

11 - Transformasi Citra

IF4073 Pemrosesan Citra Digital

Oleh: Dr. Ir. Rinaldi



Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2025

Ranah Frekuensi

- Citra dapat dioperasikan dalam ranah spasial maupun dalam ranah frekuensi.
- Dalam ranah spasial artinya memanipulasi langsung nilai-nilai *pixel*.
- Karena citra adalah sinyal dari gelombang cahaya, maka citra juga dapat dinyatakan dalam ranah frekuensi.
- Mengoperasikan citra dalam ranah frekuensi artinya memanipulasi nilai-nilai frekuensi yang merepresentasikan sinyal.
- Beberapa metode penapisan citra untuk menghilangkan derau hanya berhasil dilakukan dalam ranah frekuensi ketimbang dalam ranah spasial.



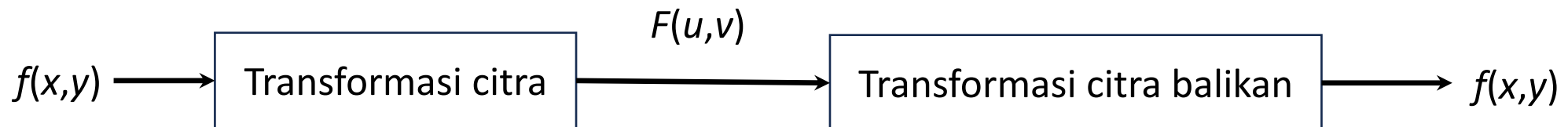
Citra dengan derau periodik. Derau tidak dapat dihilangkan dengan penapis dalam ranah spasial



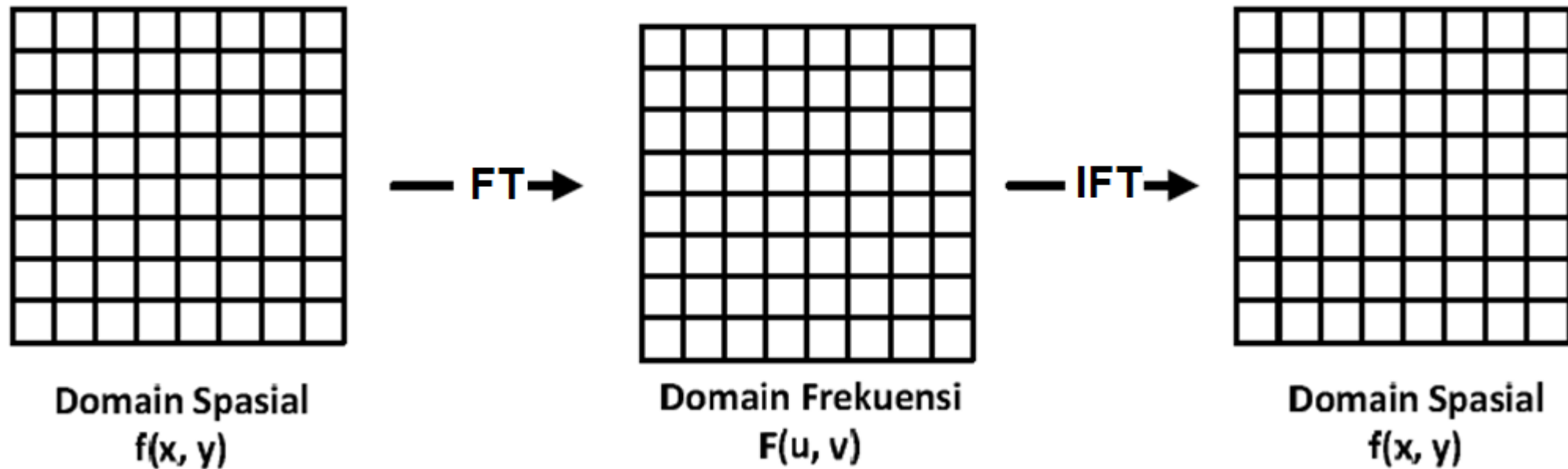
Citra dengan derau periodik lainnya

- Selain itu, konvolusi dalam ranah spasial memakan waktu komputasi yang besar.
- Jika citra berukuran $N \times N$ dan *kernel* berukuran $m \times m$, maka jumlah perkalian di dalam operasi konvolusi adalah dalam orde N^2m^2 .
- Sebagai contoh jika citra berukuran 512×512 dan kernel berukuran 16×16 , maka ada sekitar 32 juta perkalian yang dibutuhkan.
- Ini jelas tidak cocok untuk proses yang *real time* tanpa perangkat keras yang *dedicated*.

- Untuk mengoperasikan citra dalam ranah frekuensi, maka citra dalam ranah spasial, $f(x,y)$, harus ditransformasikan menjadi citra dalam ranah frekuensi, $F(u,v)$. Operasi citra dilakukan dengan memanipulasi nilai-nilai $F(u,v)$
- Setelah selesai dioperasikan dalam ranah frekuensi, maka citra dalam ranah frekuensi, $F(u,v)$ dikembalikan menjadi citra dalam ranah spasial, $f(x,y)$.
- Kedua transformasi ini dinamakan transformasi citra (*image transform*) dan transformasi citra balikan (*inverse image transform*)



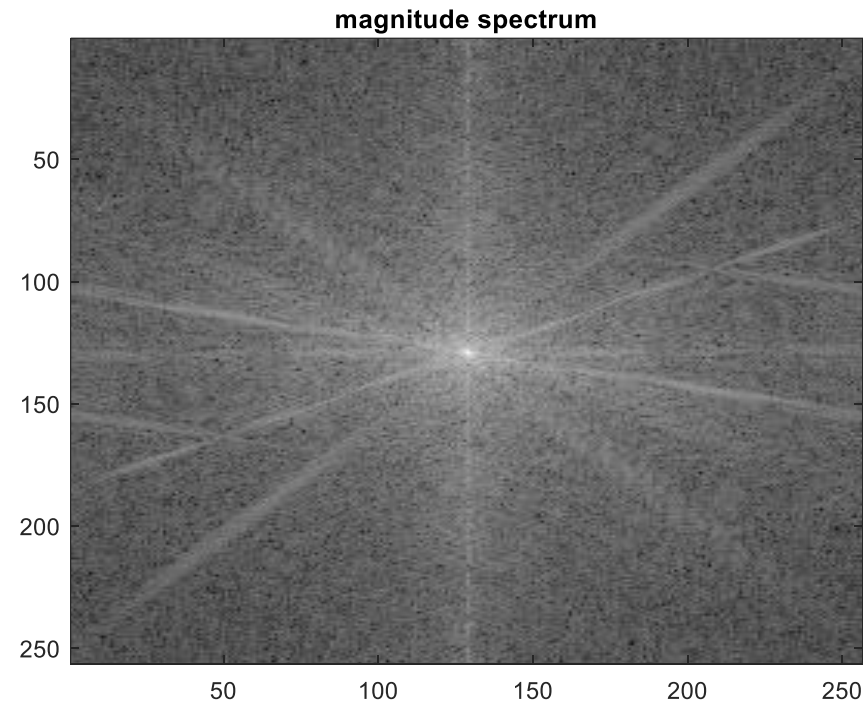
- Salah satu metode transformasi citra adalah *Fourier Transform* (FT) dan transformasi balikkannya adalah *Invers Fourier Transform* (IFT).
- Keduanya akan dibahas nanti



- Contoh transformasi citra dari ranah spasial ke ranah frekuensi dan sebaliknya



$f(x,y)$



$F(u,v)$



$f(x,y)$

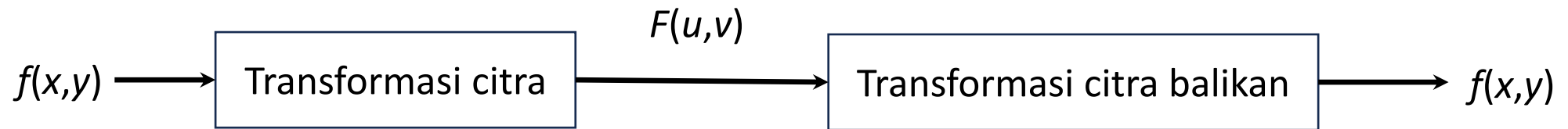
- Operasi konvolusi dalam ranah frekuensi cukup dilakukan dengan melakukan perkalian antara citra $F(u,v)$ dengan kernel $G(u,v)$, yaitu perkalian elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua buah matriks.

$$h(x, y) = f(x, y) * g(x, y) \leftrightarrow H(u, v) = F(u, v) G(u, v)$$

- Dua transformasi citra yang banyak digunakan di dalam pengolahan citra adalah:
 1. Transformasi Fourier (*Fourier Transform*)
 2. Transformasi Cosine (*Cosine Transform*)

Transformasi Fourier

- Transformasi Fourier adalah metode untuk mengubah fungsi dari ranah waktu/spasial ke dalam ranah frekuensi.
- Ranah waktu misalnya gelombang bunyi/suara (1-D). Ranah spasial misalnya citra (2-D).
- Untuk pengubahan sebaliknya, dari ranah frekuensi ke ranah waktu/spasial, digunakan Transformasi Fourier Balikan.



