 1101$$

$$(01 \bullet 43) = 43 = \underline{0100 \ 0011} \oplus \\ 0011 \ 1111 = 3F$$

$$\text{Jadi, } (02 \bullet 26) \oplus (03 \bullet 7B) \oplus (01 \bullet BD) \oplus (01 \bullet 43) = 3F$$

Persamaan lainnya diselesaikan dengan cara yang sama.

Transformasi *AddRoundKey()*

- Transformasi ini melakukan operasi XOR antara *round key* dan *state*, dan hasilnya disimpan di *state*.

$$\begin{array}{c} \text{state} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \text{round key} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ \hline k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{10} \\ \hline k_{22} & k_{23} & k_{20} & k_{21} \\ \hline k_{33} & k_{30} & k_{31} & k_{32} \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \text{state}' \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ \hline b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Contoh:

3F	B2	CD	F7
4F	D2	E1	9E
F9	2E	1F	7F
2A	B9	4B	F4



4F	5A	7B	10
8C	CD	D1	23
67	2A	FF	45
28	0D	93	2C



70	E8	B6	E7
C3	1F	30	BD
9E	04	E0	3A
02	B4	D8	D8

S-box

Elemen-elemen di dalam *S-box* terlihat seperti diisi secara acak, namun sebenarnya ia dihasilkan dari proses perhitungan sebagai berikut:

1. Inisialisasi *S-box* dengan nilai yang menaik dari baris ke baris. Baris ke-0 diisi dengan nilai 00, 01, 02, ..., 0F. Baris ke-1 diisi dengan nilai 10, 11, 12, ..., 1F, dan seterusnya untuk baris-baris lain.
2. Untuk setiap nilai pada baris y kolom x , tentukan balikkannya dalam $GF(2^8)$. Nilai 00 dipetakan ke dirinya sendiri. Penjelasan tentang $GF(2^8)$ lihat pada lampiran.
3. Hasil dari langkah 2 dikonversi ke vektor kolom bit $(b_0, b_1, \dots, b_8)^T$.

4. Kalikan vektor kolom bit $(b_0, b_1, \dots, b_8)^T$ dengan sebuah matriks *affine* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \\ b'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Selanjutnya, konversi hasil perhitungan $(b'_0, b'_1, \dots, b'_8)^T$ ke dalam heksadesimal, menjadi elemen $S\text{-box}(x, y)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F0	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C0
2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A0	52	3B	D6	B3	29	E3	2F	84
5	53	D1	00	ED	20	FC	B1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
6	D0	EF	AA	FB	43	4D	33	85	45	F9	02	7F	50	3C	9F	A8
7	51	A3	40	8F	92	9D	38	F5	BC	B6	DA	21	10	FF	F3	D2
8	CD	0C	13	EC	5F	97	44	17	C4	A7	7E	3D	64	5D	19	73
9	60	81	4F	DC	22	2A	90	88	46	EE	B8	14	DE	5E	0B	DB
A	E0	32	3A	0A	49	06	24	5C	C2	D3	AC	62	91	95	E4	79
B	E7	C8	37	6D	8D	D5	4E	A9	6C	56	F4	EA	65	7A	AE	08
C	BA	78	25	2E	1C	A6	B4	C6	E8	DD	74	1F	4B	BD	8B	8A
D	70	3E	B5	66	48	03	F6	0E	61	35	57	B9	86	C1	1D	9E
E	E1	F8	98	11	69	D9	8E	94	9B	1E	87	E9	CE	55	28	DF
F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16

S-box di dalam Rijndael

Pembentukan Kunci Putaran

- Setiap putaran di dalam algoritma *Rijndael* menggunakan kunci putaran atau *round key*. Kunci putaran dibangkitkan dari kunci eksternal dari pengguna yang dinamakan *cipher key* dan disimbolkan dengan *peubah key*. Pembangkitan semua kunci putaran dilakukan oleh fungsi *KeyExpansion()*.
- Pembangkitan kunci putaran di dalam Algoritma Rijndael tergolong rumit dan agak sukar diterangkan. Tinjau sebuah larik *key* yang panjangnya 16 *byte* (16 elemen) dan $Nr = 10$ putaran. Sepuluh kunci putaran akan disimpan di dalam larik *rk*. Elemen awal *key* langsung menjadi *rk[0]*. Elemen-elemen kunci lainnya akan disimpan di dalam *rk[1]*, *rk[2]*, ..., *rk[10]*.

