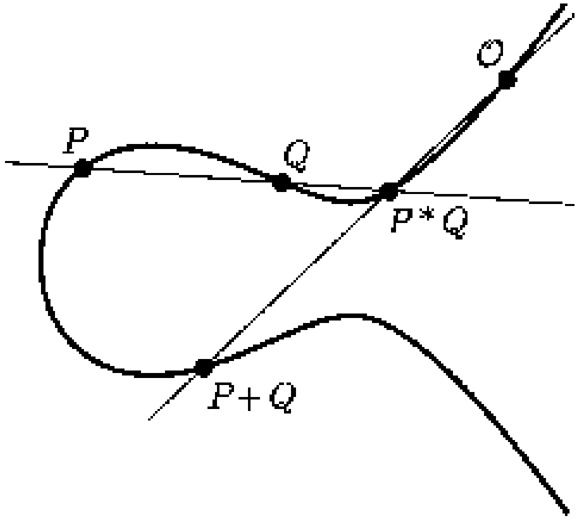
Bahan kuliah II4031 Kriptografi dan Koding

Elliptic Curve Cryptography (ECC)

(Bagian 2)



Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

2024

Referensi:

1. Andreas Steffen, *Elliptic Curve Cryptography,* Zürcher Hochschule Winterthur.
2. Debdeep Mukhopadhyay, *Elliptic Curve Cryptography* , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras.
3. Anoop MS , *Elliptic Curve Cryptography, an Implementation Guide*

Pendahuluan

- Sebagian besar kriptografi kunci-publik (seperti RSA, ElGamal, Diffie-Hellman) menggunakan bilangan bulat yang sangat besar dalam komputasinya.

- Sistem seperti itu memiliki masalah yang signifikan dalam menyimpan, memproses kunci dan pesan, dan membutuhkan waktu komputasi yang lama.

- Sebagai alternatif adalah melakukan komputasi berbasis kurva eliptik (*elliptic curve*).

- Kriptografi yang menggunakan kurva eliptik dinamakan *Elliptic Curve Cryptography* (ECC).

- Komputasi dengan kurva eliptik menawarkan keamanan yang sama dengan algoritma-algoritma tersebut namun dengan ukuran kunci yang lebih kecil.

Sumber: William Stallings, Cryptography and Network Security Chapter 10, 5th Edition

- ECC adalah kriptografi kunci-publik yang relatif lebih baru usianya.
- Dikembangkan oleh Neal Koblitz dan Victor S. Miller tahun 1985.
- Klaim: Panjang kunci ECC lebih pendek daripada kunci RSA, namun memiliki tingkat keamanan yang sama dengan RSA.
- Contoh: kunci ECC sepanjang 160-bit menyediakan tingkat keamanan yang sama dengan 1024-bit kunci RSA.
- Keuntungan: dengan panjang kunci yang lebih pendek, membutuhkan memori dan komputasi yang lebih sedikit.
- Cocok untuk piranti nirkabel, dimana prosesor, memori, umur batere terbatas.

Teori Aljabar Abstrak

- Sebelum membahas ECC, perlu dipahami beberapa konsep aljabar abstrak yang mendasarinya.

- Konsep aljabar abstrak:

  1. Grup (*group*)
  2. Medan (*field*)

Grup

- Grup (*group*) adalah sistem aljabar yang terdiri dari:

  - sebuah himpunan G

  - sebuah operasi biner *

  sedemikian sehingga untuk semua elemen a, b, dan c di dalam G berlaku aksioma berikut:

  1. *Closure*: $a * b$ harus berada di dalam G
  2. Asosiatif: $a * (b * c) = (a * b) * c$
  3. Elemen netral: terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$
  4. Elemen invers: terdapat $a' \in G$ sedemikian sehingga $a * a' = a' * a = e$

- Notasi: <G, *>

- <G, +> menyatakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan.
- <G, ·> menyatakan sebuah grup dengan operasi perkalian

Contoh-contoh grup:

1. <R, +> : grup dengan himpunan bilangan riil dengan operasi +

   $e = 0$ dan $a' = -a$

2. <R*, ·> : grup dengan himpunan bilangan riil tidak nol (yaitu, R* = R – { 0}) dengan operasi kali (·)

   $e = 1$ dan $a' = 1/a = a^{-1}$

3. <Z, +> dan <Z, ·> masing-masing adalah grup dengan himpunan bilangan bulat (*integer*) dengan operasi + dan ·

4. $\langle Z_n, \oplus \rangle$: grup dengan himpunan *integer* modulo n, yaitu $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ dan $\oplus$ adalah operasi penjumlahan modulo n.

Contoh: $n = 5$, $Z_n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $(3 \oplus 4) = (3 + 4) \bmod 5 = 2$

$\langle Z_p, \oplus \rangle$: grup dengan himpunan *integer* modulo p, p adalah bilangan prima, yaitu $Z_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ dan $\oplus$ adalah operasi penjumlahan modulo p.

$\langle Z^*_p, \otimes \rangle$: dengan himpunan integer bukan nol, p adalah bilangan prima, yaitu $Z^*_p = \{1, 2, \ldots, p - 1\}$ dan $\otimes$ adalah operasi perkalian modulo p.

- Sebuah grup <G, *> dikatakan grup komutatif atau grup abelian (atau disingkat abelian saja) jika berlaku aksioma komutatif $a * b = b * a$ untuk semua a, $b \in$ G.

- <R, +> dan <R, ·> adalah abelian
- <Z, +> dan <Z, ·> adalah abelian

- tetapi, <M, $\times$>, dengan M adalah himpunan matriks 2 x 2 dengan determinan $\neq$ 0 bukan abelian (tanya kenapa?)

Ket: Abelian diambil dari kata “abel”, untuk menghormati Niels Abel, seorang Matematikawan Norwegia (1802 – 1829)

Niels Henrik Abel (5 August 1802 – 6 April 1829) was a Norwegian mathematician who made pioneering contributions in a variety of fields. His most famous single result is the first complete proof demonstrating the impossibility of solving the general quintic equation in radicals. This question was one of the outstanding open problems of his day, and had been unresolved for 250 years. He was also an innovator in the field of elliptic functions, discoverer of Abelian functions. Despite his achievements, Abel was largely unrecognized during his lifetime; he made his discoveries while living in poverty and died at the age of 26.

Most of his work was done in six or seven years of his working life.[1] Regarding Abel, the French mathematician Charles Hermite said: "Abel has left mathematicians enough to keep them busy for five hundred years."[1][2] Another French mathematician, Adrien-Marie Legendre, said: "*quelle tête celle du jeune Norvégien!*" ("what a head the young Norwegian has!").[3]

Born	5 August 1802 Nedstrand, Norway
Died	6 April 1829 (aged 26) Froland, Norway
Residence	Norway
Nationality	Norwegian
Fields	Mathematics
Alma mater	Royal Frederick University
Known for	Abel's binomial theorem Abelian category Abelian variety Abelian variety of CM-type Abel equation Abel equation of the first kind Abelian extension Abel function Abelian group Abel's identity Abel's inequality Abel's irreducibility theorem Abel–Jacobi map Abel–Plana formula Abel–Ruffini theorem Abelian means Abel's summation formula Abel's theorem Abel transform Abel transformation Abelian variety Dual abelian variety

Sumber: Wikipedia

Medan (*Field*)

- Medan (*field*) adalah system aljabar yang terdidi dari
  - himpunan elemen (disimbolkan dengan F)
  - operasi biner, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (·).

- Sebuah struktur aljabar <F, +, ·> disebut medan jika dan hanya jika:
  1. <F, +> adalah grup abelian
  2. <F – {0}, ·> adalah grup abelian
  3. Operasi · menyebar terhadap operasi + (sifat distributif)

     Distributif: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

     $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

- Jadi, sebuah medan memenuhi aksioma: *closure*, komutatif, asosiatif, dan distributif

- Contoh medan:

  - medan bilangan bulat, <Z, +, .>

  - medan bilangan riil, <R, +, .>

  - medan bilangan rasional (p/q), <Q, +, .>

- Sebuah medan disebut berhingga (*finite field*) jika himpunannya memiliki jumlah elemen yang berhingga.

  Jika jumlah elemen di dalam himpunan adalah *n*, maka notasinya F_n

  Contoh: F_2 adalah medan dengan elemen 0 dan 1

- Medan berhingga sering dinamakan juga Galois Field, untuk menghormati Evariste Galois, seorang matematikawan Perancis (1811 – 1832)

Evariste Galois

Born	25 October 1811 Bourg-la-Reine, French Empire
Died	31 May 1832 (aged 20) Paris, Kingdom of France
Nationality	French
Fields	Mathematics
Known for	Work on the theory of equations and Abelian integrals

Medan Berhingga F_p

- Kelas medan berhingga yang penting adalah F_p , dengan p adalah bilangan prima.

- F_p adalah adalah medan berhingga dengan himpunan bilangan bulat {0, 1, 2, …, p – 1}, *p* bilangan prima, dan dua operasi yang didefinisikan sbb:

  1. Penjumlahan, dilakukan dalam modulus p

  Jika a, b $\in F_{p,}$ maka a + b = r, yang dalam hal ini

  r = (a + b) mod p, $0 \le r \le p - 1$

  2. Perkalian, dilakukan dalam modulus p

  Jika a, b $\in F_{p,}$ maka $a \cdot b = s$, yang dalam hal ini

  $s = (a \cdot b)$ mod p, $0 \le s \le p - 1$

Contoh: F_{23} mempunyai anggota {0, 1, 2, …, 22}.

Contoh operasi aritmetika di dalam F_{23}:

$12 + 20 = 9$ (karena $12 + 20 = 32 \bmod 23 = 9$)

$8 \cdot 9 = 3$ (karena $8 \times 9 = 72 \bmod 23 = 3$)

Medan Galois (*Galois Field*)

- Medan Galois adalah medan berhingga dengan p^m elemen, p adalah bilangan prima dan $m \geq 1$.
- Notasi: $GF(p^m)$
- Kasus paling sederhana: bila $m = 1 \rightarrow GF(p)$ atau F_p
- GF(p) terdiri dari himpunan {0, 1, 2, …, p – 1} dan operasi penjumlahan dan perkalian dilakukan di dalam modulus p.

1. Penjumlahan, dilakukan dalam modulus p

Jika a, b $\in$ GF(p), maka a + b = r, yang dalam hal ini r = (a + b) mod p, $0 \leq r \leq p - 1$

2. Perkalian, dilakukan dalam modulus p

Jika a, b $\in$ GF(p), maka $a \cdot b = s$, yang dalam hal ini $s = (a \cdot b)$ mod p, $0 \leq s \leq p - 1$

$p = 2 \rightarrow$ $GF(2)$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$p = 3 \rightarrow$ $GF(3)$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- Contoh: Bentuklah tabel perkalian untuk GF(11), kemudian tentukan solusi untuk $x^2 \equiv 5 \pmod{11}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	4	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$x^2 \equiv 5 \pmod{11}$

Maka:

$x^2 = 16 \rightarrow x_1 = 4$

$x^2 = 49 \rightarrow x_2 = 7$

Cara lain: cari elemen diagonal = 5, lalu ambil elemen mendatar atau elemen Vertikalnya (dilingkari).