Transformasi Fourier

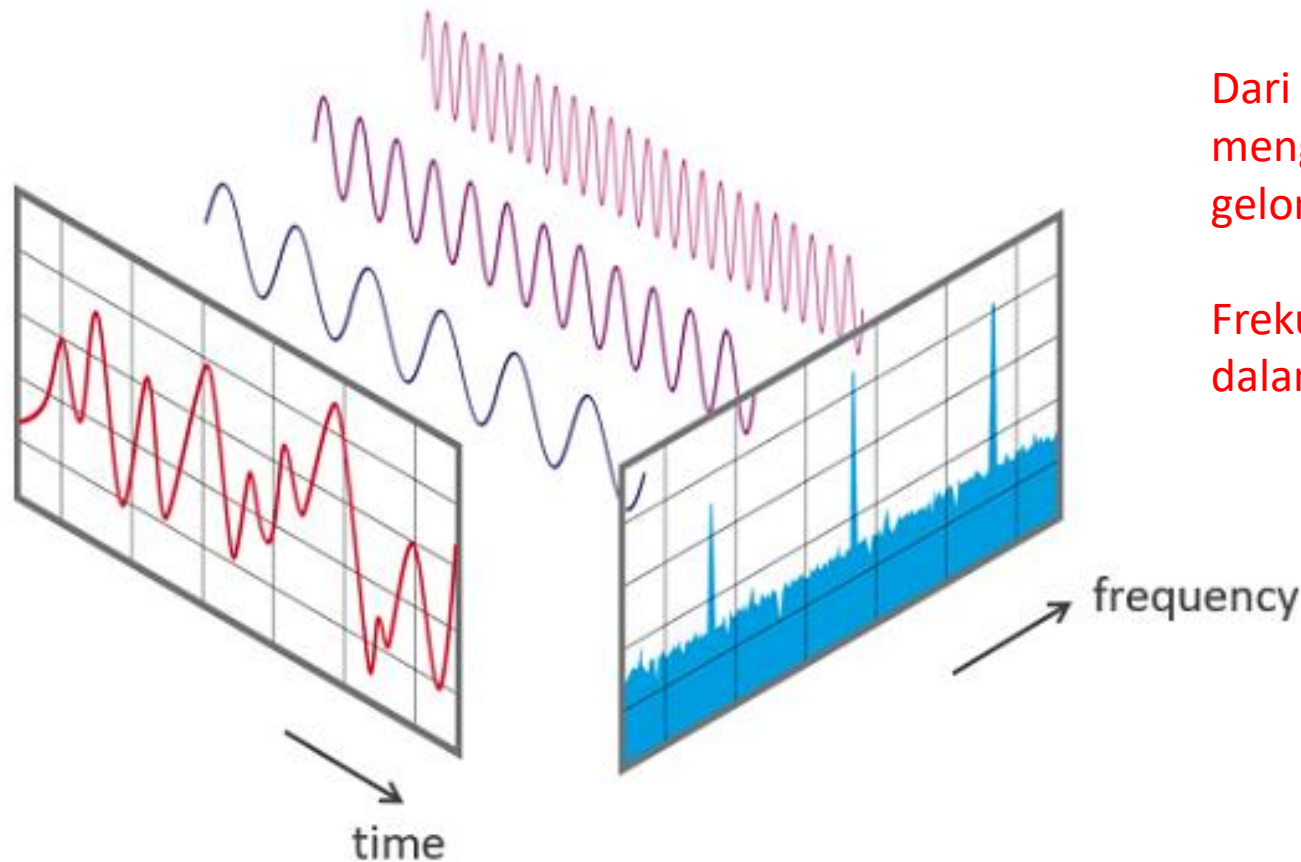


Jean-Baptiste Joseph Fourier ([/'fʊəriɪ, -iər/](#);^[1] French: [\[fʊʁiɛ\]](#); 21 March 1768 – 16 May 1830) was a [French mathematician](#) and [physicist](#) born in [Auxerre](#) and best known for initiating the investigation of [Fourier series](#), which eventually developed into [Fourier analysis](#) and [harmonic analysis](#), and their applications to problems of [heat transfer](#) and [vibrations](#). The [Fourier transform](#) and [Fourier's law of conduction](#) are also named in his honour. Fourier is also generally credited with the discovery of the [greenhouse effect](#).^[2]

Sumber: Wikipedia

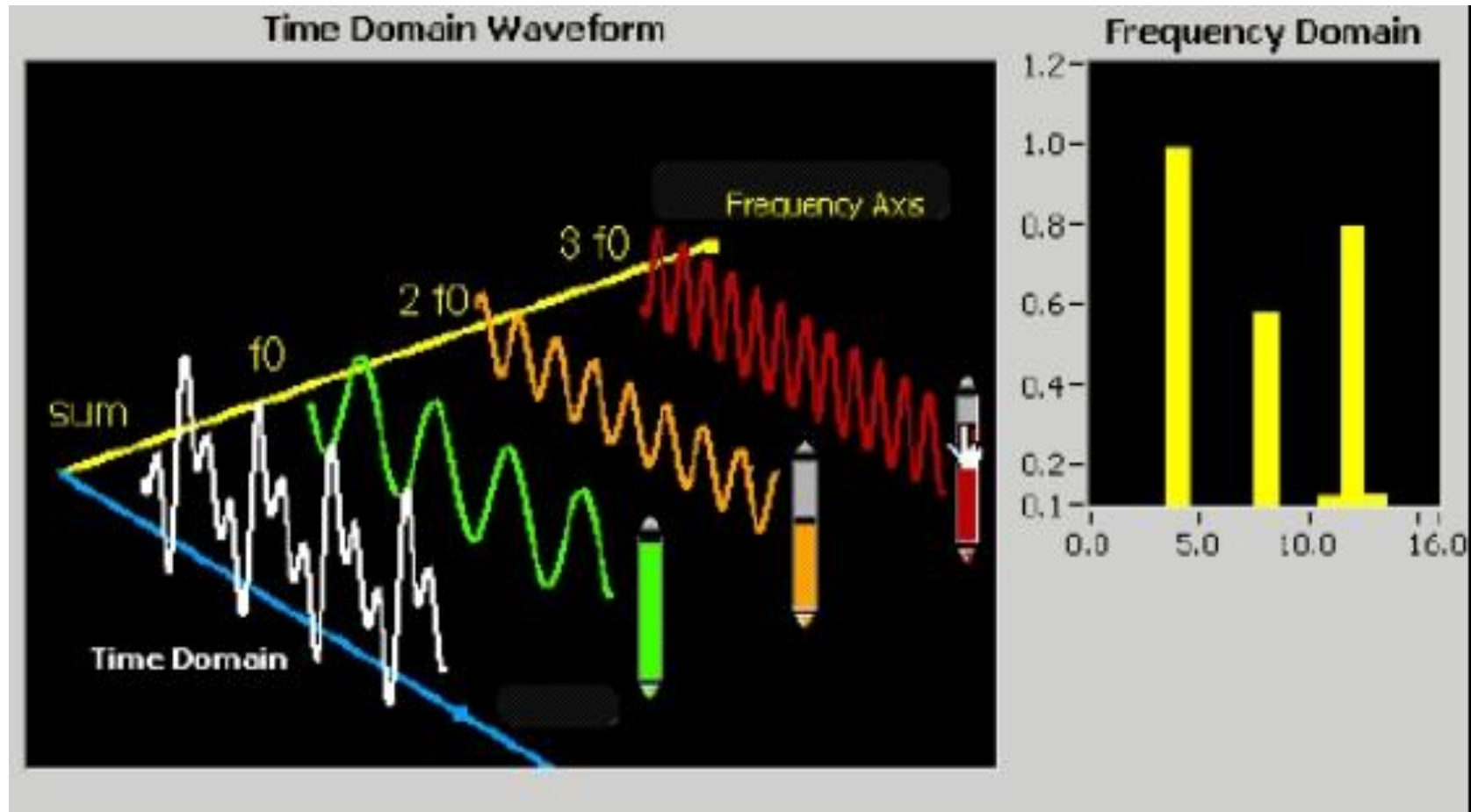
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

- Intisari dari Transformasi Fourier adalah menguraikan sinyal atau gelombang menjadi sejumlah sinusoida dari berbagai frekuensi, yang jumlahnya ekuivalen dengan gelombang asal.
- Contoh: sebuah gelombang dalam ranah waktu dibagi menjadi tiga buah gelombang sinusoida dengan masing-masing frekuensi berbeda.



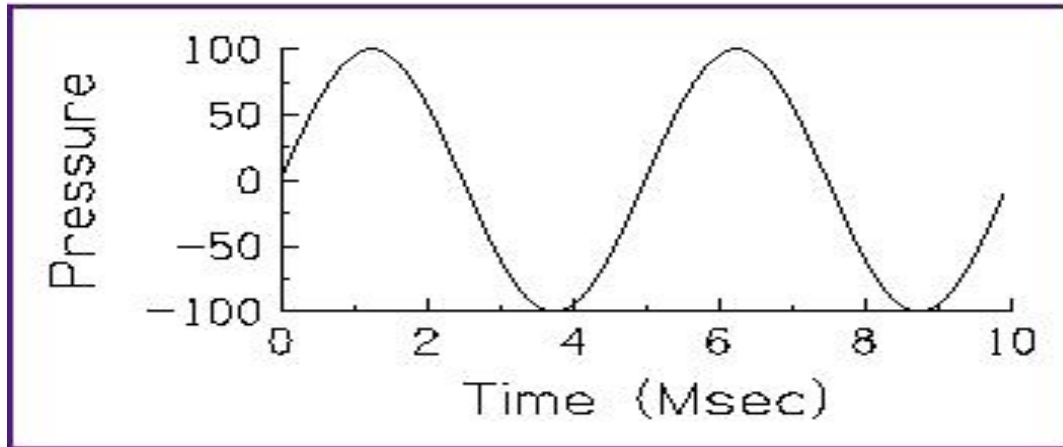
Dari Pelajaran fisika kita mengetahui bahwa setiap gelombang memiliki frekuensi.

Frekuensi = banyak gelombang dalam satu detik

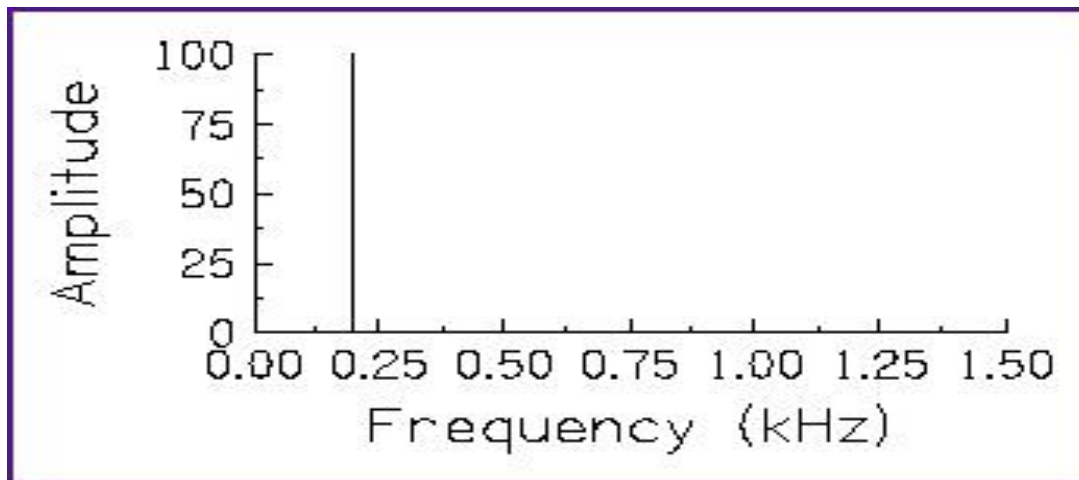


Sumber: Njegos Nincic, *Fourier Transform and Applications*

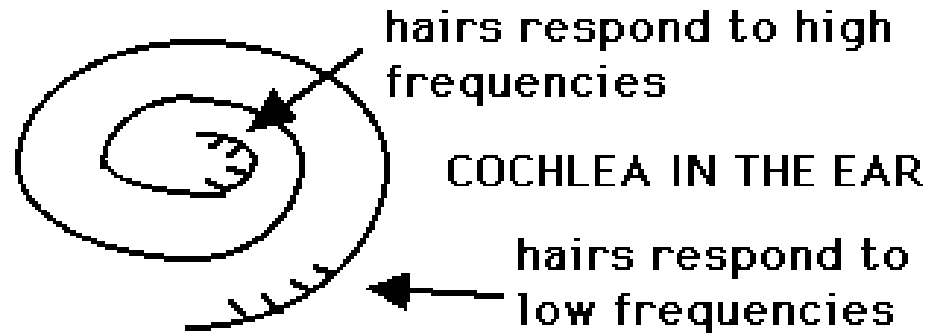
- Ranah Waktu (*Time Domain*) vs Ranah Frekuensi (*Frequency domain*)
 - Contoh: tekanan udara (sebagai fungsi bunyi) berubah terhadap waktu



