Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Ujian Tengah Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Semester I tahun akademik 2025/2026
Rabu, 14 Oktober 2026
Waktu: 105 menit

A. Pilihan Ganda

Tuliskan jawaban soal pilihan ganda (15 soal) di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3. Total nilai = 45.

1. Suatu SPL dengan tiga variabel konsisten. Setelah matriks koefisiennya direduksi ke bentuk eselon baris tereduksi, diperoleh tepat dua 1 utama (*leading ones*). SPL tersebut mempunyai …
   A. Tidak ada solusi B. Tepat satu solusi. C. Tepat dua solusi.
   D. Tak hingga banyak solusi. E. Jumlah solusi yang tidak dapat ditentukan.

   Jawaban: D

NOMOR 2 TIDAK ADA

3. Matriks B diperoleh dari matriks persegi A dengan menukar dua baris, lalu menambahkan tiga kali suatu baris ke baris lain. Hubungan yang selalu benar adalah …
   A. det(B) = det(A). B. det(B) = 3 det(A). C. det(B) = −det(A).
   D. det(B) = −3 det(A). E. det(B) = 0.

   Jawaban: C

4. Pilihlah mana jawaban yang tidak benar. Jika diketahui A adalah sebuah matriks ukuran *n* x *n*, dan diketahui bahwa determinan A adalah tidak sama dengan 0, maka :
   A. Ax = b konsisten untuk semua matriks **b** ukuran *n* x 1
   B. Ax = b mempunyai tepat satu buah solusi untuk matriks **b** ukuran *n* x 1
   C. Ax = 0 mempunyai solusi non-trivial
   D. Bentuk matriks eselon baris tereduksi dari A adalah $\boldsymbol{I_n}$
   E. Tidak ada jawaban yang benar

   Jawaban: C

5. Pernyataan berikut yang BENAR tentang koordinat suatu vektor **p** relatif terhadap basis B = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,…, $\mathbf{v_n}$} adalah :
   A. Koordinat merupakan nilai koefisien dari kombinasi linier vektor-vektor di B yang merepresentasikan vektor **p**
   B. Jika $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$,…,$\mathbf{v_n}$ merupakan vektor satuan standar maka koordinat **p** sama dengan komponen dari **p** sendiri
   C. Koordinat **p** tidak berubah jika basis-basis diganti dengan vektor basis yang lain.
   D. Hanya ada dua jawaban di antara A, B, C yang benar
   E. Hanya ada satu jawaban di antara A, B, C yang benar

F. Semua jawaban A, B, C benar.

Jawaban: D

6. Untuk vektor-vektor **q**, **d** ≠ 0, kemiripan kosinus *(cosine similarity)* adalah $\frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{d})}{\|\mathbf{q}\|\,\|\mathbf{d}\|}$. Jika **d** diganti dengan 5**d**, maka …

A. *Dot product* dan kemiripan kosinus keduanya tetap.
B. *Dot product* menjadi lima kali semula; kemiripan kosinus tetap.
C. *Dot product* tetap; kemiripan kosinus menjadi lima kali semula.
D. *Dot product* dan kemiripan kosinus keduanya menjadi lima kali semula.
E. Kedua vektor pasti menjadi ortogonal.

Jawaban: B

7. Diketahui $A \in \mathbb{R}^{4\times2}$ dan $B \in \mathbb{R}^{2\times3}$. (Catatan: $\mathbb{R}^{4\times2}$ adalah ruang matriks berukuran 4 x 2). Pemetaan

$$x \rightarrow Bx \rightarrow A(Bx)$$

direpresentasikan oleh …

A. AB, berukuran 4 × 3. B. BA, berukuran 2 × 2. C. A + B, berukuran 4 × 3.
D. AB dan BA, yang selalu sama. E. Tidak dapat direpresentasikan oleh satu matriks.

Jawaban: A

8. Diberikan $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$, **u** = (1, 0, 1), dan **v** = (0, 1, 1). Pernyataan yang benar adalah …

A. W bukan subruang karena mempunyai persamaan pembatas.
B. dim(W) = 3 karena $W \subseteq \mathbb{R}^3$.
C. {**u**, **v**} membangun W, tetapi tidak bebas linier (bergantung linier).
D. dim(W) = 1 karena W memiliki satu persamaan pembatas.
E. {**u**, **v**} merupakan basis W dan dim(W) = 2.