ExpansionKey()

Algoritma:

1. Salin elemen-elemen *key* ke dalam larik $w[0]$, $w[1]$, $w[2]$, $w[3]$. Larik $w[0]$ berisi empat elemen pertama *key*, $w[1]$ berisi empat elemen berikutnya, dan seterusnya.
2. Mulai dari $i = 4$ sampai 43, lakukan:
 - a) Simpan $w[i-1]$ ke dalam peubah *temp*
 - b) Jika i kelipatan 4, lakukan fungsi *g* berikut:
 - Geser $w[i-1]$ satu *byte* ke kiri secara sirkuler
 - Lakukan substitusi dengan *S-box* terhadap hasil pergeseran tersebut

- XOR-kan hasilnya dengan *round constant* (*Rcon*) ke $i/4$ (atau $Rcon[i/4]$). Nilai *Rcon* berbeda-beda untuk setiap $j = i/4$, yaitu $Rcon[j] = (RC[j], 0, 0, 0)$, dengan $RC[1]=1$, $RC[j] = 2 \bullet RC[j-1]$, simbol $\bullet$ menyatakan perkalian yang didefinisikan di dalam $GF(2^8)$. Nilai $RC[j]$ di dalam heksadesimal adalah [STA11]: $RC[1]=01$, $RC[2]=02$, $RC[3]=04$, $RC[4]=08$, $RC[5]=10$, $RC[6]=20$, $RC[7]=40$, $RC[8]=80$, $RC[9]=1B$, $RC[10]=36$.
- Simpan hasil fungsi g ke dalam peubah *temp*

c) XOR-kan $w[i-4]$ dengan *temp*

Sebagai contoh, misalkan *key* dalam heksadesimal adalah

$$key = (54, 77, 6F, 20, 4F, 6E, 65, 20, 4E, 69, 6E, 65, 20, 54, 77, 6F)$$

Dari *key* langsung diperoleh *rk*[0] sebagai berikut:

54	4F	4E	20
77	6E	69	54
6F	65	6E	77
20	20	65	6F

Proses di bawah ini hanya menunjukkan pembangkitan $rk[1]$:

1. $w[0] = (54, 77, 6F, 20)$; $w[1] = (4F, 6E, 65, 20)$; $w[2] = (4E, 69, 6E, 65)$;
 $w[3] = (20, 54, 77, 6F)$
2. Mulai dari $i = 4$:
 - a) $temp = w[3]$
 - b) $i = 4$ adalah kelipatan 4, maka jalankan fungsi g terhadap $w[3]$:
 - Geser $w[3]$ satu *byte* ke kiri secara sirkuler: $w[3] = (54, 77, 6E, 20)$
 - Substitusi hasil pergeseran tersebut dengan *S-box*: $(20, F5, 9F, B7)$
 - XOR-kan hasil di atas dengan $Rcon[1] = (01, 00, 00, 00)$, menghasilkan $(21, F5, 9F, B7)$Jadi, $g(w[3]) = (21, F5, 9F, B7)$
 - c) $w[4] = w[0] \oplus g(w[3]) = w[0] \oplus g(w[3]) = (75, 82, F0, 97)$

Untuk $i = 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned}w[5] &= w[4] \oplus w[1] = (3A, EC, 96, B7), \\w[6] &= w[5] \oplus w[2] = (74, 85, F8, D2), \\w[7] &= w[6] \oplus w[3] = (54, D1, 8F, BD)\end{aligned}$$

Dari proses di atas diperoleh $rk[1]$ sebagai berikut:

