Bahan kuliah II4020 Kriptografi

Algoritma Kriptografi Knapsack
(*Merkle-Hellman cryptosystem*)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi

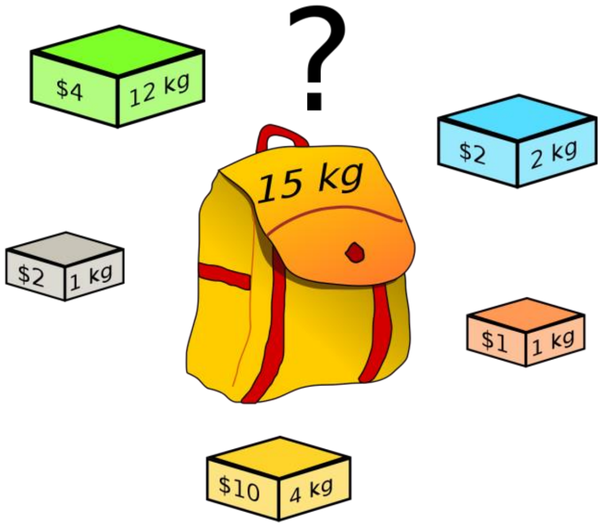
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

ITB

Algoritma Kriptografi *Knapsack*

- Merupakan salah satu algoritma kriptografi kunci-publik awal yang ditemukan oleh Ralph Merkle dan Martin Hellman pada 1978.
- Disebut juga algoritma Merkle-Hellman

Merkle, Hellman, dan Diffie



- Algoritma ini didasarkan pada persoalan *Knapsack Problem:*

  Diberikan bobot *knapsack* adalah *M*. Diketahui *n* buah objek

  yang masing-masing bobotnya adalah w_1, w_2, …, w_n. Tentukan nilai b_i sedemikian sehingga

  $$M = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n \qquad (1)$$

  yang dalam hal ini, b_i bernilai 0 atau 1. Jika b_i = 1, berarti objek *i* dimasukkan ke dalam *knapsack*, sebaliknya jika b_i = 0, objek *i* tidak dimasukkan.

- Dalam teori algoritma, persoalan *knapsack* termasuk ke dalam kelompok *NP-complete*.

- Persoalan yang termasuk *NP-complete* tidak dapat dipecahkan dalam orde waktu polinomial.

- Ide dasar dari algoritma kriptografi *knapsack* adalah mengkodekan pesan sebagai rangkaian solusi dari persoalan *knapsack*.

- Setiap bobot w_i di dalam persoalan *knapsack* merupakan kunci rahasia, sedangkan bit-bit plainteks menyatakan b_i.

Contoh 1: Misalkan n = 6 dan w_1 = 1, w_2 = 5, w_3 = 6, w_4 = 11, w_5 = 14, dan w_6 = 20.

Plainteks: 111001010110000000011000

Plainteks dibagi menjadi blok yang panjangnya 6, kemudian setiap bit di dalam blok dikalikan dengan w_i yang berkoresponden sesuai dengan persamaan (1):

Blok plainteks ke-1 : 111001

Kriptogram : $(1 \times 1) + (1 \times 5) + (1 \times 6) + (0 \times 11) + (0 \text{ x } 14) + (1 \text{ x } 20) = 32$

Blok plainteks ke-2 : 010110

Kriptogram : $(1 \times 5) + (1 \times 11) + (1 \times 14) = 30$

Blok plainteks ke-3 : 000000

Kriptogram : 0

Blok plainteks ke-4 : 011000

Kriptogram : $(1 \times 5) + (1 \times 6) = 11$

Jadi, cipherteks yang dihasilkan: 32 30 0 11

- Sayangnya, algoritma *knapsack* sederhana di atas hanya dapat digunakan untuk enkripsi, tetapi tidak untuk dekripsi.

- Misalnya, jika diberikan kriptogram = 32, maka tentukan b_1, b_2, …, b_6 sedemikian sehingga

$$32 = b_1 + 5b_2 + 6b_3 + 11b_4 + 14b_5 + 20b_6 \qquad (2)$$

- Solusi persamaan (2) ini tidak dapat dipecahkan dalam orde waktu polinomial dengan semakin besarnya *n* (dengan catatan barisan bobot tidak dalam urutan menaik).