Sumber: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Kurva Eliptik

- Kurva eliptik adalah kurva dengan bentuk umum persamaan:

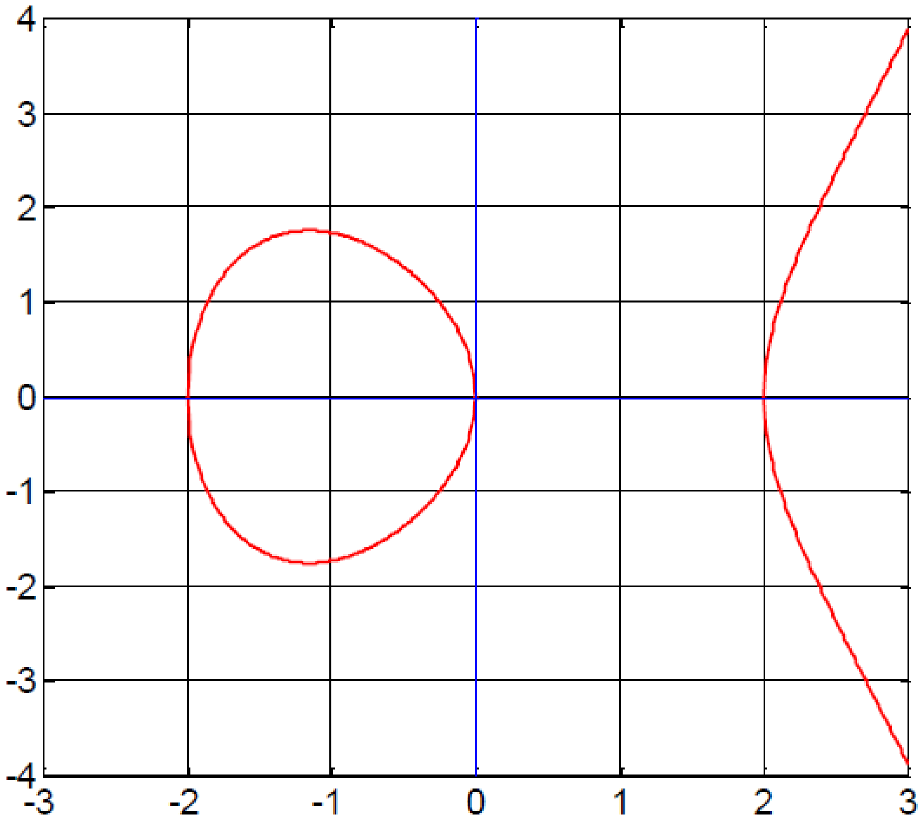
  $$y^2 = x^3 + ax + b$$

  dengan syarat $4a^3 + 27b^2 \neq 0$

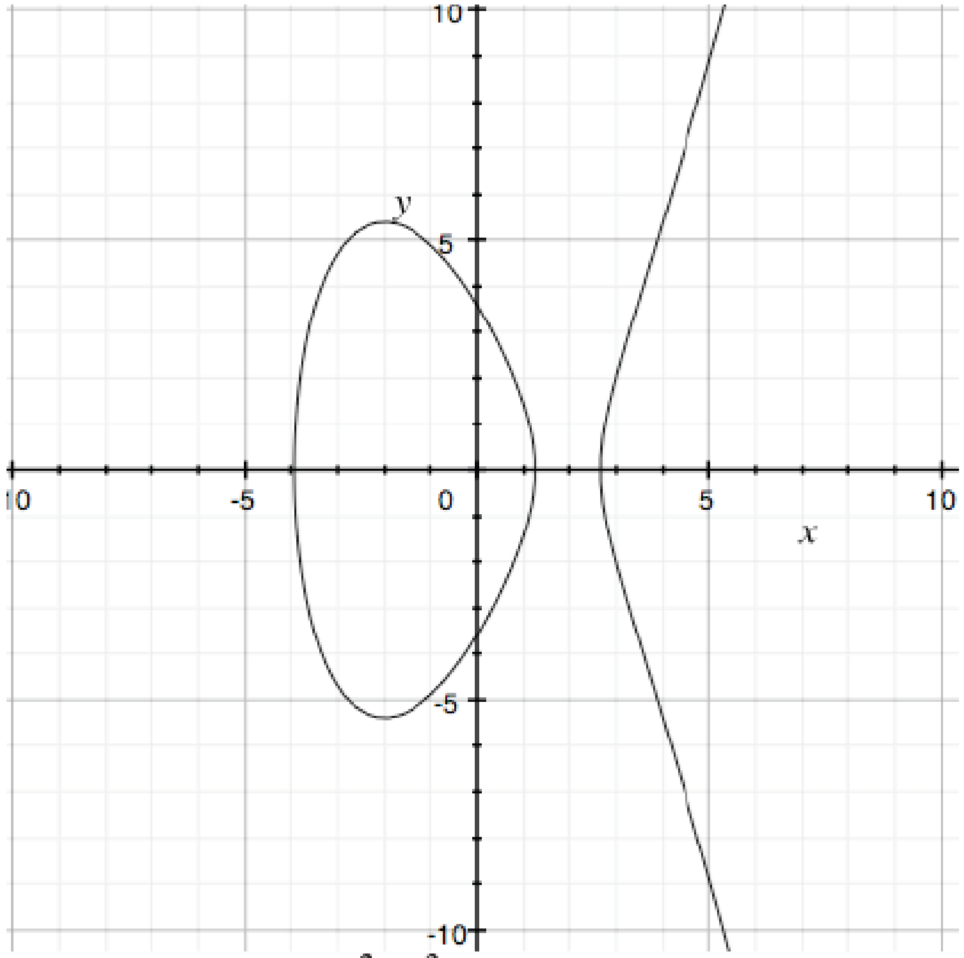
- Tiap nilai a dan b yang berbeda memberikan kurva eliptik yang berbeda pula.

- Contoh: $y^2 = x^3 - 4x$

$$= x(x-2)(x+2)$$

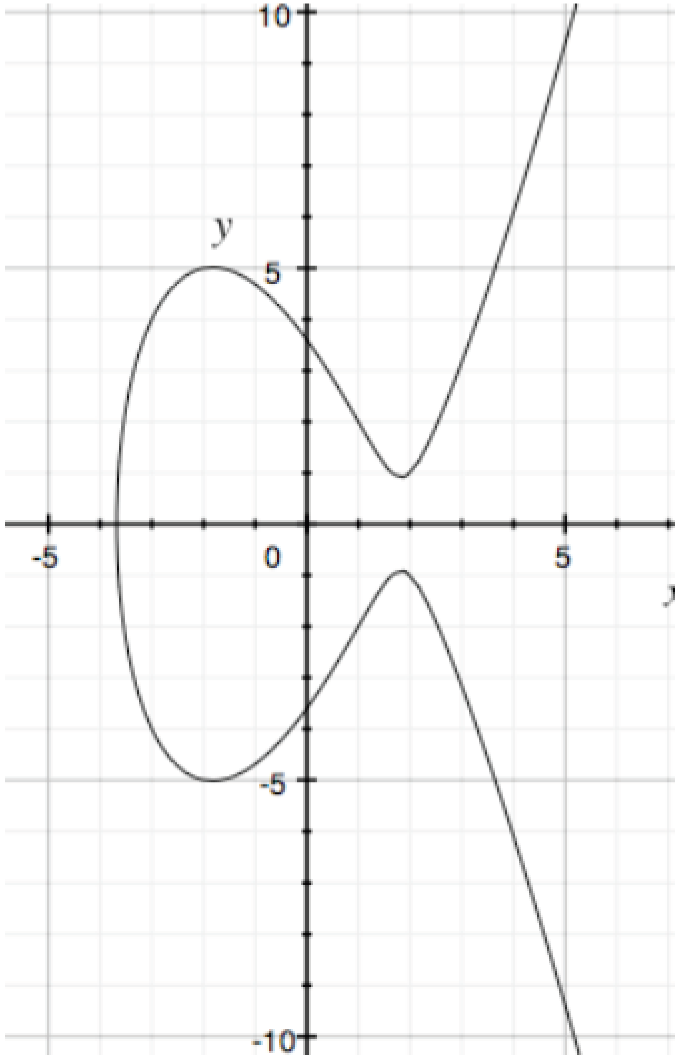


Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography



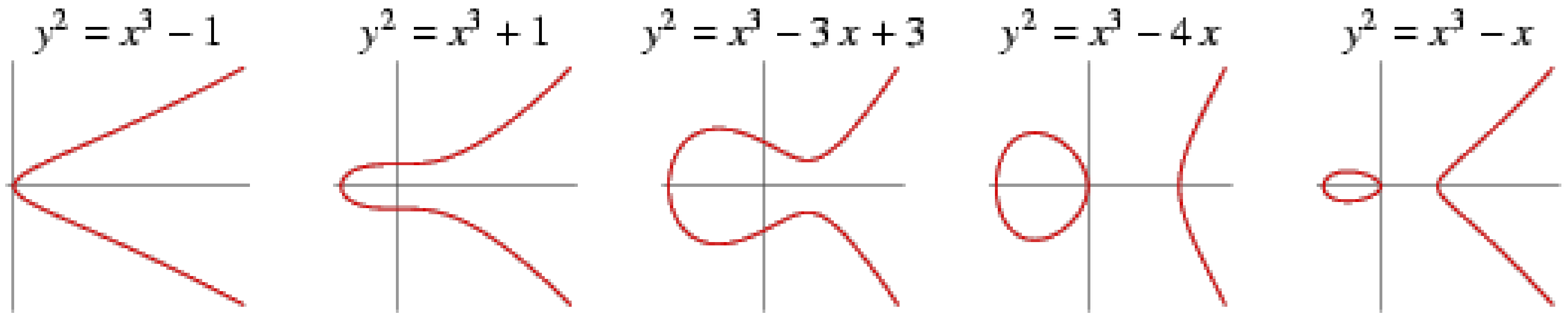
$y^2 = x^3 - 12x + 13$

Sumber gambar: Kevin Tirtawinata, Studi dan Analisis Elliptic Curve Cryptography



$y^2 = x^3 - 10x + 13$

Sumber gambar: Kevin Tirtawinata, Studi dan Analisis Elliptic Curve Cryptography



Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** ,
Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b$ terdefinisi untuk $x,y \in R$

- Didefinisikan sebuah titik bernama titik $O(x, \infty)$, yaitu titik pada *infinity.*

- Titik-titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik bersama operasi + membentuk sebuah grup.

  Himpunan G : semua titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik

  Operasi biner : +

- Penjelasan kenapa kurva eliptik membentuk sebuah grup dijelaskan pada *slide-slide* berikut ini.