75	3A	74	54
82	EC	85	D1
F0	96	F8	8F
97	B7	D2	BD

Dekripsi

```
#define LENGTH 16      /* Jumlah byte di dalam blok atau kunci */
#define Nrows 4        /* Jumlah baris di dalam state */
#define Ncols 4        /* Jumlah kolom di dalam state */
#define Nr 10          /* Jumlah putaran */
typedef unsigned char byte; /* unsigned 8-bit integer */

decrypt_rijndael (byte in[LENGTH], byte out[LENGTH], byte key[LENGTH])
{
    int round;          /* pencacah pengulangan */
    byte state[Nrows][Ncols];
    struct{byte k[Nrows][Ncols];} rk[Nr + 1]; /* kunci setiap putaran */

    KeyExpansion(key, rk); /* bangkitkan kunci setiap putaran */
    CopyInToState(state, in);

    AddRoundKey(state, rk[Nr]);

    for (round = Nr - 1; round >= 1; round--)
    {
        InvShiftRows(state);
        InvSubBytes(state);
        AddRoundKey(state, rk[round]);
        InvMixColumns(state);
    }

    /* putaran terakhir */
    InvShiftRows(state);
    InvSubBytes(state);
    AddRoundKey(state, rk[0]);

    CopyStateToOut(out, state); /* cipherteks */
}
```

InvSubBytes()

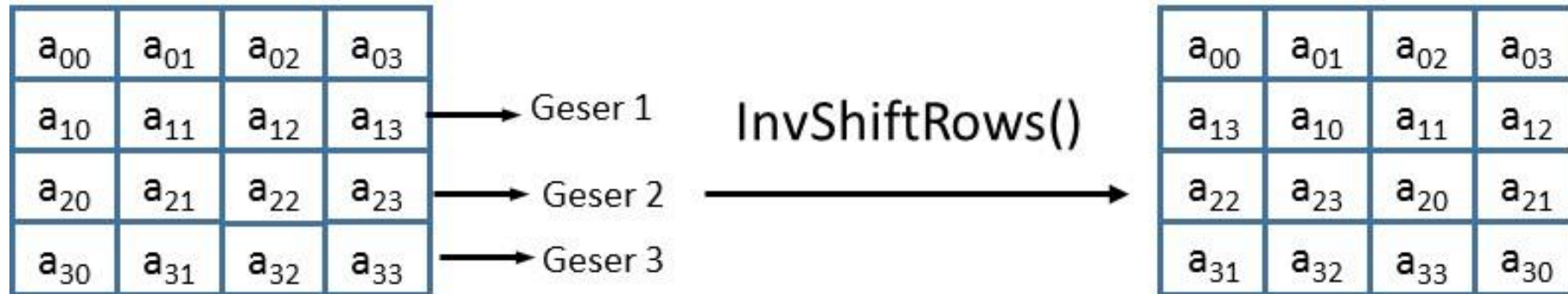
- *InvSubBytes()* sama seperti di dalam *SubBytes()*, hanya saja *S-box* yang digunakan adalah inversi dari *S-box*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	52	09	6A	D5	30	36	A5	38	BF	40	A3	9E	81	F3	D7	FB
1	7C	E3	39	82	9B	2F	FF	87	34	8E	43	44	C4	DE	E9	CB
2	54	7B	94	32	A6	C2	23	3D	EE	4C	95	0B	42	FA	C3	4E
3	08	2E	A1	66	28	D9	24	B2	76	5B	A2	49	6D	8B	D1	25
4	72	F8	F6	64	86	68	98	16	D4	A4	5C	CC	5D	65	B6	92
5	6C	70	48	50	FD	ED	B9	DA	5E	15	46	57	A7	8D	9D	84
6	90	D8	AB	00	8C	BC	D3	0A	F7	E4	58	05	B8	B3	45	06
7	D0	2C	1E	8F	CA	3F	0F	02	C1	AF	BD	03	01	13	8A	6B
8	3A	91	11	41	4F	67	DC	EA	97	F2	CF	CE	F0	B4	E6	73
9	96	AC	74	22	E7	AD	35	85	E2	F9	37	E8	1C	75	DF	6E
A	47	F1	1A	71	1D	29	C5	89	6F	B7	62	0E	AA	18	BE	1B
B	FC	56	3E	4B	C6	D2	79	20	9A	DB	C0	FE	78	CD	5A	F4
C	1F	DD	A8	33	88	07	C7	31	B1	12	10	59	27	80	EC	5F
D	60	51	7F	A9	19	B5	4A	0D	2D	E5	7A	9F	93	C9	9C	EF
E	A0	E0	3B	4D	AE	2A	F5	B0	C8	EB	B	3C	83	53	99	61
F	17	2B	04	7E	BA	77	D6	26	E1	69	14	63	55	21	0C	7D