- Namun, hal inilah yang dijadikan sebagai kekuatan algoritma *knapsack*.

Superincreasing Knapsack

- *Superincreasing knapsack* adalah persoalan *knapsack* yang dapat dipecahkan dalam orde $O(n)$ (jadi, polinomial).
- Ini adalah persoalan *knapsack* yang mudah sehingga tidak disukai untuk dijadikan sebagai algoritma kriptografi yang kuat.

- Jika senarai bobot disebut barisan *superincreasing*, maka kita dapat membentuk *superincreasing knapsack*.

- Barisan *superincreasing* adalah suatu barisan di mana setiap nilai di dalam barisan lebih besar daripada jumlah semua nilai sebelumnya.
- Contoh: {1, 3, 6, 13, 27, 52} → barisan *superincreasing,*
  {1, 3, 4, 9, 15, 25} → bukan barisan *superincreasing*

- Solusi dari *superincreasing knapsack* (yaitu b_1, b_2, …, b_n) mudah dicari sebagai berikut (berarti sama dengan mendekripsikan cipherteks menjadi plainteks semula):

  1. Jumlahkan semua bobot di dalam barisan.

  2. Bandingkan bobot total dengan bobot terbesar di dalam barisan. Jika bobot terbesar lebih kecil atau sama dengan bobot total, maka ia dimasukkan ke dalam *knapsack*, jika tidak, maka ia tidak dimasukkan.

  3. Kurangi bobot total dengan bobot yang telah dimasukkan, kemudian bandingkan bobot total sekarang dengan bobot terbesar selanjutnya. Demikian seterusnya sampai seluruh bobot di dalam barisan selesai dibandingkan.

  4. Jika bobot total menjadi nol, maka terdapat solusi persoalan *superincreasing knapsack* , tetapi jika tidak nol, maka tidak ada solusinya.

Contoh 2: Misalkan bobot-bobot yang membentuk barisan *superincreasing* adalah {2, 3, 6, 13, 27, 52}, dan diketahui bobot *knapsack* (M) = 70. Kita akan mencari b_1, b_2, …, b_6 sedemikian sehingga

$$70 = 2b_1 + 3b_2 + 6b_3 + 13b_4 + 27b_5 + 52b_6$$

Caranya sebagai berikut:

1) Bandingkan 70 dengan bobot terbesar, yaitu 52. Karena $52 \leq 70$, maka 52 dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow b_6 = 1$

2) Bobot total sekarang menjadi 70 – 52 = 18. Bandingkan 18 dengan bobot terbesar kedua, yaitu 27. Karena 27 > 18, maka 27 tidak dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow b_5 = 0$

3) Bandingkan 18 dengan bobot terbesar berikutnya, yaitu 13. Karena $13 \leq 18$, maka 13 dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow b_4 = 1$

4) Bobot total sekarang menjadi 18 – 13 = 5.

5) Bandingkan 5 dengan bobot terbesar kedua, yaitu 6. Karena 6 > 5, maka 6 tidak dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow$ $b_3 = 0$

6) Bandingkan 5 dengan bobot terbesar berikutnya, yaitu 3. Karena $3 \leq 5$, maka 3 dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow$ $b_2 = 1$

7) Bobot total sekarang menjadi 5 – 3 = 2.

8) Bandingkan 2 dengan bobot terbesar berikutnya, yaitu 2. Karena $2 \leq 2$, maka 2 dimasukkan ke dalam *knapsack*. $\rightarrow$ $b_1 = 0$

9) Bobot total sekarang menjadi 2 – 2 = 0.

Karena bobot total tersisa = 0, maka solusi persoalan *superincreasing knapsack* ditemukan. Barisan bobot yang dimasukkan ke dalam *knapsack* adalah

$$\{2, 3, -, 13, -, 52\}$$

sehingga

$$70 = (1 \times 2) + (1 \times 3) + (0 \times 6) + (1 \times 13) + (0 \times 27) + (1 \times 52)$$

Dengan kata lain, plainteks dari kriptogram 70 adalah 110101.