Amplitudo = 100
Frekuensi = banyaknya gelombang
dalam satu detik = 200 Hz

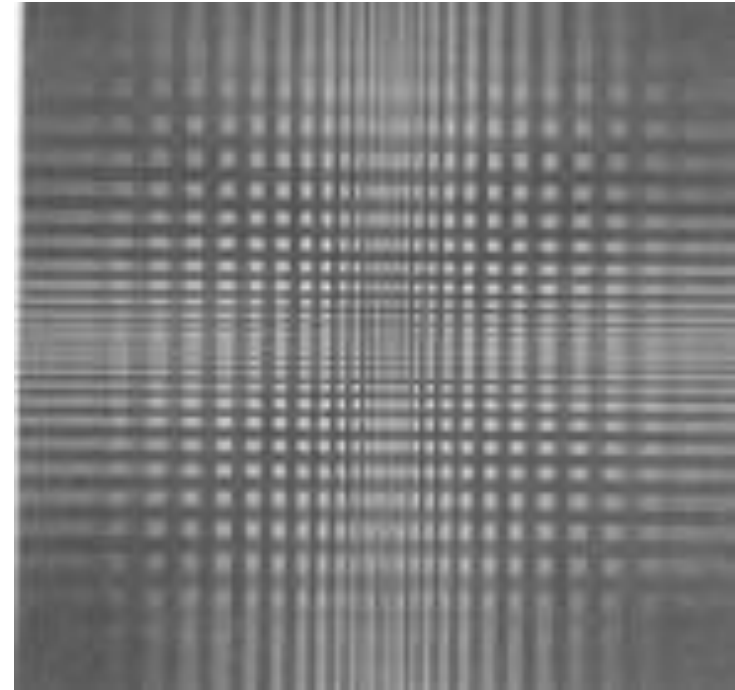


- Contoh:
 - Telinga manusia tidak mendengar bunyi seperti gelombang berosilasi, tetapi nada dengan frekuensi tertentu



- Seringkali lebih mudah menganalisis sinyal dalam ranah frekuensi daripada ranah waktu/spasial

- Di dalam pengolahan citra, umumnya citra disajikan dalam ranah spasial, $f(x,y)$.
- Citra juga dapat disajikan dalam *ranah frekuensi* $F(u,v)$, yaitu ruang di mana setiap nilai pada posisi citra F menyatakan besaran bahwa nilai intensitas citra berubah pada jarak tertentu.
- Contoh: jika frekuensi pada nilai *pixel* 20 adalah 0.1, artinya 1 periode setiap 10 pixel. Intensitas pixel berubah dari gelap ke terang dan kembali ke gelap setelah 10 pixel.

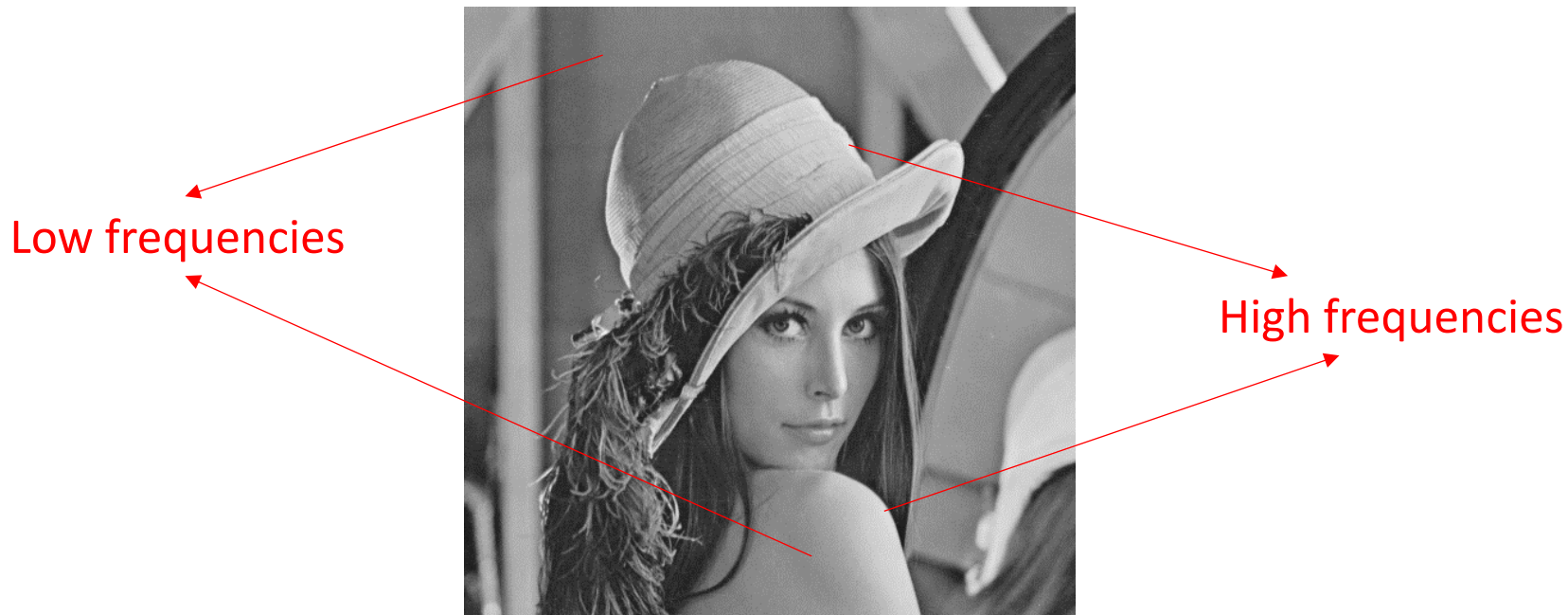


Gambar di atas adalah cira dalam ranah frekuensi:

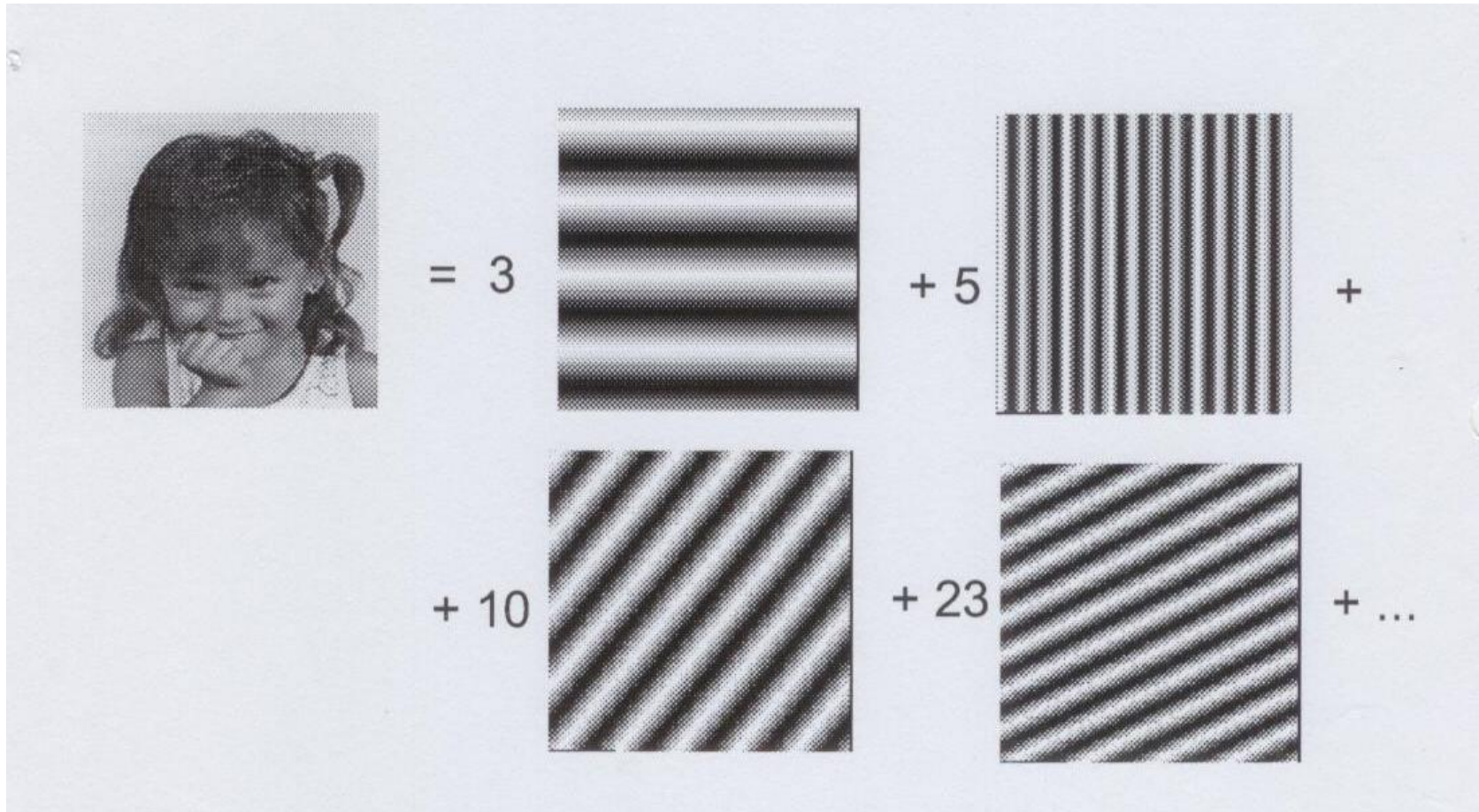
- Frekuensi tinggi:
Sekitar pusat
- Frekuensi rendah:
Sekitar titik sudut

Di dalam citra,

- Frekuensi rendah bersesuaian dengan intensitas piksel yang bervariasi secara perlahan (misalnya permukaan kontinu).
- Frekuensi tinggi bersesuaian dengan intensitas piksel yang bervariasi dengan cepat (misalnya pixel tepi)



Citra pada hakekatnya adalah penjumlahan beberapa sinyal dua dimensi dari masing-masing frekuensi dengan faktor pembobotan tertentu.



Sumber: Prof Bebis, Fourier Transform

Transformasi Fourier Kontinu

- Transformasi Fourier kontinu untuk satu peubah (x atau t):

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx$$

- Transformasi Fourier Balikan untuk satu peubah:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ux} du$$

yang dalam hal ini,

$$i = \text{imaginer} = \sqrt{-1}$$

u adalah peubah frekuensi

$$2\pi u = \omega, \quad \omega = \text{frekuensi angular}$$

- Untuk $f(x)$ real, $F(u)$ adalah fungsi kompleks dan dapat dituliskan sebagai:

$$F(u) = R(u) + iI(u) = |F(u)|e^{i\phi(u)}$$

- Amplitudo atau $|F(u)|$ disebut **spektrum Fourier** dari $f(x)$ dan didefinisikan sebagai:

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

- Sudut fase spektrum,

$$\Theta(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

menyatakan pergeseran fase atau sudut fase dari setiap frekuensi u .