Gambar 6.27 Inversi *S-box* di dalam Rijndael

InvShiftRows()

- *InvShiftRows* sama seperti *ShiftRows* namun melakukan pergeseran dalam arah berlawanan (ke kanan) untuk tiap-tiap baris pada tiga baris terakhir di dalam *state*



InvMixColumns()

$$\begin{bmatrix} 0E & 0B & 0D & 09 \\ 09 & 0E & 0B & 0D \\ 0D & 09 & 0E & 0B \\ 0B & 0D & 09 & 0E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_{0,0} & s'_{0,1} & s'_{0,2} & s'_{0,3} \\ s'_{1,0} & s'_{1,1} & s'_{1,2} & s'_{1,3} \\ s'_{2,0} & s'_{2,1} & s'_{2,2} & s'_{2,3} \\ s'_{3,0} & s'_{3,1} & s'_{3,2} & s'_{3,3} \end{bmatrix}$$

URL yang terkait dengan AES:

1. AES Homepage, <http://www.nist.gov/CryptoToolkit>
2. J. Daemen, V. Rijmen, AES Proposal: Rijndael,
<http://www.esat.kuleuven.ac.be/~rizmen/>

Demo online AES

<https://encode-decode.com/aes128-encrypt-online/>



REPUBLICA.CO.ID, PROBOLINGGO -- Badan Penanggulangan Bencana Daerah (BPBD) Probolinggo, Jawa Timur, mencatat bencana alam banjir dan tanah longsor melanda sejumlah desa di kabupaten tersebut dalam dua hari terakhir.



"Selama dua hari terakhir wilayah Kabupaten Probolinggo diguyur hujan dengan intensitas sedang hingga deras cukup lama, sehingga terjadi banjir dan tanah longsor," kata Kepala Bidang Kedaruratan dan Logistik BPBD Probolinggo Moh Zubaidulloh di Probolinggo, Ahad (12/2/2023).



penasehat







aes128 encrypt & decrypt online

supported encryptions:

aes128

Oo7mkFGF96sQQxRWoL9bpOsQtZfLjPHsa8KV3ankCLhI7vRMvUzHLUmnujEKmEBh6PV
DOJ/vYphUDQ1Vlh4M9ekqe82OY1wjHoj56mMxqUBsuOwxIEK9yqk1chhFfSgOb1Nal111ipYV
vkRM4dozCuh
/OCAXFma6OEtu4W7v7sZJp4MSyFsDWTRExeQN9d7A+7mFMry62ayfMqu4mklQCDj9zL
//KjtXAbtOCB9SdX9PmH9ae5Nj1OJc/xmlSNXeKPr6wOMDQp
/6W+6ar5fahod4YQn0t9AdrpAxpNct0bC8a5RXHOH+182LpgzuSLCXtofpla35XMYyuzjUepZvl
mDCc/Zix6Tomk9imKJiZGivKvAQDAy0qpg5JzjQw9H+jXSj3eZ20dz5mMRsS04Z9+D
/iW9NS1AVGZ+4zBAoq4cpUqZFWvLZzBf4AX30e4403U+NZ+eYjo/ofZm5k0g8aurZCpb
/HH6LyYc

Encrypt string →

← Decrypt string

Give our aes128 encrypt/decrypt tool a try!