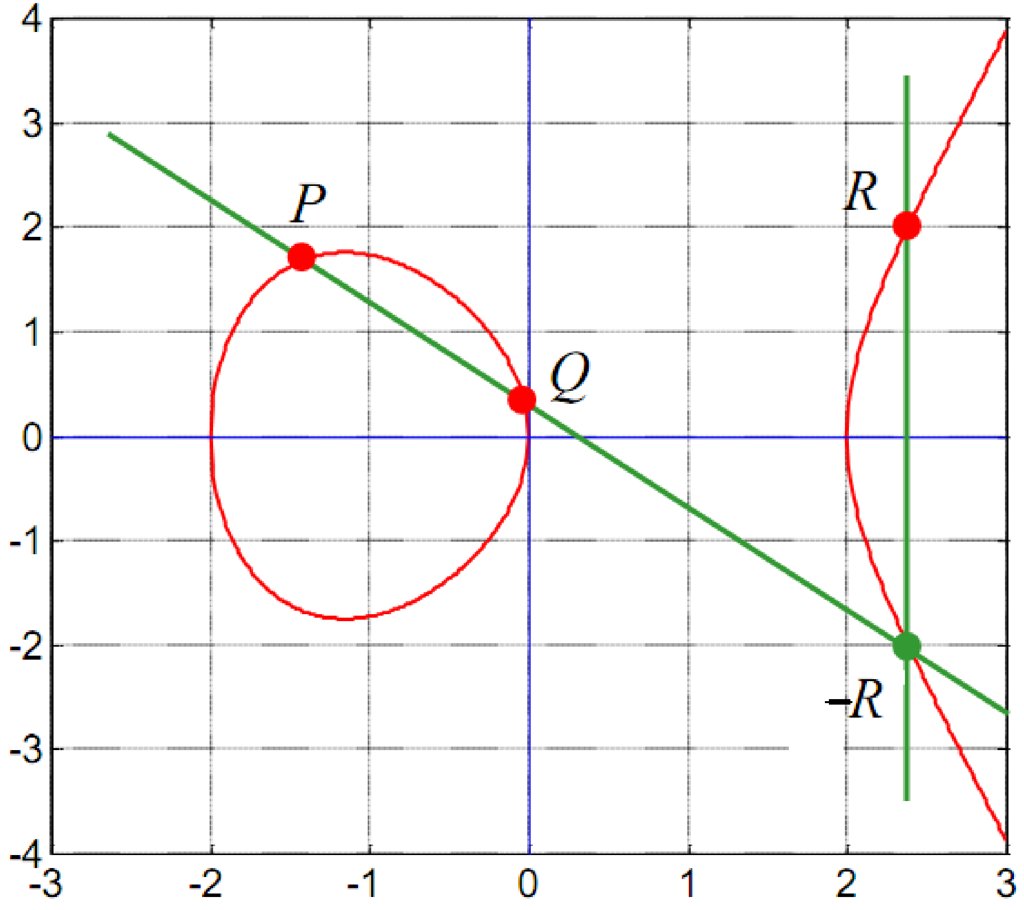
Penjumlahan Titik pada Kurva Eliptik

(a) P + Q = R

Penjelasan geometri:

1. Tarik garis melalui P dan Q
2. Jika P $\neq$ Q, garis tersebut memotong kurva pada titik -R
3. Pencerminan titik -R terhadap sumbu-x adalah titik R
4. Titik R adalah hasil penjumlahan titik P dan Q

Keterangan: Jika R =(x, y) maka –R adalah titik (x, -y)



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Penjelasan Analitik P + Q = R

Persamaan garis g: $y = mx + c$

Gradien garis g: $m = \dfrac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$

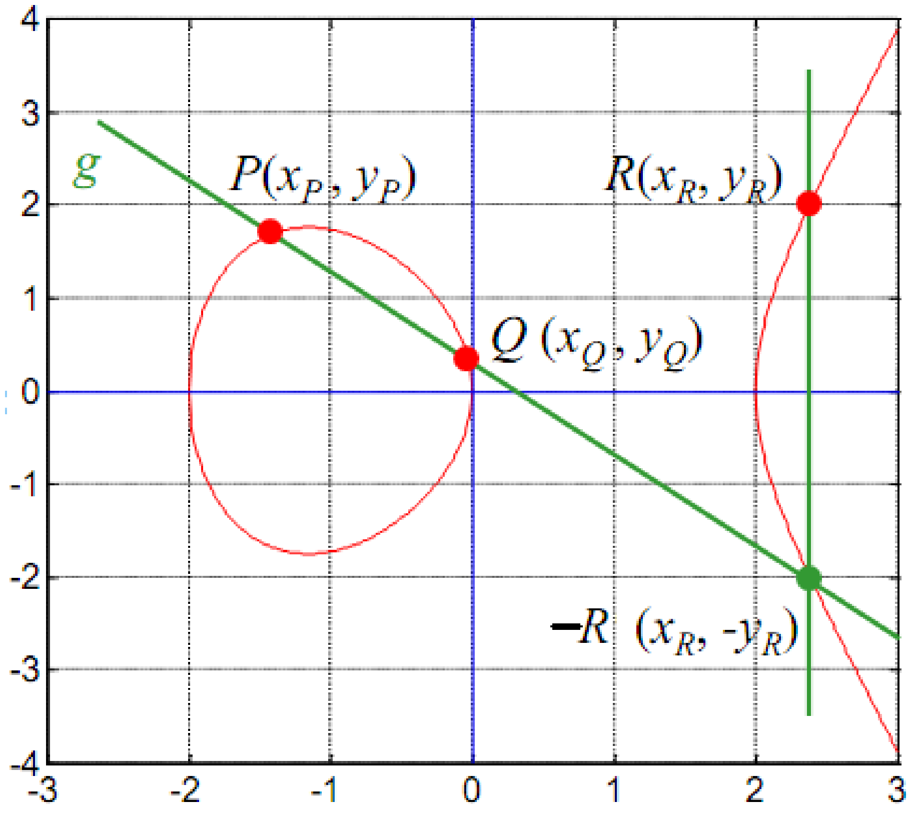
Perpotongan garis g dengan kurva $y^2 = x^3 + ax + b$ adalah:

$(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - x_p - x_q$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Contoh: Kurva eliptik $y^2 = x^3 + 2x + 4$

Misalkan P(2, 4) dan Q(0, 2) dua titik pada kurva

Penjumlahan titik: P + Q = R. Tentukan R!

Langkah-langkah menghitung koordinat R:

- Gradien garis g: $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q) = (4 - 2)/(2 - 0) = 1$
- $x_r = m^2 - x_p - x_q = 1^2 - 2 - 0 = -1$
- $y_r = m(x_p - x_r) - y_p = 1(2 - (-1)) - 4 = -1$
- Jadi koordinat R(-1, -1)
- Periksa apakah R(-1, -1) sebuah titik pada kurva eliptik:

$y^2 = x^3 + 2x + 4 \Leftrightarrow (-1)^2 = (-1)^3 + 2(-1) + 4$

$\Leftrightarrow 1 = -1 - 2 + 4$

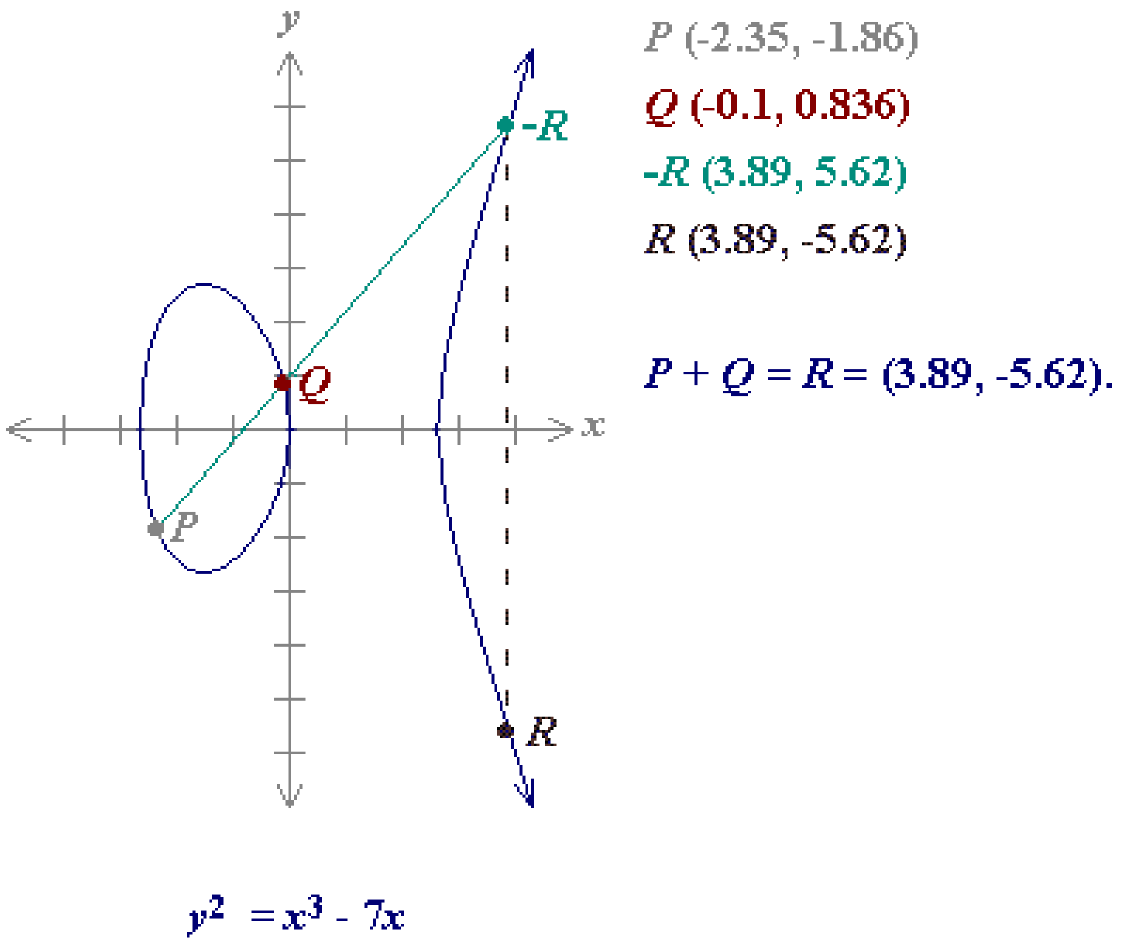
$\Leftrightarrow 1 = 1$ (terbukti R(-1,-1) titik yang terletak pada kurva $y^2 = x^3 + 2x + 4$)

- Contoh lain:

$m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$
$=(-1.86-0.836)/(-2.35-(-0.1))$
$= -2.696 / -2.25 = 1.198$