Algoritma *Knapsack* Kunci-Publik

- Algoritma *superincreasing knapsack* adalah algoritma yang lemah, karena cipherteks dapat didekripsi menjadi plainteksnya secara mudah dalam waktu lanjar.

- Algoritma *non-superincreasing knapsack* atau *normal knapsack* adalah kelompok algoritma *knapsack* yang sulit (dari segi komputasi) karena membutuhkan waktu dalam orde eksponensial untuk memecahkannya.

- Namun, *superincreasing knapsack* dapat dimodifikasi menjadi *non-superincreasing knapsack* dengan menggunakan kunci publik (untuk enkripsi) dan kunci privat (untuk dekripsi).

- Kunci publik merupakan barisan *non-superincreasing* sedangkan kunci privat tetap merupakan barisan *superincreasing*.

- Modifikasi ini ditemukan oleh Martin Hellman dan Ralph Merkle.

- Prosedur membuat kunci publik dan kunci privat:

1. Tentukan barisan *superincreasing*.

2. Kalikan setiap elemen di dalam barisan tersebut dengan *n* (mod *m*)

   (Modulus *m* seharusnya angka yang lebih besar daripada jumlah semua elemen di dalam barisan, sedangkan pengali *n* seharusnya tidak mempunyai faktor persekutuan dengan *m*, atau PBB(n, m) = 1)

3. Hasil perkalian akan menjadi kunci publik sedangkan barisan *superincreasing* semula menjadi kunci privat.

Contoh 3: Misalkan barisan *superincreasing* adalah {2, 3, 6, 13, 27, 52}, dan m = 105, dan n = 31.

Barisan *non-superincreasing* (atau normal) *knapsack* dihitung sbb:

$2 \cdot 31 \bmod 105 = 62$

$3 \cdot 31 \bmod 105 = 93$

$6 \cdot 31 \bmod 105 = 81$

$13 \cdot 31 \bmod 105 = 88$

$27 \cdot 31 \bmod 105 = 102$

$52 \cdot 31 \bmod 105 = 37$

Jadi, kunci publik adalah {62, 93, 81, 88, 102, 37}, sedangkan kunci privat adalah {2, 3, 6, 13, 27, 52}.

Enkripsi

- Enkripsi dilakukan dengan cara yang sama seperti algoritma *knapsack* sebelumnya.

- Mula-mula plainteks dipecah menjadi blok bit yang panjangnya sama dengan kardinalitas barisan kunci publik.

- Kalikan setiap bit di dalam blok dengan elemen yang berkoresponden di dalam barisan kunci publik.

Contoh 4: Misalkan

Plainteks: 011000110101101110

dan kunci publik adalah hasil dari Contoh 3,

Kunci publik = {62, 93, 81, 88, 102, 37},
Kunci privat adalah {2, 3, 6, 13, 27, 52}.

Plainteks dibagi menjadi blok yang panjangnya 6, kemudian setiap bit di dalam blok dikalikan dengan elemen yang berkorepsonden di dalam kunci publik:

Blok plainteks ke-1 : 011000

Kunci publik : 62, 93, 81, 88, 102, 37

Kriptogram : $(1 \times 93) + (1 \times 81) = 174$

Blok plainteks ke-2 : 110101

Kunci publik : 62, 93, 81, 88, 102, 37

Kriptogram : $(1 \times 62) + (1 \times 93) + (1 \times 88) +$
$(1 \times 37) = 280$

Blok plainteks ke-3 : 101110

Kunci publik : 62, 93, 81, 88, 102, 37

Kriptogram : $(1 \times 62) + (1 \times 81) + (1 \times 88) +$
$(1 \times 102) = 333$

Jadi, cipherteks yang dihasilkan : 174, 280, 333

Dekripsi

- Dekripsi dilakukan dengan menggunakan kunci privat.
- Mula-mula penerima pesan menghitung n^{-1} , yaitu balikan dari n modulo m, sedemikian sehingga

$$n \cdot n^{-1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

- Kalikan setiap kriptogram dengan n^{-1} , lalu nyatakan hasil kalinya sebagai penjumlahan elemen-elemen kunci privat untuk memperoleh plainteks dengan menggunakan algoritma pencarian solusi *superincreasing knapsack*.