Type here to search



21°C 8:42 PM 2/12/2023

Program enkripsi-dekripsi AES dengan Python

Input: Teks dari keyboard

```
from Crypto.Cipher import AES
from Crypto.Random import get_random_bytes
from Crypto.Util.Padding import pad, unpad
import base64

# Panjang blok AES
BLOCK_SIZE = 16

def enkripsi_aes(plaintexts, kunci):
    kunci = kunci.encode()
    iv = get_random_bytes(BLOCK_SIZE)
    AEScipher = AES.new(kunci, AES.MODE_CBC, iv)

    plaintexts = pad(plaintexts.encode(), BLOCK_SIZE)

    ciphertexts = AEScipher.encrypt(plaintexts)
    ciphertexts = base64.b64encode(iv+ciphertexts)
    return ciphertexts

# Kodekan kunci dari string menjadi byte
# Bangkitkan IV
# Defenisikan AES mode CBC

# Lakukan padding pada plaintexts

# Lakukan enkripsi plaintexts
# Kodekan iv+ciphertexts dari byte ke kode base64
```

```

def dekripsi_aes(cipherteks, kunci):
    kunci = kunci.encode()          # Kodekan kunci dari string menjadi byte
    cipherteks = base64.b64decode(cipherteks) # Dekodekan kembali cipherteks dari base64 ke byte
    iv = cipherteks[:16]            # Ambil iv pada bagian awal cipherteks (16 byte)
    AEScipher = AES.new(kunci, AES.MODE_CBC, iv) # Defenisikan AES mode CBC
    plainteks = AEScipher.decrypt(cipherteks[BLOCK_SIZE:]) # Lakukan dekripsi cipherteks
    plainteks = unpad(plainteks, BLOCK_SIZE) # Buang padding
    return plainteks

# Program utama (pemanggilan fungsi enkripsi dan dekripsi AES)
# Enkripsi pesan
print("E N K R I P S I:")
pesan = input("Ketikkan pesan yang akan dienkripsi:")
kunci = input("Ketikkan kunci (harus sepanjang 16 karakter):")
cipherteks = enkripsi_aes(pesan, kunci)
print("Cipherteks hasil enkripsi: ", cipherteks)

# Dekripsi pesan
print("D E K R I P S I:")
kunci = input("Ketikkan kunci (harus sepanjang 16 karakter):")
plainteks = dekripsi_aes(cipherteks, kunci)
#plainteks = unpad(plainteks, BLOCK_SIZE)
print("Plainteks hasil dekripsi: ", plainteks[16:])

```

Running program

E N K R I P S I:

Ketikkan pesan yang akan dienkripsi: Besok tunggu saya di Stasiun Bandung pukul 17.30

Ketikkan kunci (harus sepanjang 16 karakter): abcdefghij123456

Cipherteks hasil enkripsi:

b'WKOTLYcGVHb8sD0q15LCrQPikUjSDjWupum05suL5cJvglZ6+XKoBNLcTvbLlm+DBSDE+yID/i5H16VSW1Km8P
OeoqOSzi2EOGsDM2Ld7RY='

D E K R I P S I:

Ketikkan kunci (harus sepanjang 16 karakter): abcdefghij123456

Plainteks hasil dekripsi: b'Besok tunggu saya di Stasiun Bandung pukul 17.30'