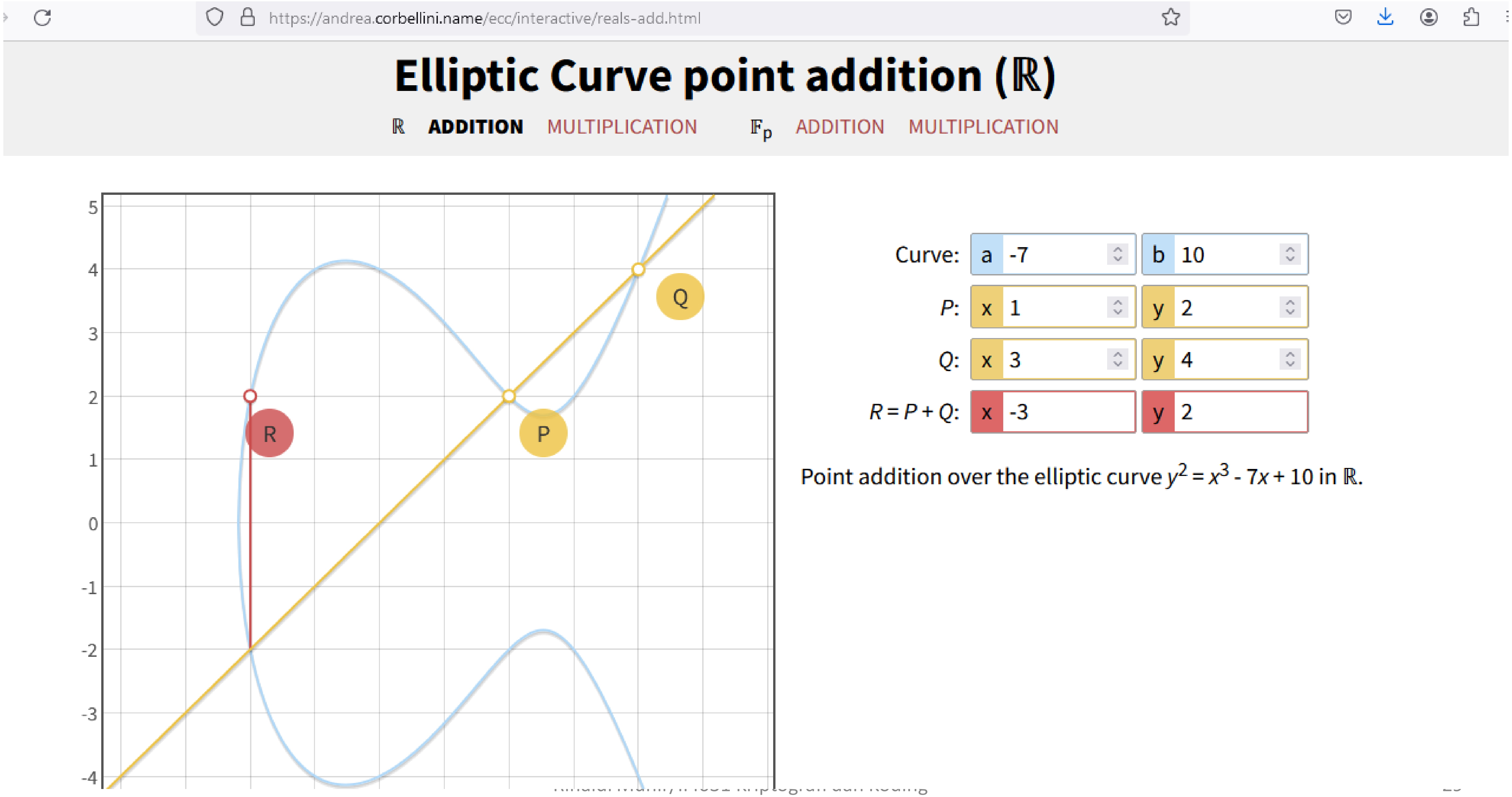
$x_r = m^2 - x_p - x_q$
$= (1.198)^2 - (-2.35) - (-0.1)$
$= 3.89$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$
$= 1.198(-2.35 - 3.89) - (-1.86)$
$= -5.62$



Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

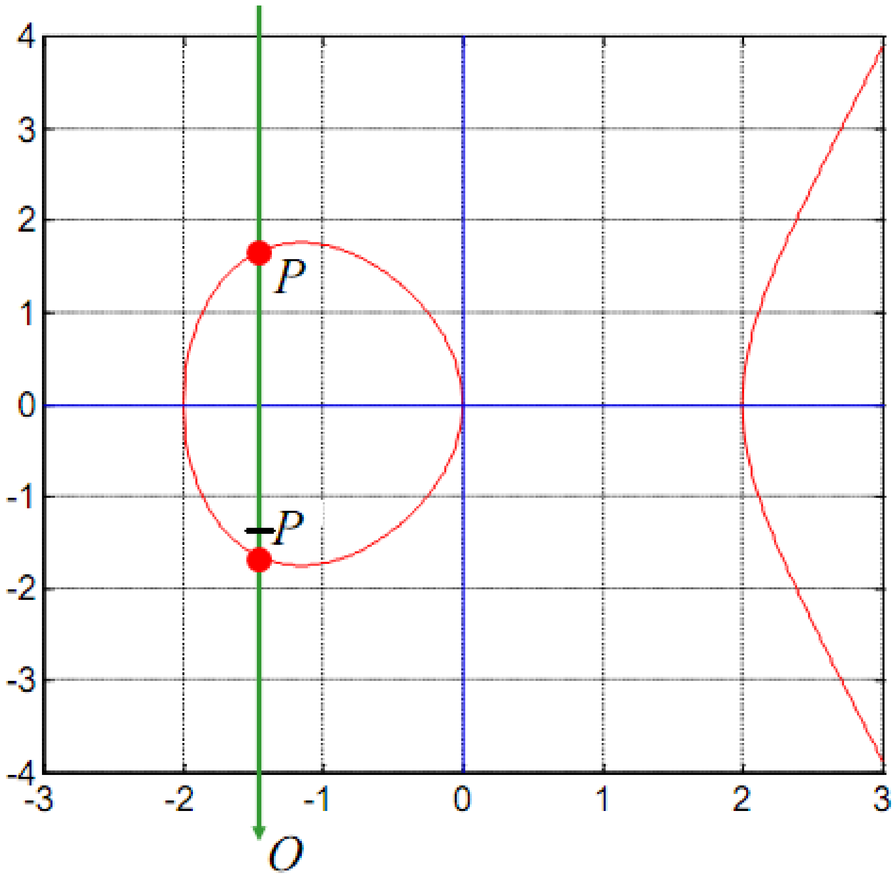
Demo kallkulator ECC online: https://andrea.corbellini.name/ecc/interactive/reals-add.html



(b) P + (-P) = O, di sini O adalah titik di *infinity*

P'= -P adalah elemen invers:
P + P' = P + (-P) = O

O adalah elemen netral:
P + O = O + P = P



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

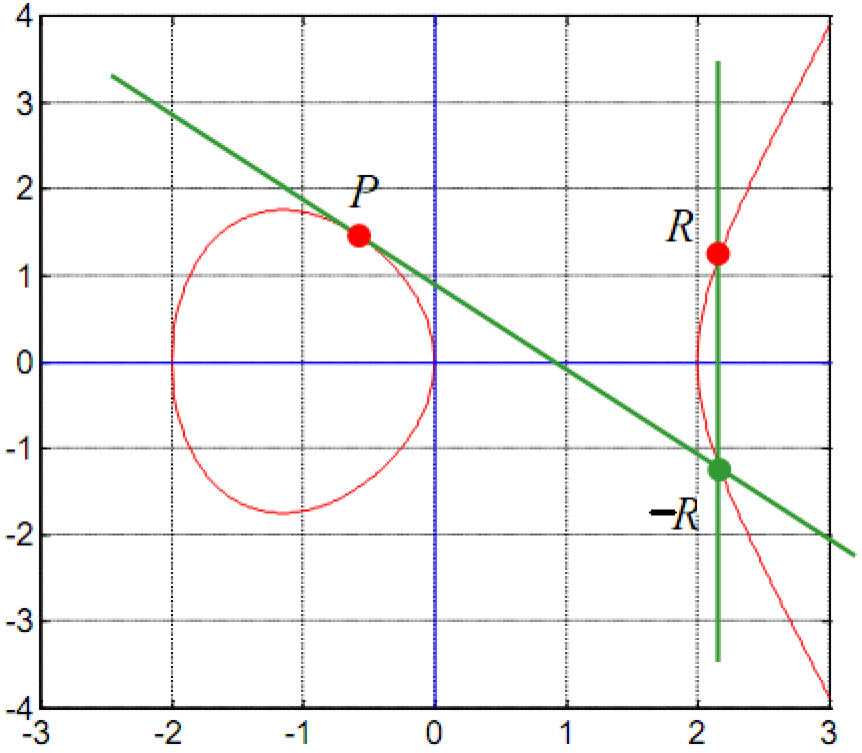
Penggandaan Titik

- Penggandaan titik (*point doubling*): menjumlahkan sebuah titik pada dirinya sendiri

- Penggandaan titik membentuk

  tangen pada titik P(x, y)

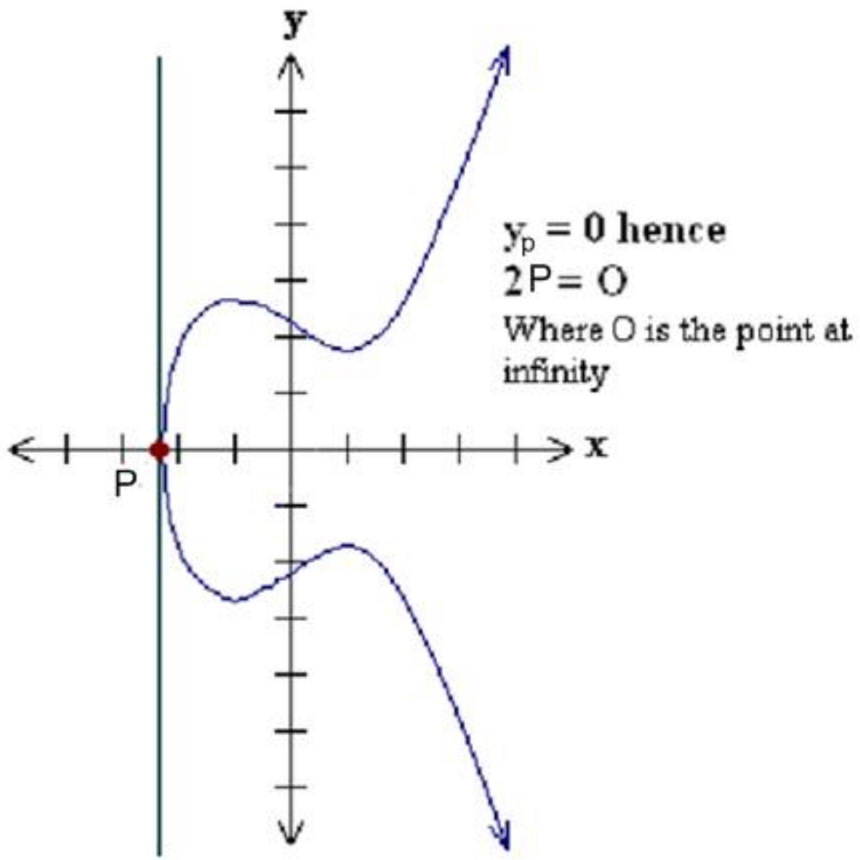
- P + P = 2P = R



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

- Jika ordinat titik P nol, yaitu y_p = nol, maka tangen pada titik tersebut berpotongan pada sebuah titik di *infinity*.