Contoh 5: Kita akan mendekripsikan cipherteks dari Contoh 4 dengan menggunakan kunci privat {2, 3, 6, 13, 27, 52}. Di sini, n = 31 dan m = 105.

Nilai 31^{-1} (mod 105) diperoleh sbb:

$$n \cdot n^{-1} \equiv 1 \pmod{m} \rightarrow 31 \cdot n^{-1} \equiv 1 \pmod{105} \rightarrow n^{-1} = (1 + 105k)/31$$

coba k = 0, 1, 2, …, diperoleh n^{-1} = 61

Cipherteks dari Contoh 4 adalah 174, 280, 333. Hasil dekripsi:

$174 \cdot 61 \bmod 105 = 9 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 27 + 0 \cdot 52 \rightarrow 011000$

$280 \cdot 61 \bmod 105 = 70 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 27 + 1 \cdot 52 \rightarrow 110101$

$333 \cdot 61 \bmod 105 = 48 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 27 + 0 \cdot 52 \rightarrow 101110$

Jadi, plainteks yang dihasilkan kembali adalah:

011000110101101110

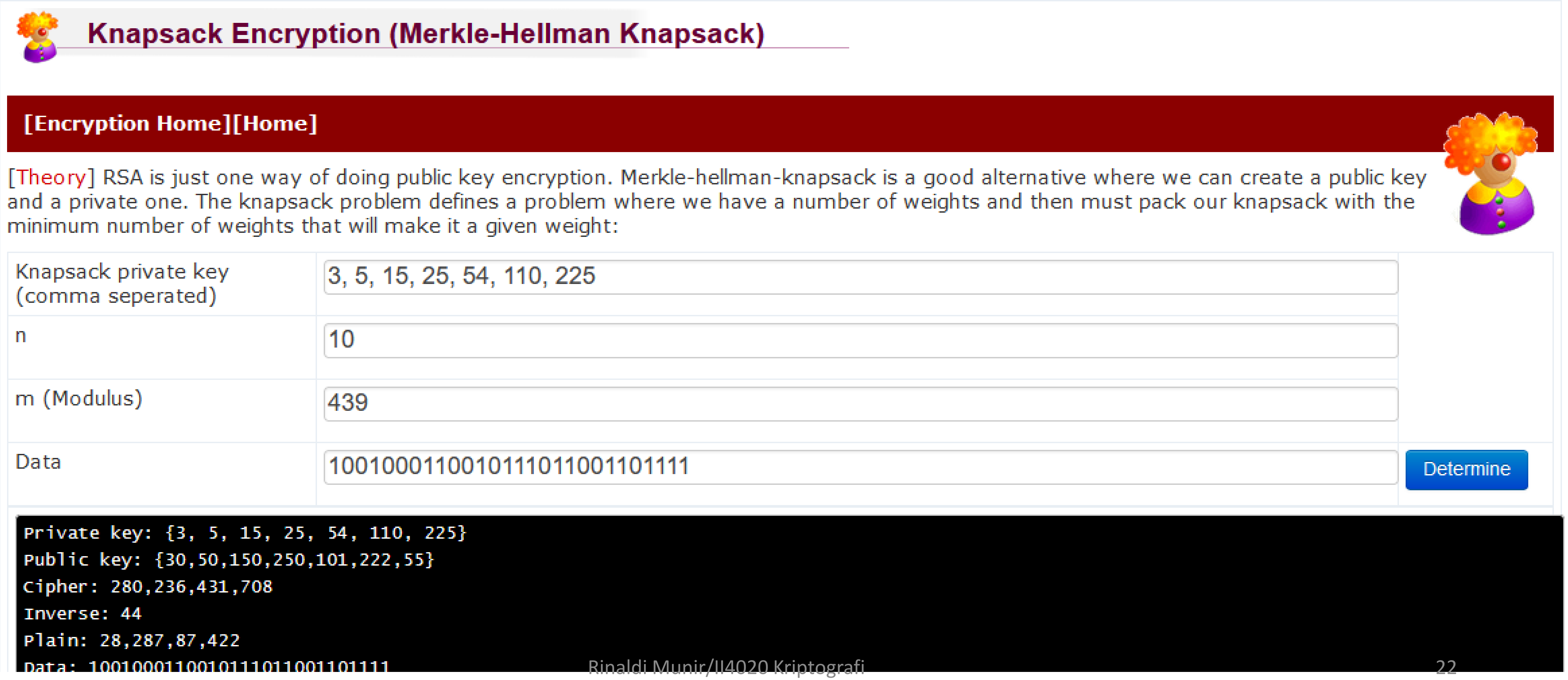
Implementasi Knapsack

- Ukuran cipherteks yang dihasilkan lebih besar daripada plainteksnya, karena enkripsi dapat menghasilkan kriptogram yang nilai desimalnya lebih besar daripada nilai desimal blok plainteks yang dienkripsikan.

- Untuk menambah kekuatan algoritma *knapsack*, kunci publik maupun kunci privat seharusnya paling sedikit 250 elemen, nilai setiap elemen antara 200 sampai 400 bit panjangnya, nilai modulus antara 100 sampai 200 bit.

- Dengan nilai-nilai *knapsack* sepanjang itu, dibutuhkan 10^{46} tahun untuk menemukan kunci secara *brute force*, dengan asumsi satu juta percobaan setiap detik.

- Demo Merkle-Hellman knapsack online: https://asecuritysite.com/encryption/knapcode?val1=3%2C%205%2C%2015%2C%2025%2C%2054%2C%20110%2C%20225&val2=10&val3=439&val4=1001000110010111011001101111



Kriptanalisis Knapsack

- Sayangnya, algoritma *knapsack* dinyatakan sudah tidak aman, karena *knapsack* dapat dipecahkan oleh pasangan kriptografer Adi Shamir.
- Shamir merumuskan transformasi yang memungkinkan mereka merekonstruksi *superincreasing knapsack* dari *normal knapsack*. dalam waktu polynomial.