Program enkripsi-dekripsi AES dengan Python

Input: File biner

```
# Enkripsi file biner dengan AES-128
from Crypto.Cipher import AES
from Crypto.Random import get_random_bytes
from Crypto.Util.Padding import pad, unpad
import base64

BLOCK_SIZE = 16          # Panjang blok pesan yang dienkripsi = 16 byte = 128 bit

def enkripsi_aes(plaintexts, kunci):
    kunci = kunci.encode()          # Kodekan kunci dari string menjadi byte
    iv = get_random_bytes(BLOCK_SIZE) # Bangkitkan IV
    AEScipher = AES.new(kunci, AES.MODE_CBC, iv) # Definisikan AES mode CBC

    plaintexts = pad(plaintexts, BLOCK_SIZE) # lakukan padding jika ukuran plaintexts bukan kelipatan 16 byte

    ciphertexts = AEScipher.encrypt(plaintexts)          # Lakukan enkripsi plaintexts
    ciphertexts = base64.b64encode(iv+ciphertexts)        #Kodekan iv+ciphertexts dari kode byte ke base64
    return ciphertexts
```

```

def dekripsi_aes(cipherteks, kunci):
    kunci = kunci.encode() # Kodekan kunci dari string menjadi byte
    cipherteks = base64.b64decode(cipherteks) # Dekodekan kembali cipherteks dari base64 ke kode byte
    iv = cipherteks[:16] # Ambil iv pada bagian awal cipherteks sepanjang 16 byte
    AEScipher = AES.new(kunci, AES.MODE_CBC, iv) # Defenisikan AES mode CBC
    plainteks = AEScipher.decrypt(cipherteks[BLOCK_SIZE:]) # Lakukan dekripsi cipherteks
    plainteks = unpad(plainteks, BLOCK_SIZE) # Buang padding
    return plainteks

def encrypt_file(input_file, output_file, key):
    with open(input_file, 'rb') as f:
        plaintext = f.read()

    ciphertext = enkripsi_aes(plaintext, key)

    with open(output_file, 'wb') as f:
        f.write(ciphertext)

def decrypt_file(input_file, output_file, key):
    with open(input_file, 'rb') as f:
        ciphertext = f.read()

    plaintext = dekripsi_aes(ciphertext, key)

    with open(output_file, 'wb') as f:
        f.write(plaintext)

```

```
# Program utama (pemanggilan fungsi enkripsi dan dekripsi AES)
file_plaintext = input("Ketikkan nama file input pesan yang akan dienkripsi: (beserta path) ")
file_ciphertext = input("Ketikkan nama file output pesan hasil enkripsi (beserta path): ")
kunci = input("Kunci?: ")
encrypt_file(file_plaintext, file_ciphertext, kunci)
print("Enkripsi selesai. Hasil disimpan di:", file_ciphertext)

file_ciphertext = input("Ketikkan nama file input pesan yang akan didekripsi: (beserta path) ")
file_plaintext = input("Ketikkan nama file output pesan hasil dekripsi (beserta path): ")
kunci = input("Kunci?: ")
decrypt_file(file_ciphertext, file_plaintext, kunci)
print("Dekripsi selesai. Hasil disimpan di:", file_plaintext)
```

Running program

Ketikkan nama file input pesan yang akan dienkripsi: (beserta path) E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026).pdf

Ketikkan nama file output pesan hasil enkripsi (beserta path): E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026).enc

Kunci?: abcdefghij123456

Enkripsi selesai. Hasil disimpan di: E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026).enc

Ketikkan nama file input pesan yang akan didekripsi: (beserta path) E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026).enc

Ketikkan nama file output pesan hasil dekripsi (beserta path): E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026)-hasil.pdf

Kunci?: abcdefghij123456

Dekripsi selesai. Hasil disimpan di: E:\STIN\Kriptografi 2026\01-Pengantar-Kriptografi-(2026)-hasil.pdf

Lampiran

Galois Field $GF(2^m)$

- Disebut juga medan berhingga biner.
- $GF(2^m)$ atau F_2^m adalah ruang vektor berdimensi m pada $GF(2)$. Setiap elemen di dalam $GF(2^m)$ adalah integer dalam representasi biner sepanjang maksimal m bit.