- Di sini, P + P = 2P = O



Sumber gambar: Anoop MS , Elliptic Curve Cryptography, an Implementation Guide

Penjelasan Analitik P + P = 2P = R

Persamaan tangen g: $y = mx + c$

Gradien garis g: $m = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x_p^2 + a}{2y_p}$

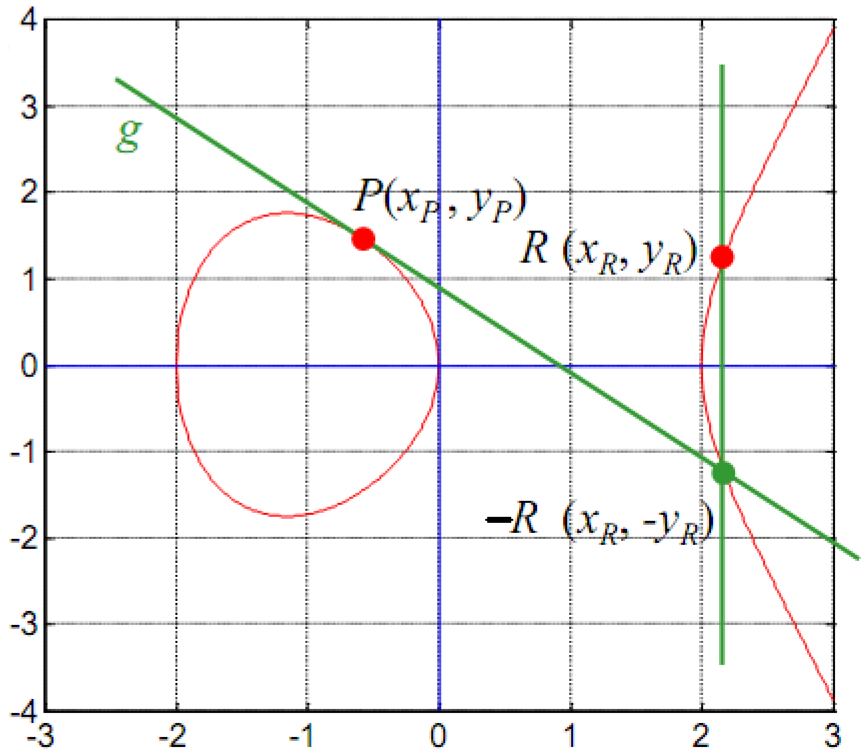
Perpotongan garis g dengan kurva: $(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga 2P = O



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

- Contoh:

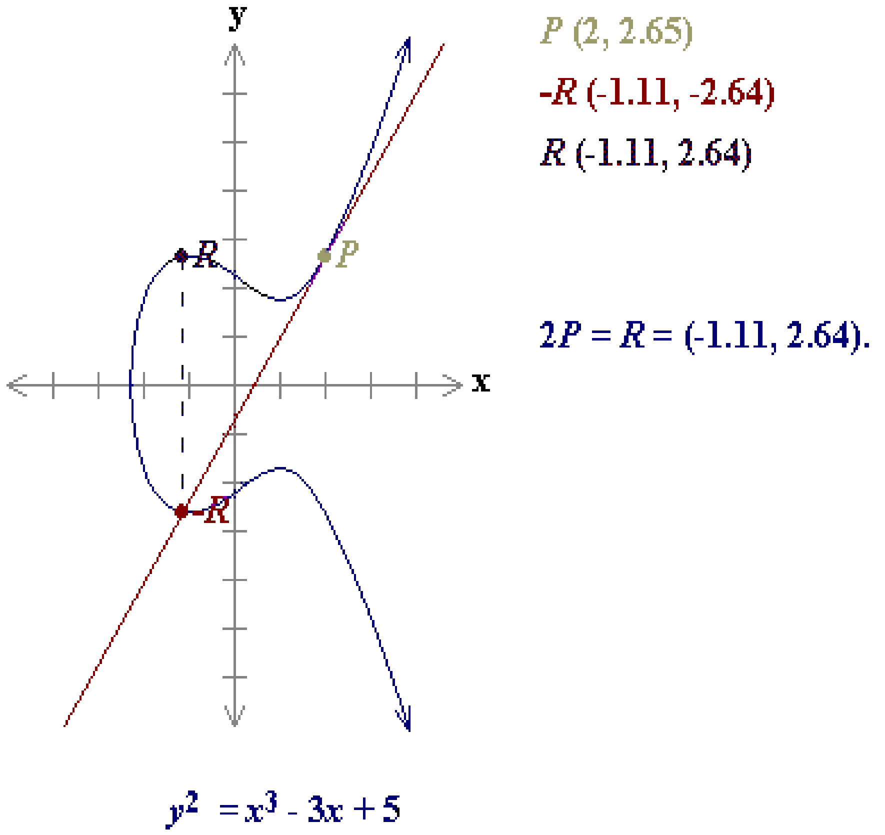
P+P = 2P

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p}$$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$



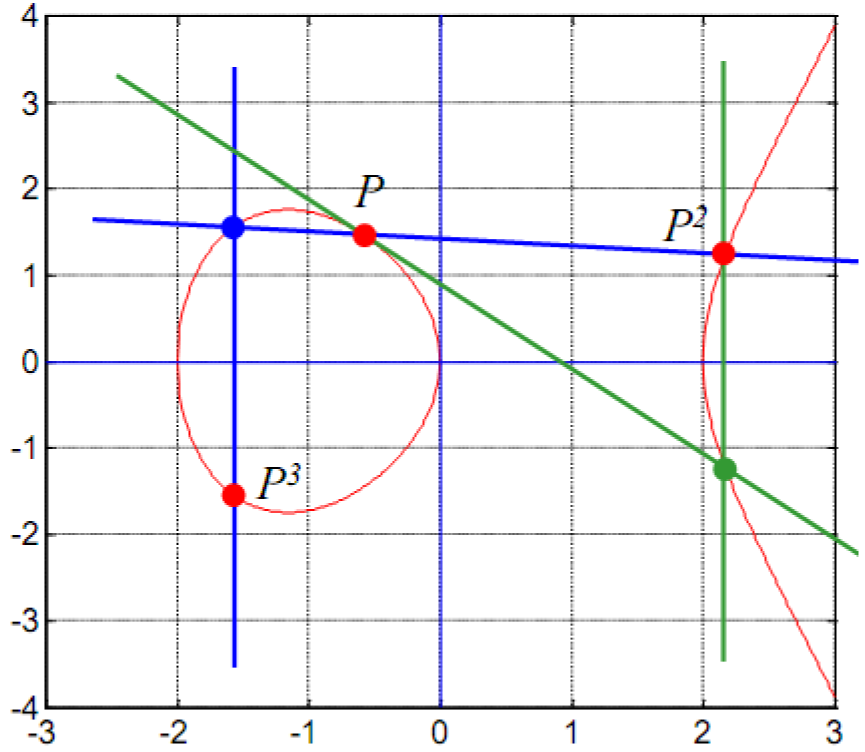
Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** ,
Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Pelelaran Titik

- Pelelaran titik (*point iteration*): menjumlahkan sebuah titik sebanyak k – 1 kali terhadap dirinya sendiri.

- $P^k = kP = P + P + \ldots + P$

- Jika k = 2 → $P^2 = 2P = P + P$



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Jelaslah Kurva Eliptik membentuk Grup <G, +>

Karena:

- Himpunan G: semua titik P(x,y) pada kurva eliptik
- Operasi biner: +
- Semua aksioma terpenuhi sbb:

  1. Closure: semua operasi P + Q berada di dalam G
  2. Asosiatif: P + (Q + R) = (P + Q) + R
  3. Elemen netral adalah O: P + O = O + P = P
  4. Elemen invers adalah -P: P + (-P) = O
  5. Komutatif: P + Q = Q + P (abelian)

Perkalian Titik

- Perkalian titik: $kP = Q$

  Ket: k adalah skalar, P dan Q adalah titik pada kurva eliptik

- Perkalian titik diperoleh dengan perulangan dua operasi dasar kurva eliptik yang sudah dijelaskan:

  1. Penjumlahan titik ($P + Q = R$)

  2. Penggandaan titik ($2P = R$)

- Contoh: $k = 3 \rightarrow 3P = P + P + P$ atau $3P = 2P + P$

  $k = 23 \rightarrow kP = 23P = 2(2(2(2P) + P) + P) + P$

Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem (ECDLP)

- Menghitung kP = Q mudah, tetapi menghitung k jika diketahui P dan Q adalah sulit. Inilah ECDLP yang menjadi dasar ECC.
- ECDLP dirumuskan sebagai berikut:

  Diberikan *P* dan *Q* adalah dua buah titik di kurva eliptik, carilah integer *k* sedemikian sehingga *Q* = *kP*

- Secara komputasi sulit menemukan k, jika k adalah bilangan yang besar. Nilai k adalah logaritma diskrit dari Q dengan basis P. *)
- Pada algoritma ECC, Q adalah kunci publik, k adalah kunci privat, dan P sembarang titik pada kurva eliptik.