- Dengan mengingat formula Euler,

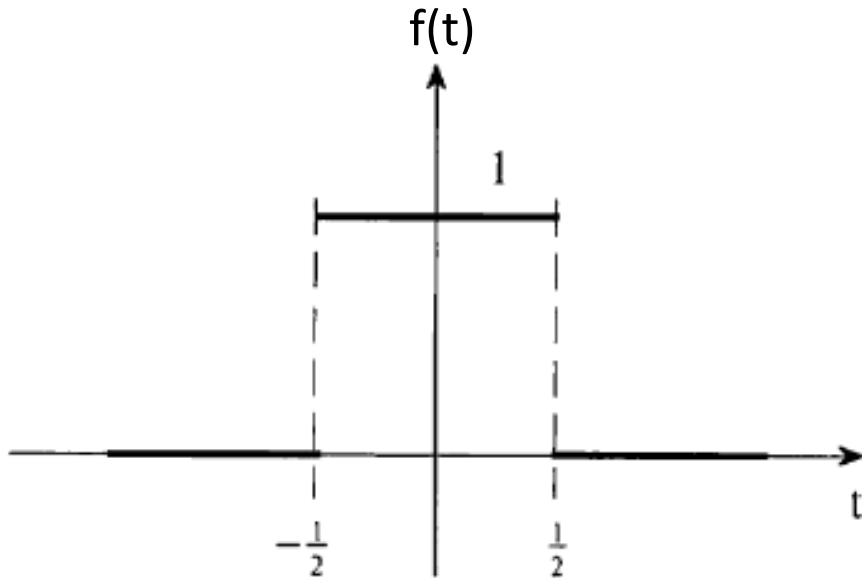
$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$$

maka pasangan transformasi Euler dapat juga ditulis sebagai

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \{ \cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux) \} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \{ \cos(2\pi ux) + i \sin(2\pi ux) \} du$$

Contoh 1: Misalkan $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$, fungsi dalam ranah waktu t
Tentukan hasil transformasi Fouriernya.



Penyelesaian:

$$\mathfrak{T}\{f(t)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi ut} dt$$

$$F(u) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-i2\pi ut} dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi ut} dt$$

$$= -\frac{1}{i2\pi u} e^{-i2\pi ut} \bigg|_{t=-1/2}^{t=1/2}$$

Penyelesaian:

$$F(u) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-i2\pi ut} dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi ut} dt$$

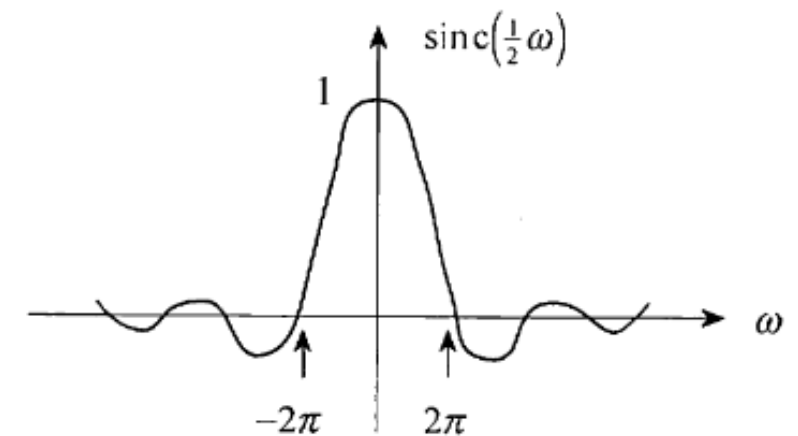
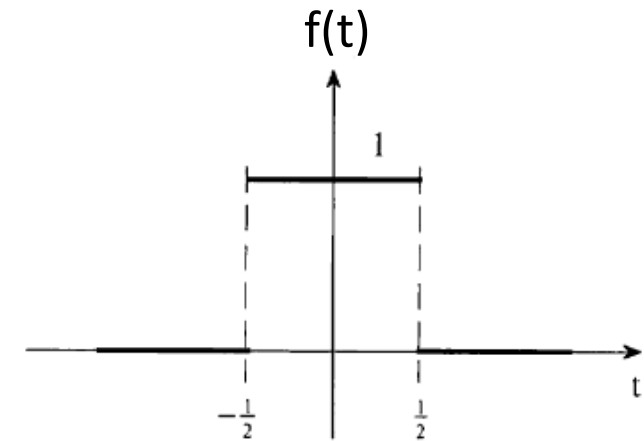
$$= -\frac{1}{i2\pi u} e^{-i2\pi ut} \bigg|_{t=-1/2}^{t=1/2}$$

$$= -\frac{1}{i2\pi u} (e^{-i2\pi u(\frac{1}{2})} - e^{-i2\pi u(-\frac{1}{2})})$$

$$= -\frac{1}{i2\pi u} (e^{-i\pi u} - e^{i\pi u})$$

$$= -\frac{1}{i2\pi u} (\cos \pi u - i \sin \pi u) - (\cos \pi u + i \sin \pi u) \quad \text{dari formula Euler}$$

$$= -\frac{1}{i2\pi u} (-i 2 \sin \pi u) = \frac{1}{\pi u} (\sin \pi u) = \text{sinc}(\pi u) \quad (\text{catatan: } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x})$$



Mengingat $\omega = 2\pi u$ maka $F(\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega}{2})$

Latihan

$$\text{Misalkan } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{(t-3)}{2}, & 1 < t \leq 3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah hasil transformasi Fourier dan transformasi Fourier balikkannya. Hitung juga spektrum Fourier nya.

- Transformasi Fourier kontinu untuk dua peubah:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Transformasi Fourier Balikannya adalah

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

- Spektrum Fourier-nya adalah:

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

- Sudut fase adalah

$$\Theta(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

- Sifat-sifat transformasi Fourier:

Sifat	Ranah Waktu	Ranah Frekuensi
1. Kelanjutan	$af(t) + bg(t)$	$aF(u) + bG(u)$
2. Penskalaan	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(u/a)$
3. Pergeseran	$f(t - a)$	$F(u - a)$
4. Modulasi	$e^{i2\pi at} f(t)$	$F(u) e^{-i2\pi ua}$
5. Konyugasi	$f^*(t)$	$F^*(-u)$
6. Konvolusi	$h(t) = f(t) * g(t)$	$H(u) = F(u)G(u)$
7. Perkalian	$h(t) = f(t)g(t)$	$H(u) = F(u) * G(u)$
8. Diferensiasi	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(i2\pi u)^n F(u)$
9. Simetri	$F(t)$	$f(-u)$
10. Hasil kali dalam	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G^*(u)du$

Transformasi Fourier Diskrit

- Transformasi Fourier diskrit untuk satu peubah:

$$F_u = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f_x e^{-i2\pi ux/N} \quad , u = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Transformasi Fourier Balikan untuk satu peubah:

$$f_x = \sum_{u=0}^{N-1} F_u e^{i2\pi ux/N} \quad , x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

yang dalam hal ini, sinyal kontinu $f(x)$ diterok menjadi N nilai diskrit sejarak Δx , yaitu himpunan nilai $\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + (N-1)\Delta x)\}$.

Jadi,

$$f_x = f(x_0 + x \Delta x), \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Interpretasi dari TFD adalah sebagai berikut: TFD mengkonversi data diskrit menjadi sejumlah sinusoida diskrit yang frekuensinya dinomori dengan $u = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, dan ampiltudonya diberikan oleh $F(u)$.
- Faktor $1/N$ pada persamaan $F(u)$ adalah faktor skala yang dapat disertakan dalam persamaan $F(u)$ atau dalam persamaan $f(x)$, tetapi tidak kedua-duanya.
- Contoh: Diketahui fungsi sinyal $f(x)$ dengan hasil penerokan ke dalam nilai-nilai diskrit sebagai berikut ($N = 4$):

$$x_0 = 0.5, f_0 = 2$$

$$x_1 = 0.75, f_1 = 3$$

$$x_2 = 1.0, f_2 = 4$$

$$x_3 = 1.25, f_3 = 4$$

Transformasi Fourier Diskrit adalah sebagai berikut

$$F_0 = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f_x e^{-i \cdot 0.2 \pi x / 4} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f_x e^0 = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f_x = \frac{1}{4} (f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = 3.25$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f_x e^{-i \cdot 1.2 \pi x / 4} = \frac{1}{4} (f_0 e^0 + f_1 e^{-i \pi / 2} + f_2 e^{-i \pi} + f_3 e^{-i 3 \pi / 2}) \\ &= \frac{1}{4} (2 + 3[\cos(\pi / 2) - i \sin(\pi / 2)] + 4[\cos(\pi) - i \sin(\pi)] + 4[\cos(3 \pi / 2) - i \sin(3 \pi / 2)]) \\ &= \frac{1}{4} (2 + 3[0 - i] + 4[-1 - 0] + 4[0 + i]) = \frac{1}{4} (-2 - i) \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f_x e^{-i \cdot 2.2 \pi x / 4} = \frac{1}{4} (2e^0 + 3e^{-i \pi} + 4e^{-i 2 \pi} + 4e^{-i 3 \pi})$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 0i) = -\frac{1}{4}$$

$$F_3 = \frac{1}{4} (2 + i)$$

Spektrum Fouriernya:

$$|F_0| = 3.25$$

$$|F_1| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/4)^2} = \sqrt{1/4 + 1/16} = \sqrt{5/16} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$|F_2| = \frac{1}{4}$$

$$|F_3| = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

```

void TFD(int N)
/* Melakukan Transformasi Fourier Diskrit untuk N buah data masukan. Hasil transformasi disimpan di
dalam array R dan I. Array R menyimpan bagian riil, dan array I menyimpan bagian bagian imajiner. Kedua
array ini dideklarasikan sebagai peubah global. Data masukan disimpan di dalam array f[0] s/d f[N-1]
*/
{
    int j, k;
    double tetha;

    for (j=0; j<N; j++)
    {
        R[j]=0.0;
        I[j]=0.0;
    }
    for (k=0; k<=N; k++)
        for (j=0; j<=N-1; j++)
        {
            tetha= k*2*3.14*j/(double)N;
            R[k]=R[k]+(f[j]*cos(tetha))/(double)N;
            I[k]=I[k]-(f[j]*sin(tetha))/(double)N;
        }
}

```

```

void TFD_balikan(int N)
/* Melakukan Transformasi Fourier Diskrit Balikan untuk N buah data masukan. Masukan disimpan di dalam
array R dan I. Array R menyimpan bagian riil, dan array I menyimpan bagian bagian imajiner. Kedua array
ini dideklarasikan sebagai peubah global. Data keluaran disimpan di dalam array fReal[0] s/d fReal[N-1]
dan array fImag[1] s/d fImag[N-1]. */
{
    int j, k;
    double tetha, epsilon = 1E-12;

    for (j=0; j<N; j++)
    { fReal[j]=0;
      fImag[j]=0;
    }

    for (k=0; k<N1; k++)
    { for (j=0; j<N; j++)
      {
        tetha=k*2*3.14*j/(double)N;
        fReal[k]=fReal[k]+(R[j]*cos(tetha)-I[j]*sin(tetha));
        fImag[k]=fImag[k]+(I[j]*cos(tetha)+ R[j]sin(tetha));
      }
      if (fImag[k] < epsilon) fImag[k]=0;
    }
}

```

- Transformasi Fourier Diskrit untuk dua peubah:

$$F_{u,v} = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi(ux/N + vy/M)} \quad , u \text{ dan } v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_{x,y} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F_{u,v} e^{i2\pi(ux/N + vy/M)} \quad , x \text{ dan } y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

atau

$$F_{u,v} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f_{x,y} e^{-i2\pi ux/N} \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi vy/M} \quad , u \text{ dan } x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f_{x,y} = \sum_{u=0}^{N-1} F_{u,v} e^{i2\pi ux/N} \sum_{v=0}^{M-1} F_{u,v} e^{i2\pi vy/M} \quad , v \text{ dan } y = 0, 1, \dots, M-1$$

Spektrum Fourier-nya adalah:

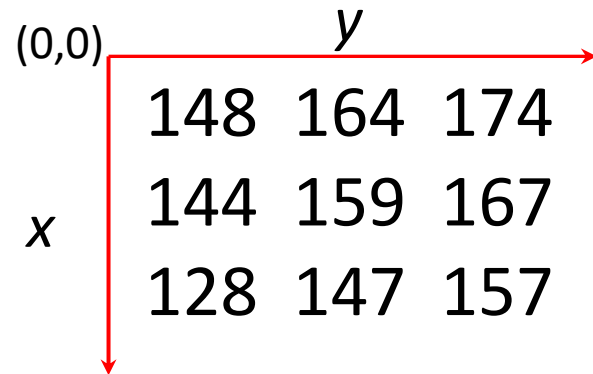
$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

Sudut fasenya adalah:

$$\Theta(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Latihan

- Lakukan transformasi Fourier untuk citra berikut:



A 3x3 matrix of pixel intensity values. The horizontal axis is labeled 'y' and the vertical axis is labeled 'x'. The origin (0,0) is at the top-left corner. Red arrows indicate the positive directions for both axes.

