Bahan kuliah II4020 Kriptografi

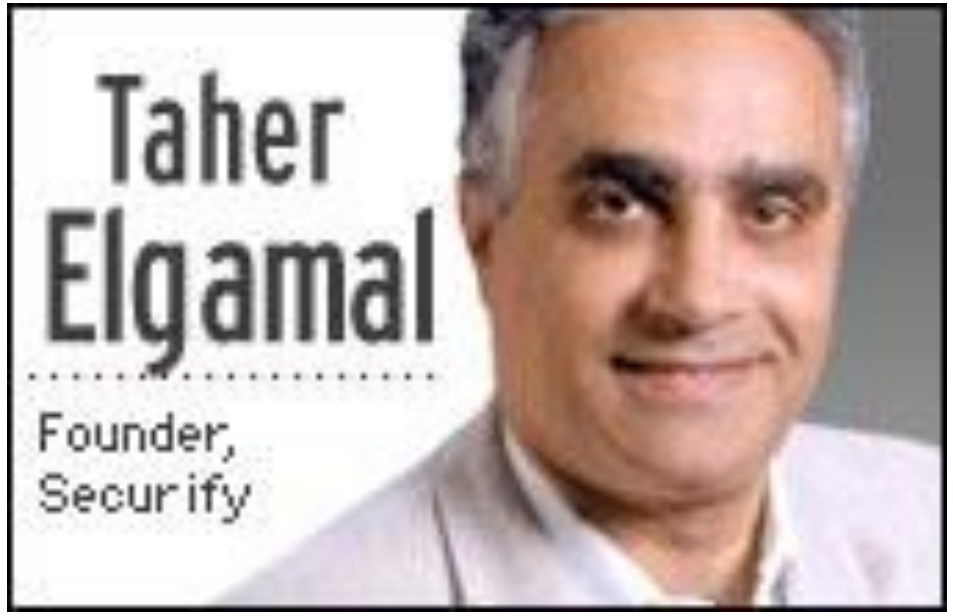
Algoritma ElGamal

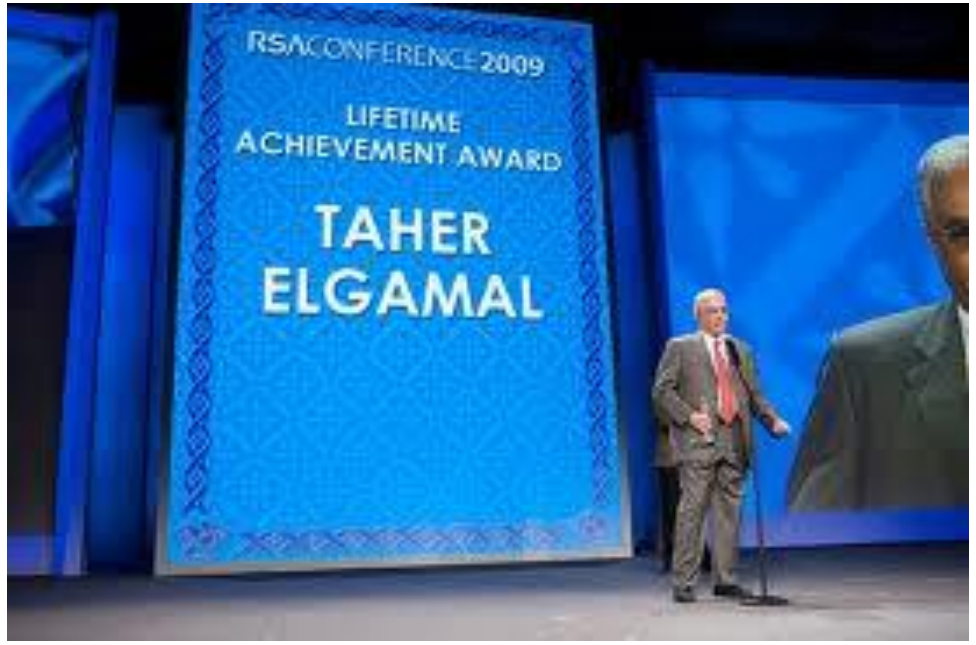
Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2025

Pendahuluan

- Algoritma Elgamal dibuat oleh Taher Elgamal (1985). Pertama kali dikemukakannya di dalam makalah berjudul "*A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms*", dimuat di dalam IEEE Transactions on Information Theory (Volume: 31, Issue: 4, July 1985)





A PUBLIC KEY CRYPTOSYSTEM AND A SIGNATURE SCHEME BASED ON DISCRETE LOGARITHMS

TaherElGamal*

Hewlett-Packard Labs
1501 Page Mill Rd
Palo Alto CA 94301

ABSTRACT

A new signature scheme is proposed together with an implementation of the Diffie - Hellman key distribution scheme that achieves a public key cryptosystem. The security of both systems relies on the difficulty of computing discrete logarithms over finite fields.