Catatan: ingatlah kP = P^k , sehingga Q = kP = P^k, k adalah logaritma diskrit dari Q

Kurva Eliptik pada Galois Field

- Operasi kurva eliptik yang dibahas sebelum ini didefinisikan pada bilangan riil.
- Operasi pada bilangan riil tidak akurat karena mengandung pembulatan
- Pada sisi lain, kriptografi dioperasikan pada ranah bilangan integer.
- Agar kurva eliptik dapat dipakai di dalam kriptografi, maka kurva eliptik didefinisikan pada medan berhingga atau Galois Field, yaitu GF(p) dan GF(2^m).
- Yang dibahas dalam kuliah ini hanya kurva eliptik pada GF(p)

Kurva Eliptik pada GF(p)

- Bentuk umum kurva eliptik pada GF(p) (atau F_p) :

$$\mathbf{y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}}$$

yang dalam hal ini p adalah bilangan prima dan elemen-elemen himpunan di dalam medan galois adalah {0, 1, 2, …, p – 1}

- **Contoh**: Tentukan semua titik P(x,y) pada kurva eliptik

$$y^2 \equiv x^3 + x + 6 \pmod{11}$$

dengan x dan y didefinisikan di dalam GF(11)

Jawab:

$x = 0 \rightarrow y^2 \equiv 6 \pmod{11} \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 1 \rightarrow y^2 \equiv 8 \pmod{11} \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 2 \rightarrow y^2 \equiv 16 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11} \rightarrow y_1 = 4$ dan $y_2 = 7$

$\rightarrow$ titik P(2,4) dan P'(2, 7)

$x = 3 \rightarrow y^2 \equiv 36 \pmod{11} \equiv 3 \pmod{11} \rightarrow y_1 = 5$ dan $y_2 = 6$

$\rightarrow$ titik P(3,5) dan P'(3, 6)

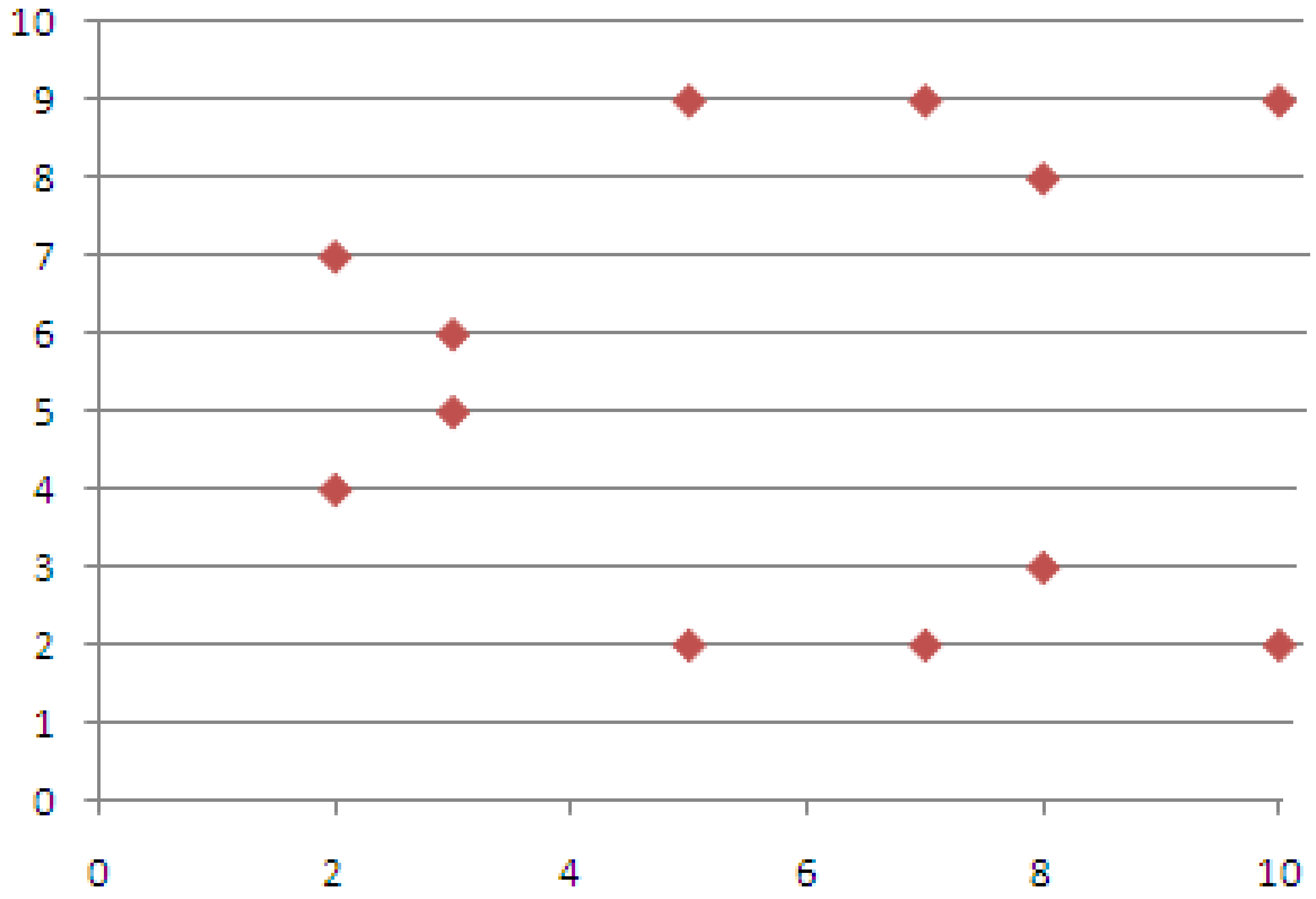
Jika diteruskan untuk x = 4, 5, ..., 10, diperoleh tabel sebagai berikut :

x	y^2	$y_{1,2}$	P(x,y)	P'(x,y)
0	6	-		
1	8	-		
2	5	4,7	(2,4)	(2,7)
3	3	5,6	(3,5)	(3,6)
4	8	-		
5	4	2,9	(5,2)	(5,9)
6	8	-		
7	4	2,9	(7,2)	(7,9)
8	9	3,8	(8,3)	(8,8)
9	7	-		
10	4	2,9	(10,2)	(10,9)

Jadi, titik-titik yang terdapat pada kurva eliptik adalah 12, yaitu: (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (5, 2), (5, 9), (7, 2), (7, 9), (8, 3), (8, 8), (10, 2), (10, 9)

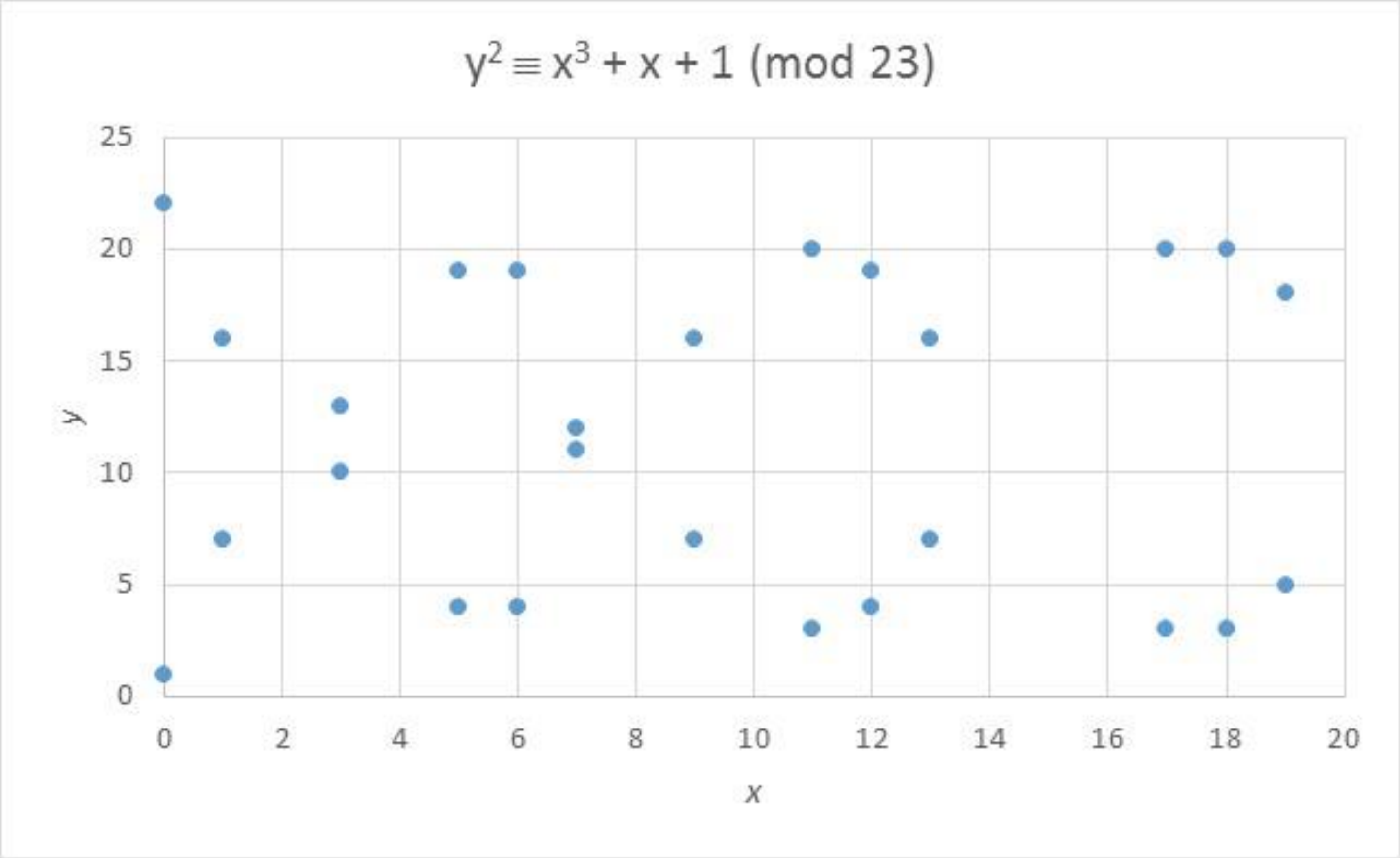
Jika ditambah dengan titik O di infinity, maka titik-titik pada kurva eliptik membentuk grup dengan n = 13 elemen.

Sumber: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography



Sebaran titik di dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \mod 11$ pada GF(11)

- Contoh lain: Kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 + x + 1$ (**mod** 23) memiliki titik-titik di dalam himpunan {(0, 1), (0, 22), (1, 7), (1, 16), (3, 10), (3, 13), (5, 4), (5, 19) , (6, 4), (6, 19), (7, 11), (7, 12), (9, 7), (9, 16), (11, 3), (11, 20), (12, 4), (12, 19), (13, 7), (13, 16), (17, 3), (17, 20), (18, 3), (18, 20), (19, 5), (19, 18)}.



Penjumlahan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Penjumlahan: P + Q = R

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 – x_p – x_q \bmod p$

$y_r = m(x_p – x_r) – y_p \bmod p$

m adalah gradien:

$$m = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \bmod p$$

Pengurangan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Pengurangan: $P – Q = P + (-Q)$, yang dalam hal ini $–Q(x_q, -y_q \pmod p)$.

Penggandaan Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ yang dalam hal ini $y_p \neq 0$.
Penggandaan titik: $2P = R$

Koordinat Titik R:

$x_r \equiv m^2 - 2x_p \pmod p$

$y_r \equiv m(x_p - x_r) - y_p \pmod p$

Yang dalam hal ini,

$$m \equiv \frac{3{x_p}^2 + a}{2y_p} \pmod p$$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga $2P = O$

- **Contoh**: Misalkan P(2, 4) dan Q(5, 9) adalah dua buah titik pada kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 + x + 6$ (mod 11). Tentukan P + Q dan 2P.