(0,0)			
	148	164	174
	144	159	167
	128	147	157

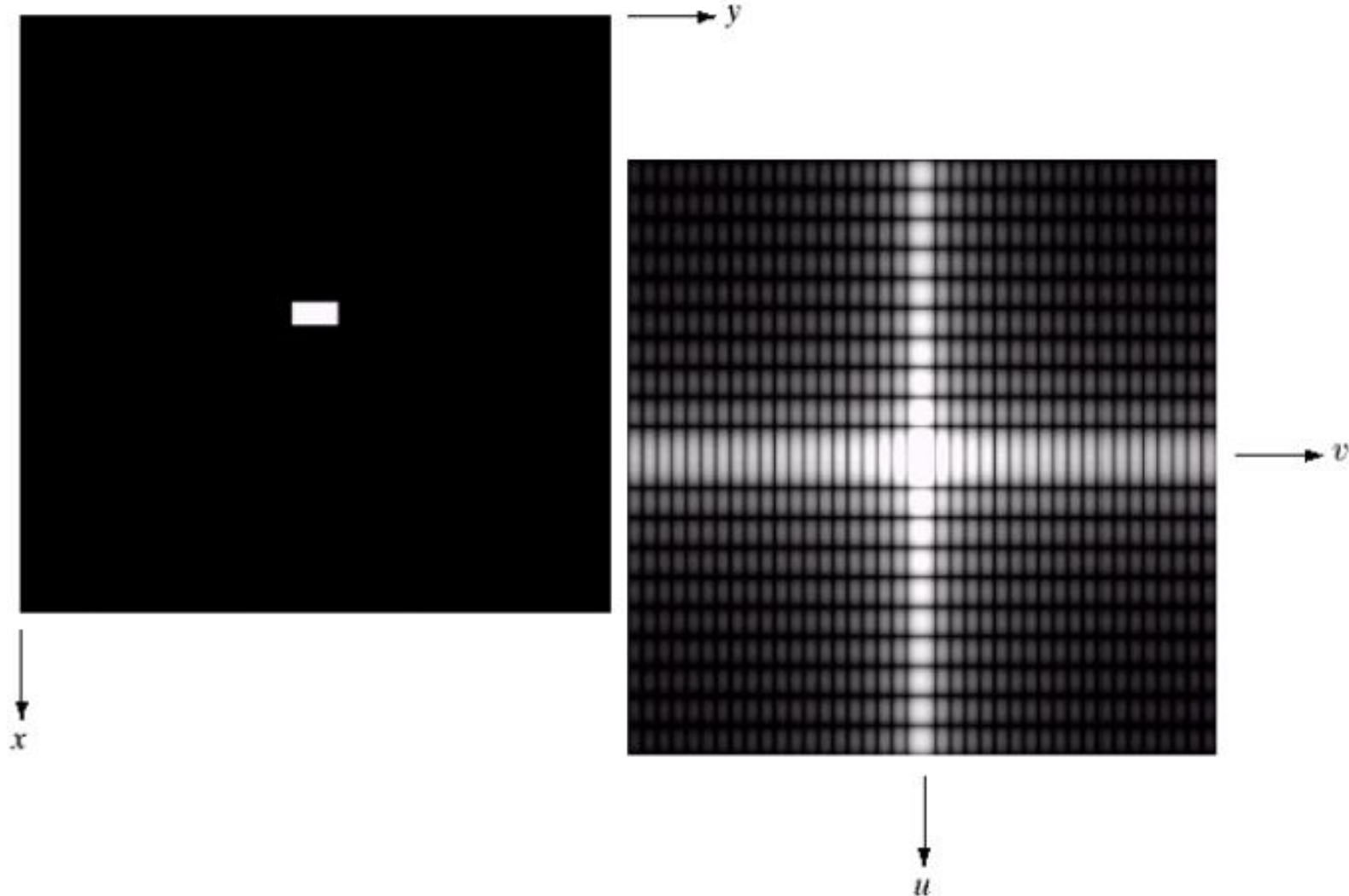
Menampilkan citra spektrum Fourier

a b

FIGURE 4.3

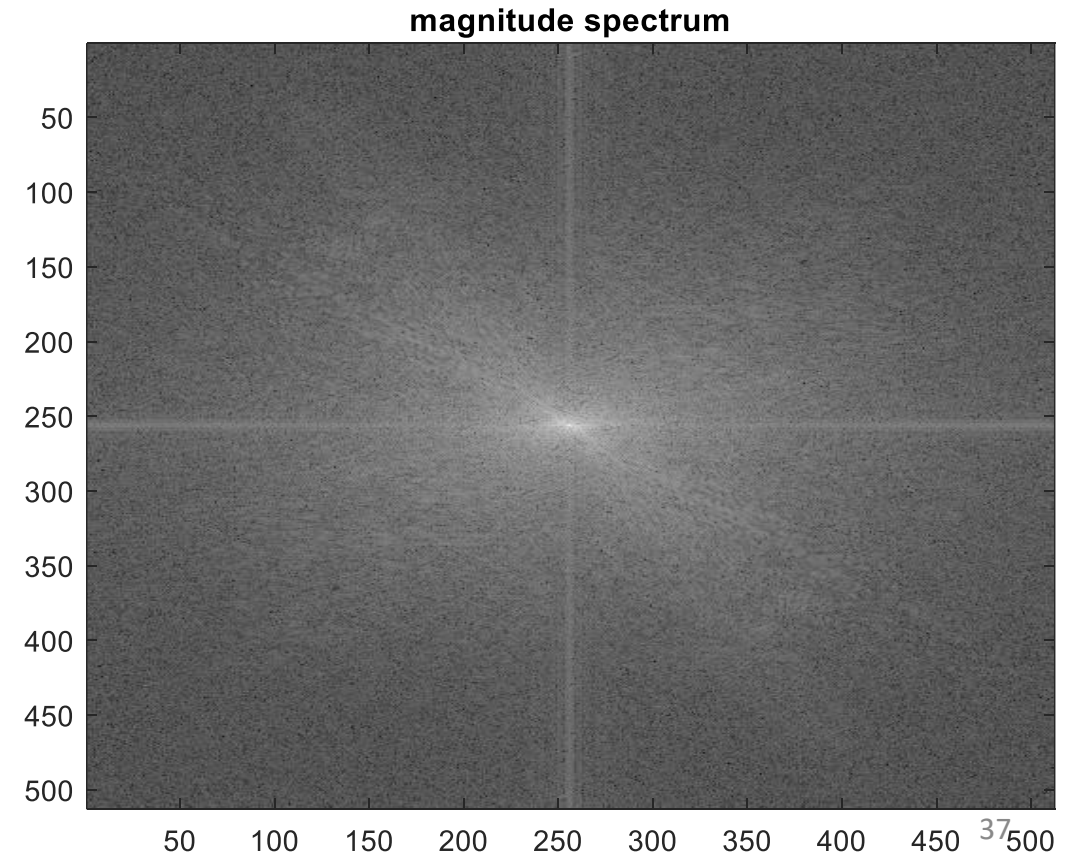
(a) Image of a 20×40 white rectangle on a black background of size 512×512 pixels.

(b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.



Menampilkan citra spektrum Fourier

```
img = imread('lena-gray.bmp');  
imshow(img);  
F = fft2(img); % Perform Fourier Transform  
F2 = fftshift(F); % Center FFT  
F2 = abs(F2); % Get the magnitude  
F2 = log(F2+1); % Use log, for perceptual scaling, and +1 since log(0) is undefined  
figure, imagesc(100*F2); colormap(gray);  
title('magnitude spectrum');
```



Simulasi FFT2, IFFT2, dan FFTShift pada sebuah matriks (1)

```
>> A = magic(3)
```

```
A =
```

```
8   1   6
3   5   7
4   9   2
```

```
>> B = fft2(A)
```

```
B =
```

```
45.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 13.5000 + 7.7942i  0.0000 - 5.1962i
0.0000 - 0.0000i  0.0000 + 5.1962i 13.5000 - 7.7942i
```

```
>> A = ifft2(B)
```

```
A =
```

```
8.0000  1.0000  6.0000
3.0000  5.0000  7.0000
4.0000  9.0000  2.0000
```

```
>> B = abs(B)
```

```
B =
```

```
45.0000      0      0
0.0000 15.5885  5.1962
0.0000  5.1962 15.5885
```

```
>> B = fftshift(B)
```

```
B =
```

```
15.5885  0.0000  5.1962
      0 45.0000      0
5.1962  0.0000 15.5885
```

Simulasi FFT2, IFFT2, dan FFTShift pada sebuah matriks (2)

```
>> A = [220, 221, 225; 223, 224, 225; 230, 229, 225]
```

A =

220	221	225
223	224	225
230	229	225

```
>> B = fft2(A)
```

B =

1.0e+03 *

2.0220 + 0.0000i	-0.0015 + 0.0009i	-0.0015 - 0.0009i
-0.0120 + 0.0104i	-0.0000 + 0.0087i	-0.0075 - 0.0009i
-0.0120 - 0.0104i	-0.0075 + 0.0009i	-0.0000 - 0.0087i

```
>> C = ifft2(B)
```

C =

220	221	225
223	224	225
230	229	225

```
>> D = abs(B)
```

D =

1.0e+03 *

2.0220	0.0017	0.0017
0.0159	0.0087	0.0075
0.0159	0.0075	0.0087

```
>> D = abs(B)
```

```
D =
```

```
1.0e+03 *
```