1. INTRODUCTION

In 1976, Diffie and Hellman [3] introduced the concept of public key cryptography. Since then, several attempts have been made to find practical public key systems (see for example [6,7,9]) depending on the difficulty of solving some problems. For example, the RSA system [9] depends on the difficulty of factoring large integers. This paper presents systems that rely on the difficulty of computing logarithms over finite fields.

Section 2 shows a way to implement the public key distribution scheme introduced by Diffie and Hellman [3] to encrypt and decrypt messages. The security of this system is equivalent to that of the distribution scheme. Section 3 introduces a new digital signature

- Keamanan algoritma ini terletak pada sulitnya menghitung logaritma diskrit.

- *Persoalan logaritma diskrit*: Jika *p* adalah bilangan prima dan *g* dan *y* adalah sembarang bilangan bulat, carilah *x* sedemikian sehingga

$$g^x \equiv y \pmod{p}$$

  Contoh: $7^x \equiv 15 \pmod{41}$, berapakah nilai x?

- Sebelum membahas algoritma ElGamal lebih lanjut, maka kita perlu memahami terlebih dahulu tentang logaritma diskrit dan akar primitif dari sebuah bilangan prima.

Akar Primitif dan Logaritma Diskrit

- Jika n adalah bilangan bulat, maka a disebut **akar primitif** dari n jika perpangkatan

  $a,\ a^2, \ldots, a^{\phi(n)}$ (dalam sebuah modulus n)

  menghasilkan nilai yang berbeda dan semuanya relatif prima dengan n.

- Secara khusus, jika p adalah bilangan prima, maka a disebut akar primitif dari p jika perpangkatan

  $a,\ a^2, \ldots, a^{p-1}$ (dalam modulus p)

  menghasilkan nilai-nilai yang berbeda

  (ingatlah dari fungsi *toitient* Euler, bahwa jika p prima maka $\phi(p) = p - 1$)

- Sebagai contoh, misalkan $p = 7$, maka $a = 3$ adalah akar primitif dari 7 karena

  $3^1 \pmod 7 = 3$; $3^2 \pmod 7 = 2$; $3^3 \pmod 7 = 6$

  $3^4 \pmod 7 = 4$; $3^5 \pmod 7 = 5$; $3^6 \pmod 7 = 1$

- Jadi, semua perpangkatan dari 3 menghasilkan nilai-nilai yang berbeda (3, 2, 6, 4, 5, 1), semua bilangan di dalam modulus 7 terjadi satu kali.

- Perpangkatan berikutnya, $3^7 \pmod 7$, $3^8 \pmod 7$, …, akan kembali berulang menghasilkan nilai-nilai tersebut. Panjang satu siklus tidak lebih dari $7 – 1 = 6$.

- Secara umum, untuk p bilangan prima, maka panjang siklus tidak lebih dari $p – 1$.

- Perhatikan bahwa $a = 2$ bukan akar primitif dari 7 karena

$2^1 \pmod 7 = 2$; $2^2 \pmod 7 = 4$; $2^3 \pmod 7 = 1$

$2^4 \pmod 7 = 2$; $2^5 \pmod 7 = 4$; $2^6 \pmod 7 = 1$

- Nilai-nilai yang dihasilkan dari 2^1, 2^2, …, 2^6 tidak semuanya berbeda dan tidak mencakup semua nilai di dalam modulus 7.

- Untuk menemukan semua akar primitif dari *p*, kita harus mencoba semua bilangan bulat dari 2, 3, …

- Jika a adalah akar primitif dari bilangan prima p, maka untuk bilangan bulat b kita dapat menemukan pangkat x sedemikian sehingga

$$b \equiv a^x \pmod{p}, \quad 0 \leq x \leq (p-1)$$

- Pangkat x disebut **logaritma diskrit** dari b untuk basis a (mod p).