Jawab:

(a) P + Q = R

$$m \equiv (9 - 4)/(5 - 2) \pmod{11} = 5/3 \pmod{11} = 5 \cdot 3^{-1} \pmod{11}$$
$$= 5 \cdot 4 \pmod{11} \equiv 9 \pmod{11}$$

P + Q = R, koordinat Titik R:

$$x_r \equiv m^2 - x_p - x_q \pmod{11} \equiv 81 - 2 - 5 \bmod 11 \equiv 8 \pmod{11}$$
$$y_r \equiv m(x_p - x_r) - y_p \pmod{11} \equiv 9(2 - 8) - 4 \bmod 11 \equiv -58 \pmod{11}$$
$$\equiv 8 \pmod{11}$$

Jadi, R(8, 8)

(b) 2P = R

$$m \equiv \frac{3{x_p}^2 + a}{2y_p} \pmod p$$

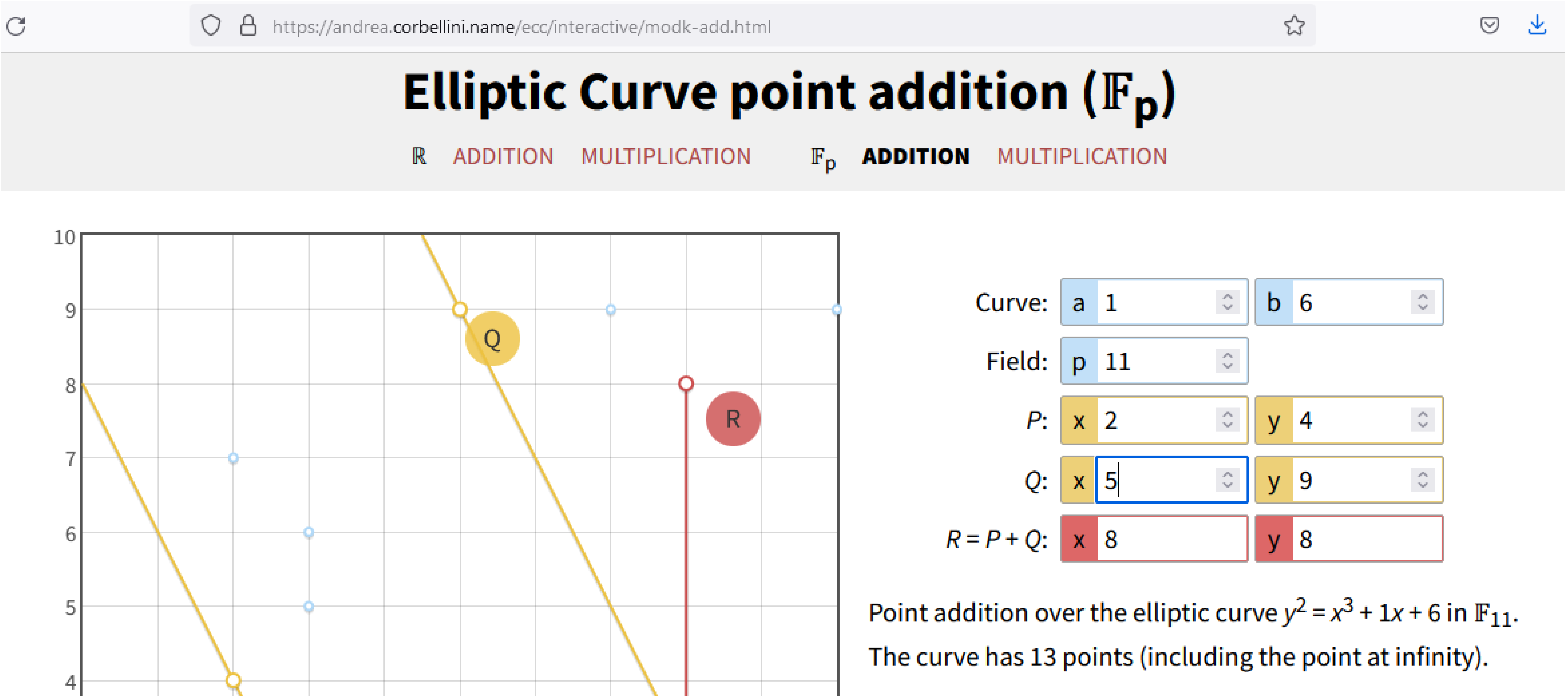
$$m \equiv (3(2)^2 + 1)/8) \pmod{11} \equiv 13/8 \pmod{11}$$
$$\equiv 13 \cdot 8^{-1} \pmod{11}$$
$$\equiv 13 \cdot 7 \pmod{11}$$
$$\equiv 78 \bmod 11 \equiv 3 \pmod{11}$$

Koordinat R:

$$x_r \equiv m^2 - 2x_p \pmod p \equiv 3^2 - 2 \cdot 2 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$$
$$y_r \equiv m(x_p - x_r) - y_p \pmod p \equiv 3(2 - 5) - 4 \pmod{11}$$
$$\equiv -13 \pmod{11} \equiv 9 \pmod{11}$$

Jadi, R(5, 9)

Demo kallkulator ECC online: https://andrea.corbellini.name/ecc/interactive/reals-add.html



- Nilai kP untuk k = 2, 3, … diperlihatkan pada tabel:

k	kP
1	(2,4)
2	(5,9)
3	(8,8)
4	(10,9)
5	(3,5)
6	(7,2)
7	(7,9)
8	(3,6)
9	(10,2)
10	(8,3)
11	(5,2)
12	(2,7)
13	O

Jika diketahui P, maka kita bisa menghitung

$Q = kP$

Jika persoalannya dibalik sbb:

Diberikan P dan Q, maka sangat sukar menghitung k sedemikian sehingga Q = kP

$\Downarrow$

ECDLP

Elliptic Curve Cryptography (ECC) *)

- ECC adalah sistem kriptografi kunci-publik, sejenis dengan RSA, Rabin, ElGamal, D-H, dll.

- Setiap pengguna memiliki **kunci publik dan kunci privat**
  - Kunci publik untuk enkripsi atau untuk verifikasi tanda tangan digital
  - Kunci privat untuk dekripsi atau untuk menghasilkan tanda tangan digital

- Kurva eliptik digunakan sebagai perluasan sistem kriptografi kunci-publik yang lain:

  1. Elliptic Curve Elgamal (ECEG)
  2. Elliptic Curve Digital Signature (ECDSA)
  3. Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Penggunaan Kurva Eliptik di dalam Kriptografi

- Bagian inti dari sistem kriptografi kunci-publik yang melibatkan kurva eliptik adalah **grup eliptik** (himpunan titik-titik pada kurva eliptik dan sebuah operasi biner +).

- Operasi matematika yang mendasari:
  - Jika RSA mempunyai operasi perpangkatan sebagai operasi matematika yang mendasarinya, maka
  - ECC memiliki operasi perkalian titik (kP)

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Dua pihak yang berkomunikasi menyepakati parameter data sebagai berikut:

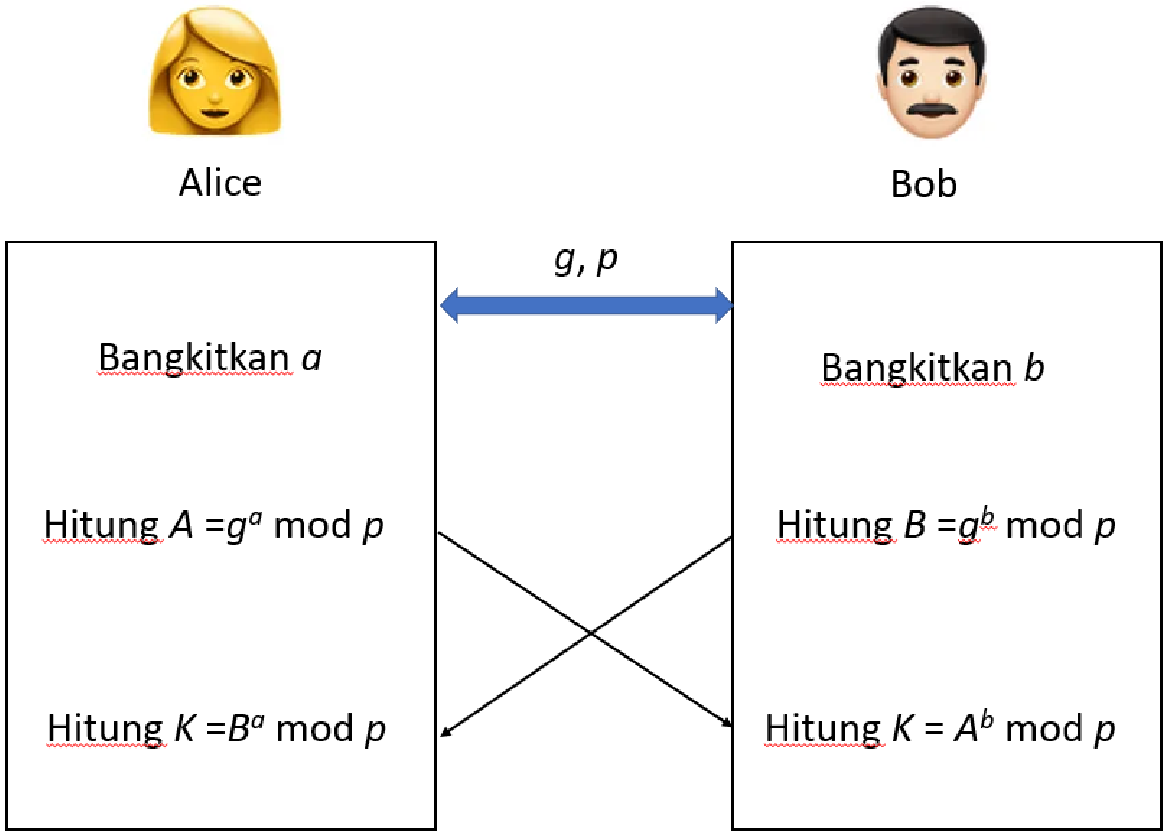
  1. Persamaan kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$
     - Nilai a dan b
     - Bilangan prima p
  2. Grup eliptik yang dihitung dari persamaan kurva eliptik
  3. Titik basis (*base point*) B (x_B, y_B) , dipilih dari grup eliptik untuk operasi kriptografi.