2.0220	0.0017	0.0017
0.0159	0.0087	0.0075
0.0159	0.0075	0.0087

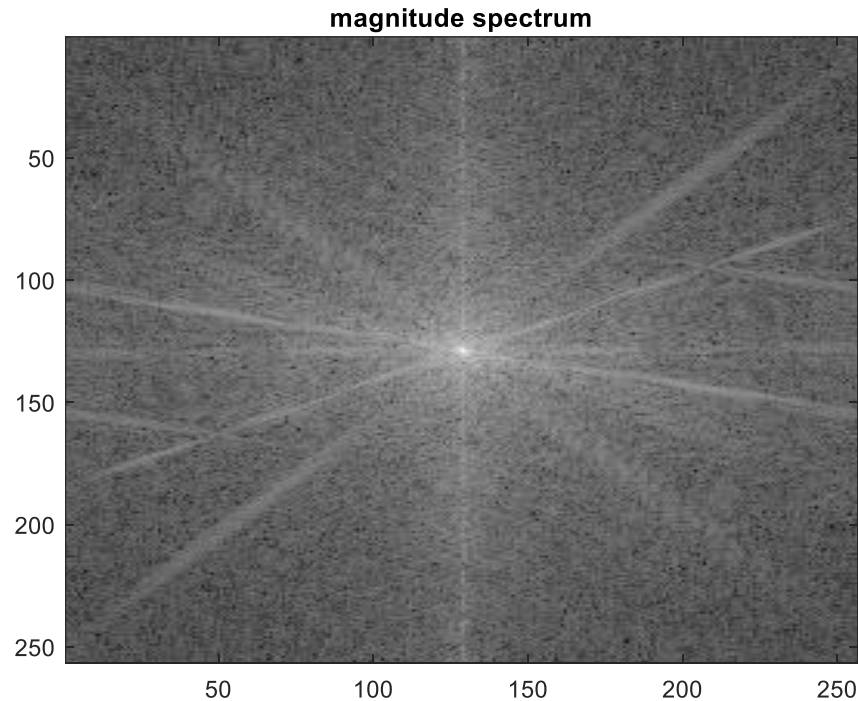
```
>> D = fftshift(D)
```

```
D =
```

```
1.0e+03 *
```

0.0087	0.0159	0.0075
0.0017	2.0220	0.0017
0.0075	0.0159	0.0087

- Transformasi citra dari ranah spasial ke ranah frekuensi dan sebaliknya



```
I = imread('camera.bmp');  
figure; imshow(I)
```

```
F = fft2(I);  
F2 = fftshift(F); % Center FFT  
F2 = abs(F2); % Get the magnitude  
F2 = log(F2+1); % Use log  
figure, imagesc(100*F2);  
colormap(gray);  
title('magnitude spectrum');
```

```
J = ifft2(F);  
J = uint8(J);  
figure, imshow(J)
```

- Kasus khusus: $f(x,y)$ berukuran $N \times N$.

- Transformasi Fourier Diskrit:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux+vy}{N})}, \quad u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux+vy}{N})}, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Algoritma TFD 1-D dan balikkannya dapat diterapkan untuk fungsi diskrit dwimatra (2-D). Mula-mula transformasi dilakukan dalam arah x (dengan nilai y tetap). Kemudian, hasilnya ditransformasikan lagi dalam arah y . Atau sebaliknya dalam arah y kemudian dalam arah x :

- Tinjau $F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux+vy}{N})}$

Pisahkan: $e^{-j2\pi(\frac{ux+vy}{N})} = e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})}$

Tulis ulang $F(u, v)$ sebagai berikut: $F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})}$

Misalkan: $\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})} = F(x, v)$, maka: $F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} F(x, v)$

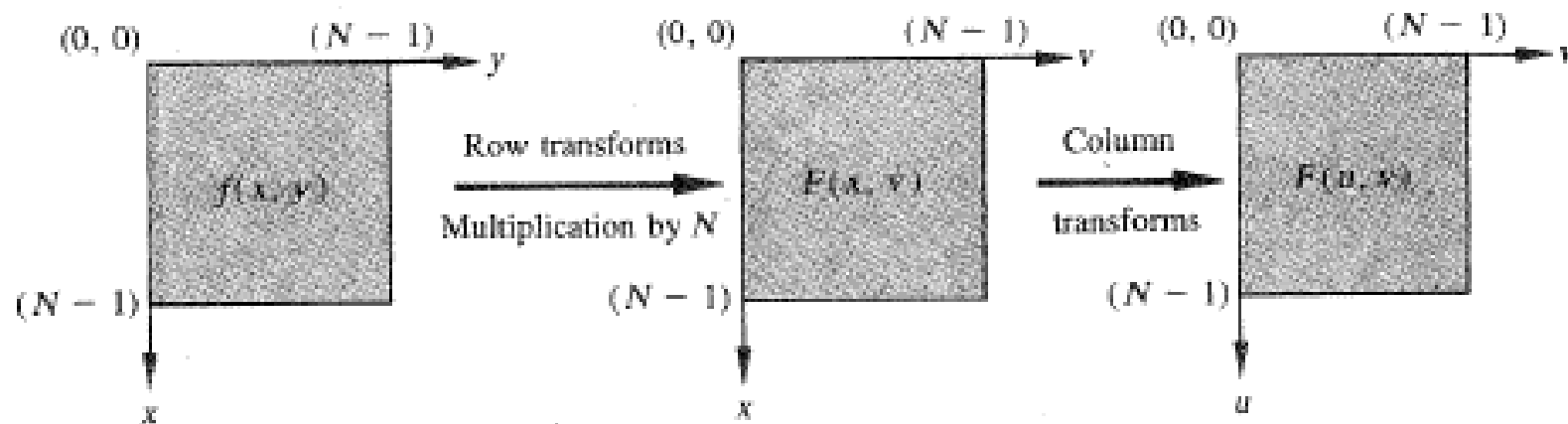
- Bagaimana cara menghitung $F(x,v)$?

$$\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})} = F(x, v) = N \left(\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})} \right)$$

N x TFD dari baris-baris $f(x,y)$

- Bagaimana cara menghitung $F(u,v)$?

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} F(x, v) \quad \text{TFD dari kolom-kolom } F(x,v)$$



- Algoritma TFD tidak bagus untuk N yang besar karena komputasinya memakan waktu yang lama. Kompleksitas waktu algoritmanya adalah $O(N^2)$.
- Algoritma yang dikenal cepat untuk menghitung transformasi Fourier diskrit adalah FFT (*Fast Fourier Transform*).
- Algoritma FFT mempunyai kompleksitas waktu $O(N^2 \log N)$. Jadi, untuk $N = 50$, FFT kira-kira 10 kali lebih cepat daripada TFD, untuk $N = 1000$ sekitar 100 kali lebih cepat.

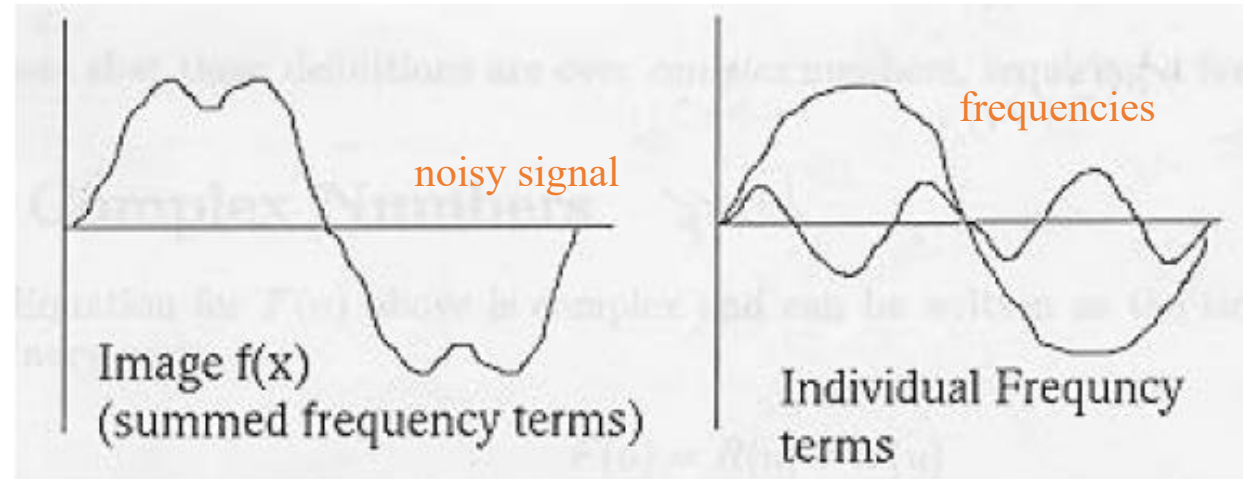
Kenapa Transformasi Fourier bermanfaat?

- **Lebih mudah** menghilangkan frekuensi yang tidak diinginkan dalam ranah frekuensi.
- **Lebih cepat** melakukan operasi tertentu dalam ranah frekuensi daripada dalam ranah spasial (khususnya jika menggunakan **Fast Fourier Transform** atau **FFT**).

Penapisan Frekuensi: Langkah utama

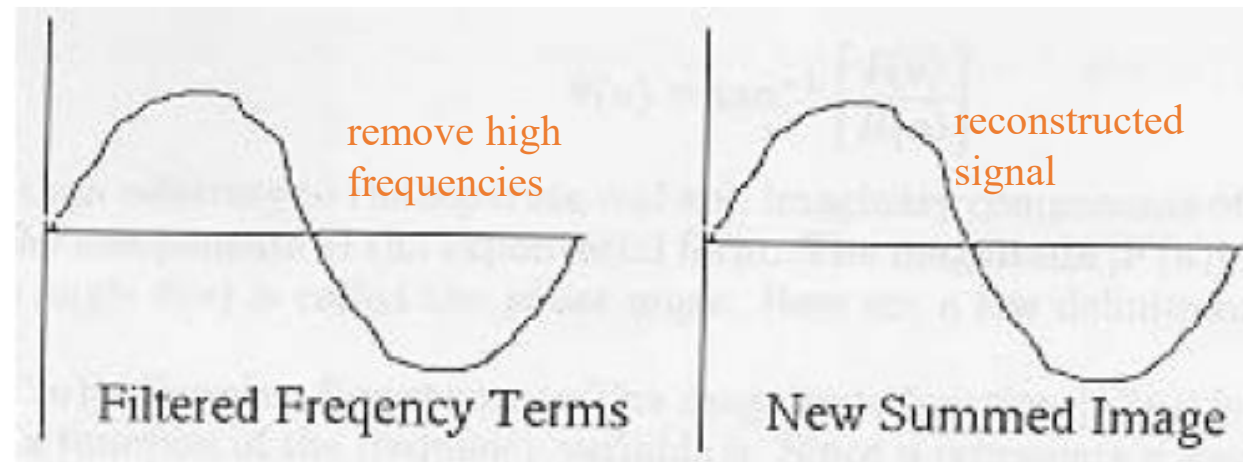
1. Lakukan Transformasi Fourier terhadap citra: $F(u,v) = \mathfrak{F}(f(x,y))$
2. Hilangkan frekuensi yang tidak diinginkan: $G(u,v) = D(F(u,v))$
3. Transformasi balik ke ranah spasial: $f(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}(G(u,v))$