- Dalam **persoalan logaritma diskrit**, diberikan $b \equiv a^x \pmod{p}$, carilah x yang memenuhi kekongruenan tersebut.

- Sebagai contoh, 7 adalah akar primitif dari bilangan prima $p = 41$. Maka,

carilah x sedemikian sehingga $15 \equiv 7^x \pmod{41}$, jawabannya adalah 3 karena

$$7^3 = 343 \equiv 15 \pmod{41}$$

Properti algoritma ElGamal:

1. Bilangan prima, p (tidak rahasia)
2. Bilangan acak, g ($g < p$, g adalah akar primitif dari p) (tidak rahasia)
3. Bilangan acak, x ($2 \leq x \leq p - 2$) (rahasia, kunci privat)
4. $y = g^x \bmod p$ (tidak rahasia, kunci publik)
5. m (plainteks) (rahasia)
6. a dan b (cipherteks) (tidak rahasia)

Prosedur Pembangkitan Kunci

1. Pilih sembarang bilangan prima p (p dapat di-*share* di antara anggota kelompok)
2. Pilih dua buah bilangan acak, g dan x, dengan syarat $g < p$, g akar primitif dari p, dan $2 \leq x \leq p - 2$
3. Hitung $y = g^x \bmod p$ (1)

Hasil dari algoritma ini:

- Kunci publik: tripel (y, g, p)
- Kunci privat: pasangan (x, p)

Prosedur Enkripsi

1. Susun plainteks menjadi blok-blok m_1, m_2, …, (nilai setiap blok harus berada di dalam selang [0, p – 1].

2. Pilih bilangan acak k, yang dalam hal ini $1 \leq k \leq p - 1$.

3. Setiap blok m dienkripsi dengan rumus

   $a = g^k \bmod p$ (2)

   $b = y^k m \bmod p$ (3)

   Pasangan (a, b) adalah cipherteks untuk blok pesan m. Jadi, ukuran cipherteks adalah dua kali ukuran plainteksnya.

Prosedur Dekripsi

1. Gunakan kunci privat x untuk menghitung $(a^x)^{-1} = a^{p-1-x} \bmod p$

2. Hitung plainteks m dengan persamaan:

   $m = b/a^x \bmod p = b(a^x)^{-1} \bmod p$

Bukti bahwa pesan *m* dapat diungkap kembali dari pasangan cipherteks *a* dan *b*:

Dari persamaan (2): $a = g^k \bmod p \rightarrow g^k \equiv a \pmod{p}$

Pangkatkan kedua ruas dengan *x* : $g^{xk} \equiv a^x \pmod{p}$

Dari persamaan (3): $b = y^k m \bmod p \rightarrow y^k m \equiv b \pmod{p}$

Dari persamaan (2): $y = g^x \bmod p \rightarrow g^x \equiv y \pmod{p}$,

maka

$$b/a^x \equiv y^k m/a^x \pmod{p}$$
$$\equiv g^{xk} m/g^{xk} \pmod{p}$$
$$\equiv m \pmod{p}$$

yang berarti bahwa plainteks *m* dapat diungkap kembali dari cipherteks *a* dan *b.*

Contoh 1: Bob membangkitkan kunci publik dan kunci privatnya. Alice akan mengengkripsi pesan dengan menggunakan kunci publik Bob.

(a) Pembangkitan kunci (Oleh Bob)

syarat $g < p$, g akar primitif dari 2357 dan $1 \leq x \leq p - 2$

Misal $p = 2357$, $g = 2$, dan $x = 1751$.

Hitung: $y = g^x \bmod p = 2^{1751} \bmod 2357 = 1185$

Hasil: Kunci publik: ($y = 1185$, $g = 2$, $p = 2357$)

Kunci privat: ($x = 1751$, $p = 2357$).

Bob memberitahu kunci publik ini kepada Alice

(b) Enkripsi (Oleh Alice)

Misalkan pesan $m = 2035$ (nilai m masih berada di dalam selang [0, 2357 – 1]).

Alice memilih bilangan acak $k = 1520$ (nilai k berada di dalam selang [0, 2357 – 1]).

Alice melakukan enkripsi dengan kunci public Bob (y = 1185, g = 2, p = 2357):

$a = g^k \bmod p = 2^{1520} \bmod 2357 = 1430$

$b = y^k m \bmod p = 1185^{1520} \cdot 2035 \bmod 2357 = 697$

Jadi, cipherteks yang dihasilkan adalah (1430, 697).