Contoh: $GF(2^4)$, $GF(2^8)$, dst

- String biner $b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0$, $b_i \in \{0,1\}$, dapat dinyatakan sebagai polinom

$$b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1x + b_0$$

- Jadi, setiap $a \in GF(2^m)$ dapat dinyatakan sebagai

$$b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1x + b_0$$

- Contoh: 1101 di dalam $GF(2^4)$ dapat dinyatakan sebagai polinom $x^3 + x^2 + 1$

01010111 di dalam $GF(2^8)$ dapat dinyatakan sebagai polinom $x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$

Operasi aritmetika pada $GF(2^m)$

Misalkan $a = (a_{m-1} \dots a_1 a_0)$ dan $b = (b_{m-1} \dots b_1 b_0) \in GF(2^m)$

- **Penjumlahan:**

$a + b = c = (c_{m-1} \dots c_1 c_0)$ dimana $c_i = (a_i + b_i) \bmod 2$, $c \in GF(2^m)$

- **Perkalian:** $a \cdot b = c = (c_{m-1} \dots c_1 c_0)$ dimana c adalah sisa pembagian polinom $a(x) \cdot b(x)$ dengan *irreducible polynomial* derajat m , $c \in GF(2^m)$

- Algoritma Rijndael (AES) beroperasi di dalam $GF(2^8)$

Contoh 1: Misalkan $a = 00001101 = x^3 + x^2 + 1$ dan $b = 00000110 = x^2 + x$
 a dan $b \in GF(2^8)$ (dalam notasi Hex, $a = '0D'$ dan $b = '06'$)

(i) $a + b = '0D' + '06' = (x^3 + x^2 + 1) + (x^2 + x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \pmod{2}$

Bagi tiap koefisien dengan 2,
lalu ambil sisanya

$$= x^3 + 0x^2 + x + 1$$

$$= x^3 + x + 1 = 00001011 = '0B'$$

Dalam representasi biner:

00001101

00000110 +

00001011 $\rightarrow$ sama dengan hasil operasi XOR

$$\therefore a + b = 00001011 = a \text{ XOR } b$$

Contoh 2: Misalkan $a = 01010111 = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ dan $b = 10000011 = x^7 + x + 1$
 a dan $b \in GF(2^8)$ (dalam notasi Hex, $a = '57'$ dan $b = '83'$)

(i) $a + b = '57' + '83' = (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) + (x^7 + x + 1)$
 $= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 2x + 2 \pmod{2}$ Bagi tiap koefisien dengan 2,
lalu ambil sisanya
 $= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 0x + 0$
 $= x^7 + x^6 + x^4 + x^2 = 11010100 = 'D4'$

Dalam representasi biner:

01010111

10000011 +

11010100 $\rightarrow$ sama dengan hasil operasi XOR

$$\therefore a + b = 11010100 = a \text{ XOR } b$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad a \cdot b &= (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) \cdot (x^7 + x + 1) \\
&= x^{13} + x^7 + x^6 + x^{11} + x^5 + x^4 + x^9 + x^3 + x^2 + x^8 + x^2 + x + x^7 + x + 1 \pmod{2} \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + 2x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \pmod{2} \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + 0x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
&= x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1
\end{aligned}$$

Karena $m = 8$, maka hasil perkalian di atas direduksi menjadi derajat < 8 oleh *irreducible polynomial*. Algoritma Rijndael menggunakan *irreducible polynomial*

$$f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$$

$$x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \pmod{f(x)} = x^7 + x^6 + 1 = 11000001$$

$$\therefore a \cdot b = 11000001 = \text{'C1'}$$

$$\begin{array}{r}
 x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \quad \bigg/ \quad \begin{array}{l} x^5 + x^3 + \\ x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \end{array} \\
 \underline{x^{13} \phantom{+ x^{11}} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5} \quad + \\
 \phantom{x^{13} +} x^{11} + + x^4 + x^3 + 1 \\
 \phantom{x^{13} +} x^{11} + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 \\
 \underline{\phantom{x^{13} +} \phantom{x^{11} +} x^7 + x^6 + 1} \quad + \\
 \phantom{x^{13} +} \phantom{x^{11} +} x^7 + x^6 + 1
 \end{array}$$

Sisa pembagian

Jadi, $x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \pmod{f(x)} = x^7 + x^6 + 1 = 11000001$