Contoh: menghilangkan frekuensi yang tidak diinginkan

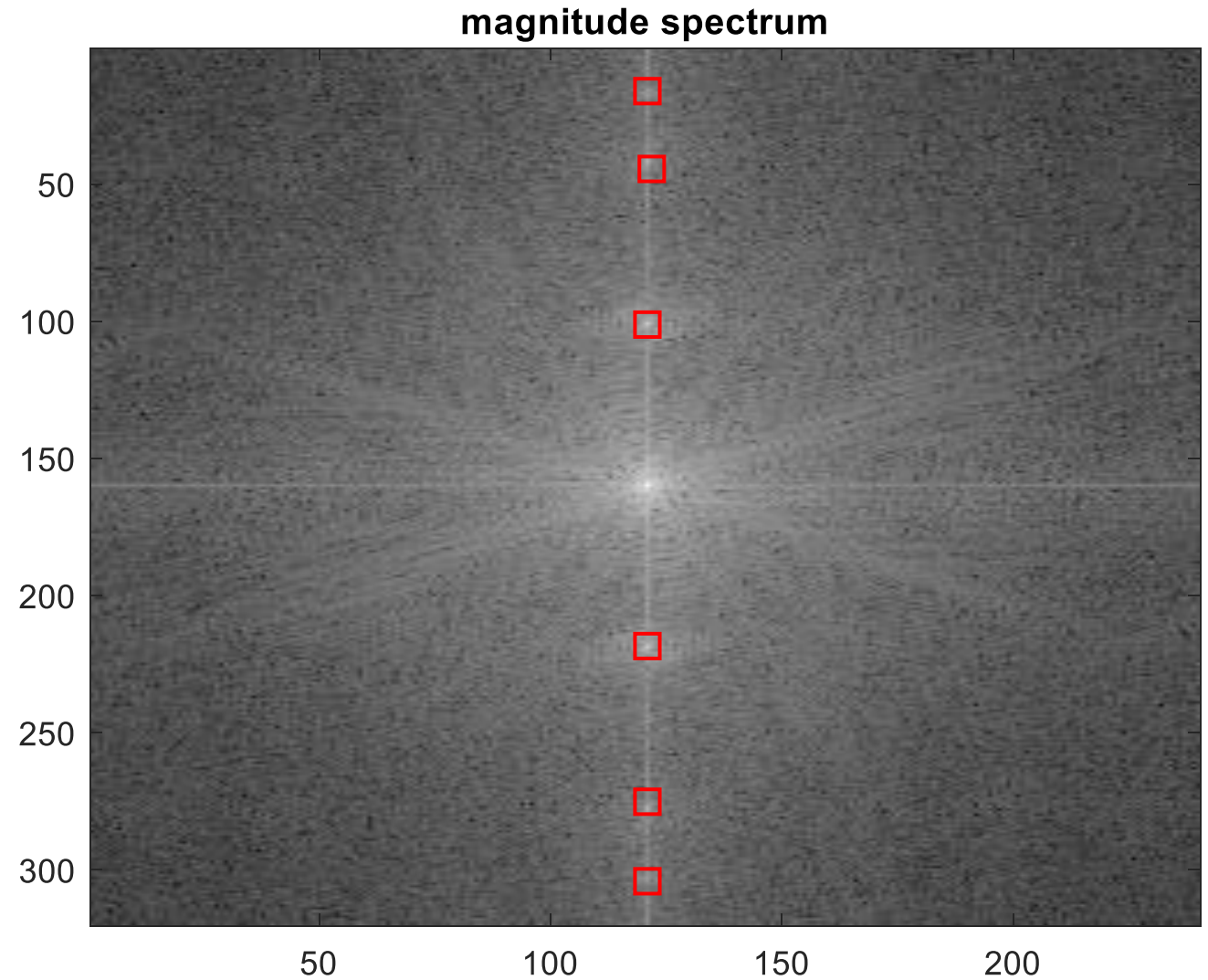


Untuk menghilangkan frekuensi tertentu, set koefisien $F(u,v)$ yang berkoresponden menjadi 0

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$



Contoh:



Frekuensi yang mengalami derau ditentukan secara manual, kira-kira pada kolom 115-125, dan pada baris 96-106, 216-226, 274-284, 298-308, 12-22, 37-47.

```

I = imread('india.bmp'); % Baca citra
imshow(I);

% Terapkan Fourier Transform
F = fft2(double(I));
F1 = fftshift(F); % Pusatkan FFT

% Tampilkan magnitute spektrum Fourier
F2 = F1;
F2 = abs(F2); % Get the magnitude
F2 = log(F2+1); % Use log
figure, imagesc(100*F2); colormap(gray);
title('magnitude spectrum');

```



```

% Buang frekuensi yang mengganggu, set jadi 0
for j = 115:125
    for i = 96:106
        F1(i,j) = 0;
    end
    for i = 216:226
        F1(i,j) = 0;
    end
    for i = 274:284
        F1(i,j) = 0;
    end
    for i = 298:308
        F1(i,j) = 0;
    end
    for i = 12:22
        F1(i,j) = 0;
    end
    for i = 37:47
        F1(i,j) = 0;
    end
end

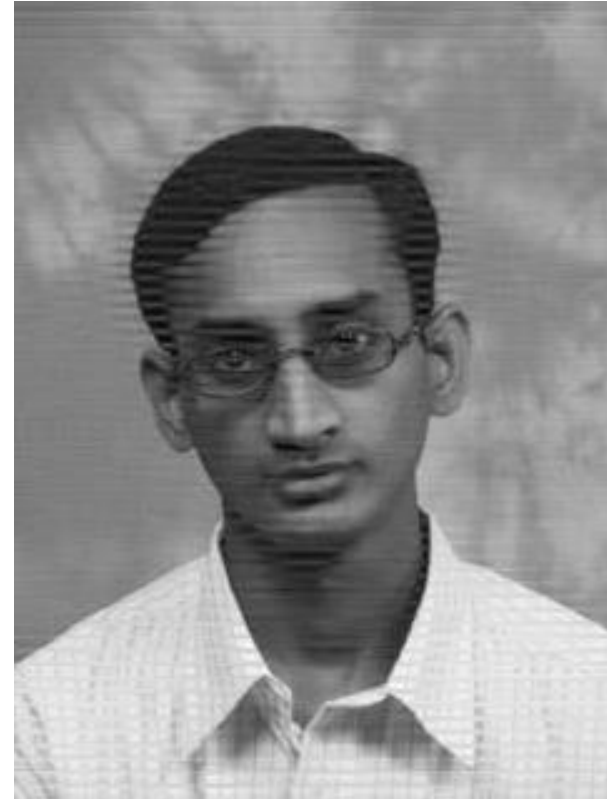
%Kembalikan ke ranah spasial
J = real(ifft2(ifftshift(F1)));
figure, imshow(J,[]);

```

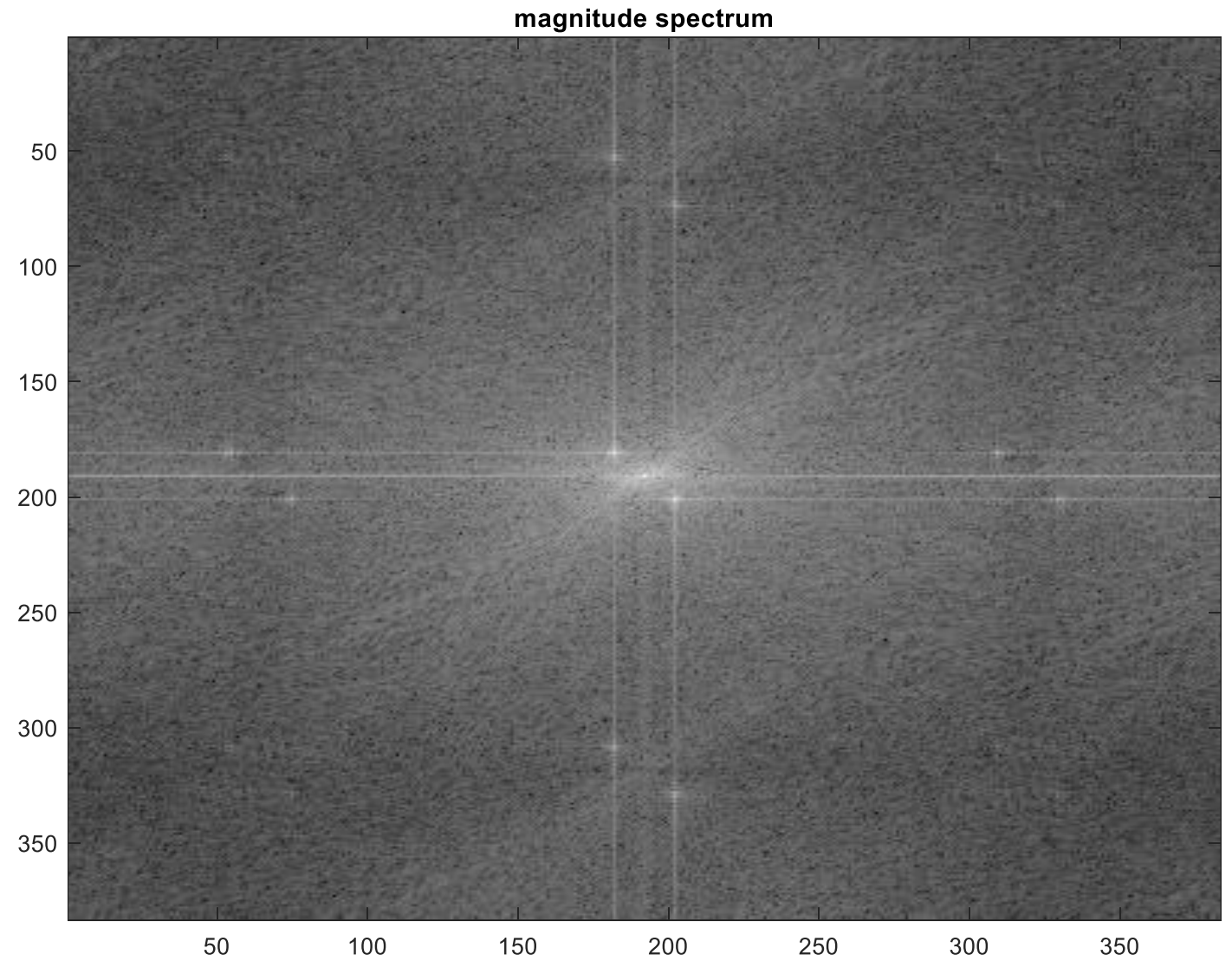
Input:



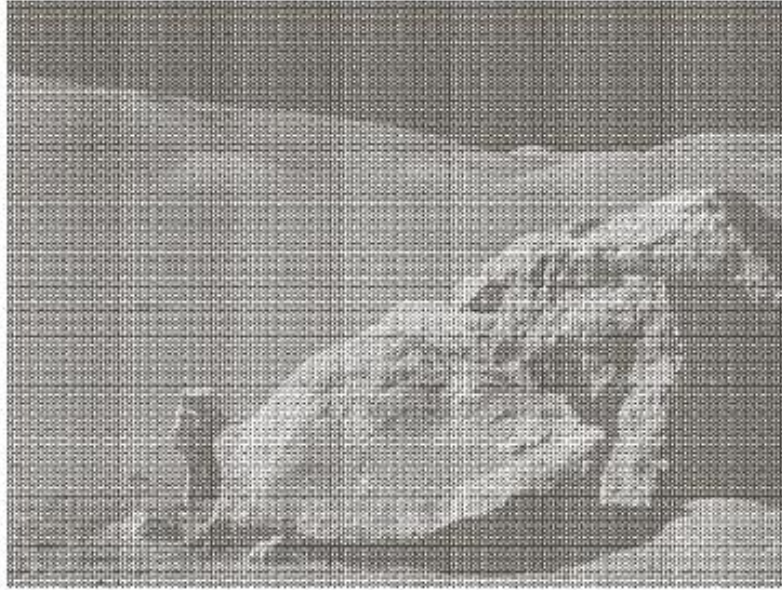
Hasil penapisan frekuensi derau:



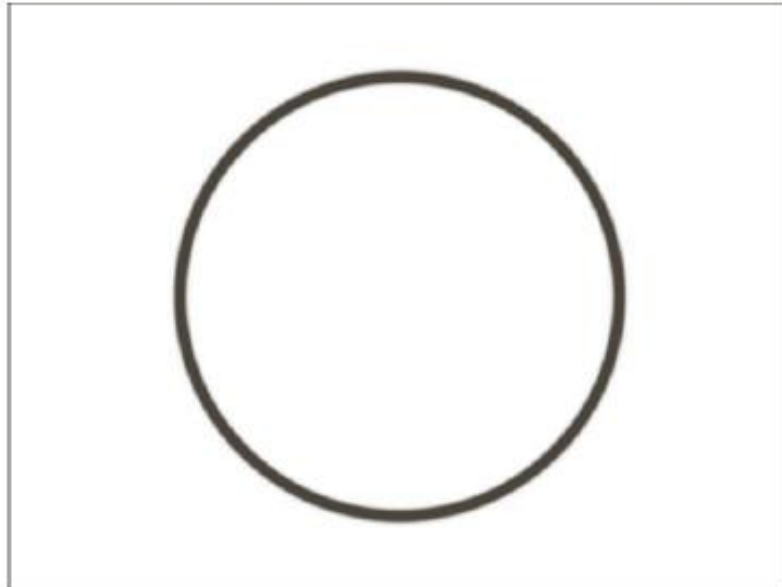
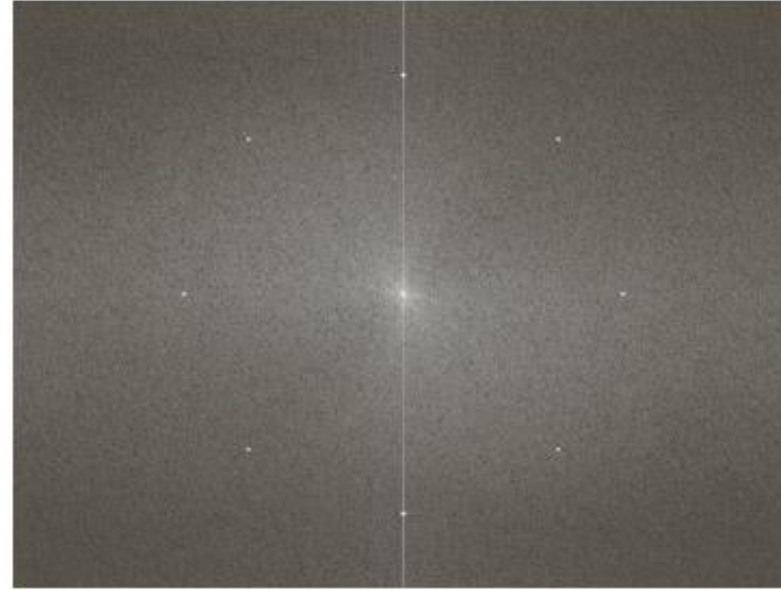
Latihan:



Input image



Spectrum (frequency domain)



Band-reject filter



Output image

Discrete Cosine Transform (DCT)

- DCT mentransformasikan sinyal dalam ranah waktu/spasial ke dalam ranah frekuensi.
- Tidak memiliki bagian imajiner.
- Pasangan transformasi DCT dan Inverse DCT

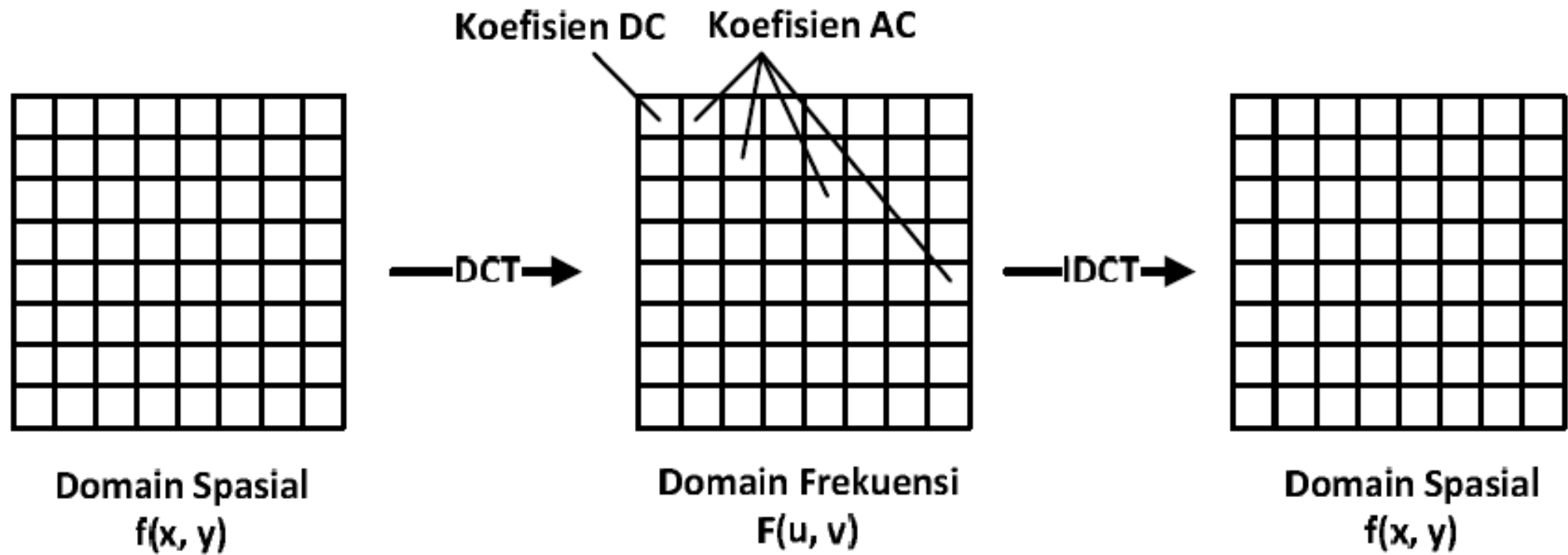
$$C(u, v) = \alpha_u \alpha_v \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) \cos \frac{\pi(2x+1)u}{2M} \cos \frac{\pi(2y+1)v}{2N} \quad (1)$$

$C(u, v)$ disebut koefisien-koefisien DCT

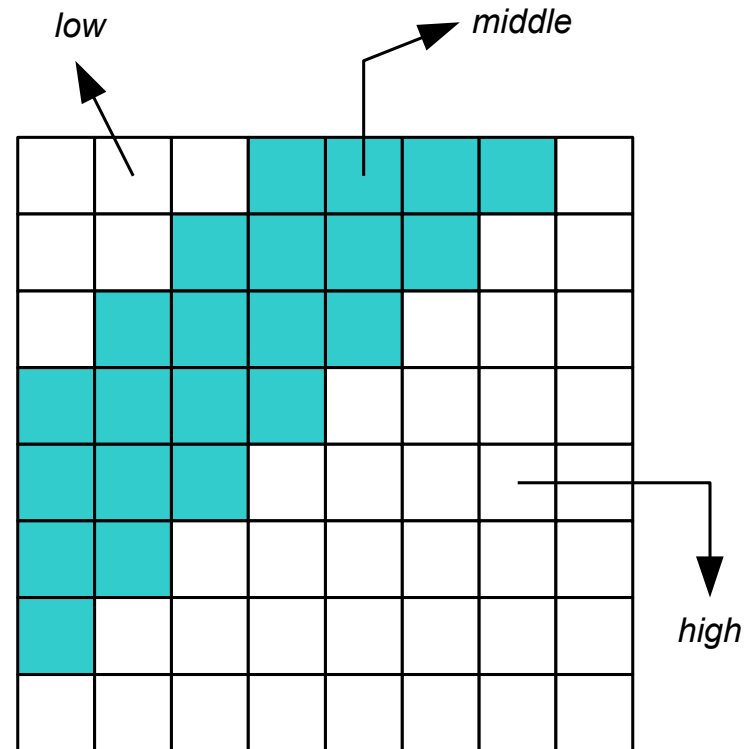
$$I(x, y) = \alpha_u \alpha_v \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u, v) \cos \frac{\pi(2x+1)u}{2M} \cos \frac{\pi(2y+1)v}{2N} \quad (4)$$

$$\alpha_v = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & , v = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & , 1 \leq v \leq N-1 \end{cases}$$

$$\alpha_u = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} & , u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}} & , 1 \leq u \leq M-1 \end{cases}$$



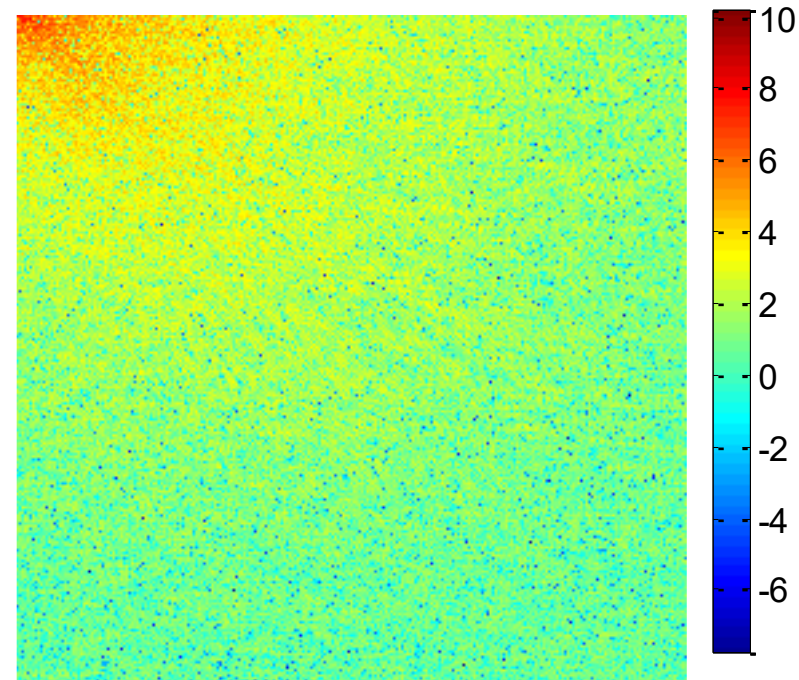
- DCT membagi citra ke dalam 3 ranah frekuensi: *low frequencies*, *middle frequencies*, dan *high frequencies*)



```
I = imread('lena-gray.bmp');  
J = dct2(I);  
imshow(log(abs(J)),[]), colormap(gca, jet(64)), colorbar
```



Citra dalam ranah spasial



Citra dalam ranah frekuensi