- Setiap pengguna membangkitkan pasangan kunci publik dan kunci privat
  - Kunci privat = integer x, dipilih dari selang [1, p – 1]
  - Kunci publik = titik Q, adalah hasil kali antara x dan titik basis B: Q = x· B

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

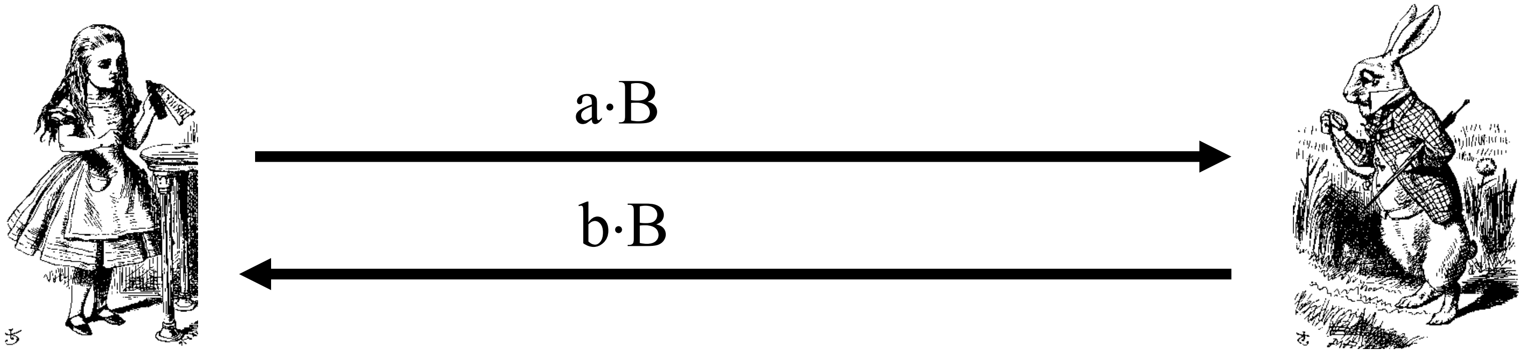
Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

Ingatlah kembali diagram pertukaran kunci Diffie-Hellman:



Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

- **Public:** Kurva eliptik dan titik B(x,y) pada kurva
- **Secret:** Integer milik Alice, a, dan integer milik Bob, b



Alice, A   Bob, B

- Alice menghitung K = a· (b.B)
- Bob menghitung K = b·(a·B)
- Hasil perhitungan akan sama karena ab = ba

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Algoritma Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

- Alice dan Bob ingin berbagi sebuah kunci rahasia K yang sama.
  - Alice dan Bob menyepakati kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b \mod p$ dan titik B pada kurva
  - Alice dan Bob menghitung kunci publik dan kunci privat masing-masing.
    - Alice
      - Kunci privat = a
      - Kunci publik = $P_A = a \cdot B$
    - Bob
      - Kunci privat = b
      - Kunci publik = $P_B = b \cdot B$

  - Alice dan Bob saling mengirim kunci publik masing-masing.
  - Keduanya melakukan perkalian kunci privatnya dengan kunci publik mitranya untuk mendapatkan kunci rahasia yang mereka bagi
    - Alice → $K_{AB} = a \cdot P_B = a \cdot (b \cdot B)$
    - Bob → $K_{AB} = b \cdot P_A = b \cdot (a \cdot B)$
    - **Kunci rahasia = K_{AB} = abB**

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Contoh *): Misalkan kurva eliptik yang dipilih adalah $y^2 = x^3 + 2x + 1 \bmod 5$. Himpunan titik-titik pada kurva eliptik adalah {(0, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (1, 2), (0, 4)}. Alice dan Bob menyepakati titik B(0, 1) sebagai basis.

1. Alice memilih a = 2, lalu menghitung kunci publiknya:

   $P_A = a \cdot B = 2B = B + B = (1, 3)$ → misalkan titik Q

2. Bob memilih b = 3, lalu menghitung kunci publiknya:

   $P_B = b \cdot B = 3B = B + B + B = 2B + B = (3, 3)$ → misalkan titik R

3. Alice mengirimkan P_A kepada Bob, Bob mengirimkan P_B kepada Alice.
4. Alice menghitung kunci rahasia sbb:

   $K_A = a \cdot P_B = 2R = R + R = (0, 4)$

5. Bob menghitung kunci rahasia sbb:

   $K_B = b \cdot P_A = 3Q = Q + Q + Q = (0, 4)$

Jadi, sekarang Alice dan Bob sudah berbagi kunci rahasia yang sama, yaitu (0, 4)

*) Sumber bahan: Nana Juhana, Implementasi Elliptic Curve Cryptography (ECC) pada proses Pertukaran Kunci Diffie-Hellman dan Skema Enkripsi El Gamal

Elliptic Curve Elgamal (ECEG)

- *Elliptic Curve Elgamal*: sistem kriptografi kurva eliptik yang diadopsi dari algoritma El Gamal.
- Misalkan Alice ingin mengirim Bob pesan M yang dienkripsi.
    - Baik Alice dan Bob menyepakati kurva elelitik dan titik basis B.
    - Alice dan Bob membuat kunci privat/kunci publik.
        - Alice
            - Kunci privat = a
            - Kunci publik = $P_A = a \cdot B$
        - Bob
            - Kunci privat = b
            - Kunci publik = $P_B = b \cdot B$
    - Alice mengambil plainteks, M, lalu mengkodekannya menjadi sebuah titik, P_M, pada kurva eliptik

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Alice memilih bilangan acak k yang harus terletak di dalam selang [1, p-1]
- Cipherteks dari P_M adalah pasangan titik
  - $P_C = [\ (kB), (P_M + kP_B)\ ]$

- Untuk mendekripsi, Bob mula-mula menghitung hasil kali titik pertama dari P_C (yaitu **kB**) dengan kunci privatnya, **b**
  - $b \cdot (kB)$
- Bob kemudian mengurangkan titik kedua dari P_C dengan hasil kali di atas
  - $(P_M + kP_B) - [b \cdot (kB)] = P_M + k \cdot (bB) - b \cdot (kB) = P_M$
- Bob kemudian men-*decode* P_M untuk memperoleh pesan M

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Perbandingan Elgamal dengan Elliptic Curve Elgamal

- Cipherteks pada EC-Elgamal adalah pasangan titik
  - P_C = [(kB), (P_M + kP_B)]   (ket: P_b = kunci publik Bob)
- Cipherteks pada Elgamal juga pasangan nilai:
  - C = (g^k mod p, $my_B{}^k$ mod p)   (ket: y_b = kunci publik Bob)

- Pada EC_Elgamal, Bob mengurangkan titik kedua dari P_C dengan hasil kali **b · (kB)**
  - $(P_M + kP_B) – [b(kB)] = P_M + k(bB) – b(kB) = P_M$
- Pada El Gamal, Bob membagi nilai kedua dengan nilai pertama yang dipangkatkan dengan kunci privat Bob
  - $my_B{}^k / (g^k)^b = mg^{k*b} / g^{k*b} = m$

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay, Elliptic Curve Cryptography ,** Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Encoding Pesan menjadi Titik di dalam Kurva

- Pesan yang akan dienkripsi dengan ECC harus dikonversi (*encoding*) menjadi titik di dalam kurva eliptik.
- Metode yang sederhana adalah memetakan setiap karakter ASCII dengan setiap titik pada kurva eliptik.
- Untuk 256 karakter ASCII, maka dibutuhkan kurva eliptik yang berisi minimal 256 titik.
- Misalkan pesan M = ‘ENCRYPT’, yang dalam nilai ASCII adalah ‘69’ ‘78’, ‘67’, ‘82’, ‘89’, ‘80’, ‘84’. Setiap nilai ini dipetakan ke sebuah titik pada kurva eliptik.
- Namun metode ini kurang aman.

- Metode kedua adalah dengan metode Kolbitz. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pilih sebuah kurva eliptik **$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$** yang mengandung *N* buah titik.
2. Misalkan karakter-karakter penyusun pesan adalah angka 0, 1, 2, ..., 9 dan huruf A, B, C, … Z yang dikodekan menjadi 10, 11, ..., 35.
3. Kodekan setiap karakater di dalam pesan menjadi nilai *m* di antara 0 dan 35.
4. Pilih sebuah bilangan bulat *k* sebagai parameter basis (disepakati kedua pihak).
5. Untuk setiap nilai *mk*, nyatakan $x = mk + 1$, sulihkan x ke dalam **$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$** lalu tentukan nilai *y* yang memenuhi.
6. Jika tidak ada nilai y yang memenuhi, coba untuk $x = mk + 2$, $x = mk + 3$, dst, sampai **$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$** dapat dipecahkan.
7. Pada proses *decoding*, untuk titik (x, y), tentukan nilai *m* terbesar tetapi lebih kecil dari $(x – 1)/k$. Kodekan titik (x, y) menjadi symbol *m*.

Contoh: Misalkan $y^2 \equiv x^3 - x + 188 \pmod{751}$. Kurva eliptik ini memiliki N = 727 buah titik.

- Misalkan karakter yang akan dikodekan adalah huruf 'B', yang dikodekan menjadi nilai 11.
- Pilih k = 20, maka $x = mk + 1 = (11)(20) + 1 = 221$. Sulihkan x = 221 ke dalam kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 - x + 188 \pmod{751} \equiv 456 \pmod{751}$. Tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk $x = mk + 2 = (11)(20) + 2 = 222$. Sulihkan x = 222 ke dalam kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 - x + 188 \pmod{751}$. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 3 = (11)(20) + 3 = 223$. Sulihkan x = 223 ke dalam kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 - x + 188 \pmod{751}$. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 4 = (11)(20) + 4 = 224$. Sulihkan x = 224 ke dalam kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 - x + 188 \pmod{751}$. Diperoleh y = 248. Jadi, karakter 'B' dikodekan menjadi titik (224, 248) pada kurva eliptik.
- Pada proses *decoding*, hitung $m = \lfloor (x - 1)/k \rfloor = \lfloor (224 - 1)/20 \rfloor = \lfloor 11.15 \rfloor = 11$. Jadi pesan semula adalah huruf 'B'.

Keamanan ECC

- Untuk mengenkripsi kunci AES-128 dengan algoritma kriptografi kunci public, maka:
  - Ukuran kunci RSA: 3072 bit
  - Ukuran kunci ECC cuku 256 bit saja

- Bagaimana cara meningkatkan keamanan RSA?
  - Tingkatkan ukuran kunci
  - **Tidak Praktis?**

- Dengan ECC, pertambahan ukuran kunci tidak signifikan dibandingkan RSA

NIST guidelines for public key sizes for AES

ECC KEY SIZE (Bits)	RSA KEY SIZE (Bits)	KEY SIZE RATIO	AES KEY SIZE (Bits)
163	1024	1 : 6	
256	3072	1 : 12	128
384	7680	1 : 20	192
512	15 360	1 : 30	256

Supplied by NIST to ANSI X9F1

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Aplikasi ECC

- Banyak piranti yang berukuran kecil dan memiliki keterbatasan memori dan kemampuan pemrosesan.

- Di mana kita dapat menerapkan ECC?
  - Piranti komunikasi nirkabel
  - *Smart cards*
  - Web server yang membutuhkan penangangan banyak sesi enkripsi
  - **Sembarang aplikasi yang membutuhkan keamanan tetapi memiliki kekurangan dalam *power*, *storage* and kemampuan komputasi adalah potensial memerlukan ECC**

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Keuntungan ECC

- Keuntungan yang sama dengan sistem kriptografi lain: *confidentiality*, *integrity*, *authentication* and *non-repudiation*, tetapi…

- Panjang kuncinya lebih pendek
  - Mempercepat proses *encryption*, *decryption*, dan *signature verification*
  - Penghematan *storage* dan *bandwidth*

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

TAMAT