Alice mengirim cipherteks ini kepada Bob.

(c) Dekripsi (Oleh Bob)

Bob melakukan dekripsi dengan kunci privatnya (x = 1751, p = 2357):

$(a^x)^{-1} = a^{p-1-x} \bmod p = 1430^{2357-1-1751} \bmod 2357 = 1430^{605} \bmod 2357 = 872$

$m = b/a^x \bmod p = b \cdot (a^x)^{-1} \bmod p = 697 \cdot 872 \bmod 2357 = 2035$

Bob mendapatkan kembali plainteks m = 2035 yang dikirim oleh Alice.

Contoh 2: Alice membangkitkan pasangan kuncinya. Bob akan mengirim pesan dengan menggunakan kunci publik Alice.

(a) Pembangkitan kunci (oleh Alice)

Alice memilih bilangan prima $p = 2273$, akar primitif dari p yaitu $g = 3$, dan $x = 243$.

Alice kemudian menghitung:

$$y = g^x \bmod p = 3^{243} \bmod 2273 = 461$$

Jadi,

kunci privat Alice: ($x = 243$, $p = 2273$)

kunci publik Alice: ($y = 461$, $g = 3$, $p = 2273$).

(b) Enkripsi (oleh Bob)

Misalkan Bob ingin mengirim plainteks ‘HALO’ kepada Alice.

Misalkan A = 00, B = 01, …, Z = 25, maka pesan *m* dikodekan ke dalam *integer* adalah

$m = 07001114$

Bob memecah *m* menjadi blok yang lebih kecil, misalkan *m* dipecah menjadi blok-blok sepanjang 4 angka:

$m_1 = 0700$ dan $m_2 = 1114$

Nilai-nilai m_i ini masih terletak di dalam selang [0, 2273 – 1] agar transformasi menjadi satu-ke-satu.

(i) Enkripsi m_1 = 0700

Bob memilih bilangan acak k = 1463 (nilai k masih berada di dalam selang [0, 2273 – 1]).

Bob mengenkripsi pesan dengan menggunakan kunci publik Alice (y = 461, g = 3, p = 2273):

$a = g^k \bmod p = 3^{1463} \bmod 2273 = 1439$

$b = y^k m_1 \bmod p = 461^{1463} \cdot 700 \bmod 2273 = 74$

Jadi, cipherteks yang dihasilkan untuk m_1 adalah $c_1 = (1439, 74)$.

(ii) Enkripsi m_2 = 1114

Bob memilih bilangan acak k = 2001 (nilai k masih berada di dalam selang [0, 2273 – 1]).

Bob mengenkripsi pesan dengan menggunakan kunci publik Alice (y = 461, g = 3, p = 2273):

$a = g^k \bmod p = 3^{2001} \bmod 2273 = 1220$

$b = y^k m_2 \bmod p = 461^{2001} \cdot 1114 \bmod 2273 = 1682$

Jadi, cipherteks yang dihasilkan untuk m_2 adalah $c_2 = (1220, 1682)$.

Bob mengirim cipherteks (1439, 74) dan (1220, 1682) kepada Alice.

(c) Dekripsi (oleh Alice)

Alice mendekripsi cipherteks dari Bob dengan kunci privatnya (x = 243, p = 2273):

(i) Dekripsi c_1 = (1439, 74)

$$(a^x)^{-1} = a^{p-1-x} \bmod p = 1439^{2273-1-243} \bmod 2273 = 1439^{2029} \bmod 2273 = 1791$$

$$m_1 = b/a^x \bmod p = b(a^x)^{-1} \bmod p = 74 \cdot 1791 \bmod 2273 = 700 = 0700$$

(ii) Dekripsi c_2 = (1220, 1682)

$$(a^x)^{-1} = a^{p-1-x} \bmod p = 1220^{2029} \bmod 2273 = 1125$$

$$m_2 = b/a^x \bmod p = 1682(a^x)^{-1} \bmod p = 1682 \cdot 1125 \bmod 2273 = 1114$$

Plainteks yang didekripsi adalah m_1m_2 = 07001114, yang kalau dikodekan menjadi teks adalah empat digit adalah "HALO", sama dengan plainteks yang dikirim oleh Bob.

- Demo online enkripsi ElGamal: https://www.debjitbiswas.com/elgamal/