- Baca makalahnya: *A polynomial time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem*

  (**Published in:** 23rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1982))

A POLYNOMIAL TIME ALGORITHM FOR BREAKING THE BASIC MERKLE-HELLMAN CRYPTOSYSTEM

by Adi Shamir

Applied Mathematics
The Weizmann Institute
Rehovot, Israel

Abstract

The cryptographic security of the Merkle-Hellman cryptosystem has been a major open problem since 1976. In this paper we show that the basic variant of this cryptosystem, in which the elements of the public key are modular multiples of a superincreasing sequence, is breakable in polynomial time.

I. Introduction

In 1976, Whitfield Diffie and Martin Hellman published their pioneering paper on public-key cryptography (Diffie and Hellman [1976]). The paper speculated that such cryptosystems exist and surveyed their potential applications, but did not describe actual implementations. In late 1976 and early 1977, the first two public-key cryptosystems were discovered (see Merkle and Hellman [1978] and Rivest, Shamir and Adleman [1978]). Since then, many variants and a few new public-key cryptosystems have been proposed, but for a variety of rea- not claiming to give any ultimate answers in this sense.

An overview of the Merkle-Hellman cryptosystem can be found in Section II. In Section III we describe the cryptanalytic attack in an informal way, and in Section IV we analyze its performance. A discussion of the results appears in Section V.

II. The Basic Merkle-Hellman Cryptosystem

The public encryption key in any Merkle-Hellman cryptosystem is a sequence of n natural numbers $a_1,\ldots,a_n$ (a typical value of n is 100 and a typical size of each a_i is 200 bits). To encrypt an n-bit cleartext $X = x_1\ldots x_n$ ($x_i \in \{0,1\}$), the sender computes a message-dependent partial sum of the a_i elements:

$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$