Jawaban: E

9. Manakah pernyataan di bawah ini yang **BENAR**?
   A. *Nullity* matriks tidak nol berukuran *m* x *n* paling banyak *m*
   B. Jika *rank*(A) = rank(A^T) maka A adalah matriks persegi n x n
   C. Jika matriks A memiliki jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolomnya, maka dimensi ruang baris lebih besar dari dimensi ruang kolom
   D. Menambahkan satu kolom tambahan pada sebuah matriks akan menaikkan rank-nya sebesar 1
   E. Semua pernyataan A sampai D tidak ada yang benar

Jawaban: E

10. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran *n* x *n*. Jika *nullity*(A) = 0, maka itu berarti:
   A. Matriks A tidak memiliki balikan (*invers*)
   B. Ax = 0 memiliki solusi non-trivial

C. Matriks eselon baris tereduksi dari A adalah matriks identitas (I)
D. det(A) = 0
E. Vektor-vektor kolom A tidak bebas linier
F. Jawaban B dan D benar
G. Jawaban A dan D benar

Jawaban: C

11. Jika *p* dan *q* adalah determinan matriks pertama dan kedua seperti di bawah ini, maka selalu berlaku:

$$p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad q = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix}$$

A. $p = q$ B. $p = -q$ C. $p = 2q$ D. $p = -2q$ E. $p + q = 2$

Jawaban: Tidak ada jawaban yang benar, seharusnya q = -2p (Soal ini dianggap bonus)

12. Transformasi T : $R^3 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$. Bayangan **x** = (-3, 0, -1) adalah:
A. (-4, -3, -1) B. (4, 3, -1) C. (-3, -4, -1) D. (-3, 4, -1) E. (-4, -3, -1) F. Semua salah

Jawaban: A atau E (kedua jawaban sama)

13. Jika diketahui W adalah ruang vektor umum, sedangkan **u** dan **v** adalah vector di ruang vector umum W maka pilihlah jawaban yang SALAH.
A. **u** + **v** haruslah di W B. **u** x **v** haruslah di W C. Untuk semua **u**, **v** $\in$ *W*, maka **u** + **v** = **v** + **u**
D. Untuk semua **u** $\in$ W, terdapat elemen identitas (vektor) 0 dan skalar 1 sedemikian sehingga
u + 0 = 0 + **u** = **u** dan 1**u** = **u**
E. Untuk setiap **u** $\in$ *W*, terdapat –**u** $\in$ *W* sedemikian sehingga
u + (–**u**) = (–**u**) + **u** = 0
F. Semua pilihan jawaban di atas benar, tidak ada jawaban yang salah.

Jawaban: B

14. Pilihlah mana jawaban yang tidak benar. Jika diketahui A adalah sebuah matriks ukuran *n* x *n*, dan diketahui bahwa vektor kolom A adalah bebas linear, maka :
A. determinan matriks A tidak sama dengan nol.
B. vector kolom A membentuk membentuk basis di R^n
C. Ax = b mempunyai tepat satu buah solusi untuk matriks **b** ukuran *n* x 1
D. A mempunyai nullity = n.
E. Pilihan di atas jawaban yang benarnya lebih dari 1 pilihan.
F. tidak ada pilihan jawaban yang benar.

Jawaban: D

15. Ada pernyataan sbb : "Jika diketahui bahwa vektor kolom A adalah bebas linear, maka belum tentu vektor baris A nya adalah bebas linear". Pernyataan tersebut adalah :
    A. selalu benar
    B. selalu salah
    C. bisa salah bisa benar, tergantung isi elemen matriks A nya.

Jawaban: B

Essay
Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

1. (a) Diberikan empat vektor di R^4 : **(Nilai = 10 + 2 + 3)**

v1 = (1, 1, -4, -3), **v2** = (2, 0, 2, -2), **v3** = (2, -1, 3, 2), **v4** = (5, 0, 1, -3)

. Tentukan subset keempat vektor di atas yang membentuk basis subruang W dari R^4.

(b) Berapa dimensi W tersebut?

(c) Tentukan vektor **w** yang kordinatnya relatif terhadap basis B di atas adalah $[\mathbf{w}]_B$ = (3, 2, 5)

Jawaban:

(a) Nyatakan keempat buah vektor ke dalam matriks, lalu lakukan OBE sampai menghasilkan matriks eselon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \text{... OBE ...} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Basis adalah vektor kolom pada matriks A awal yang berkoresponden dengan kolom 1 utama pada matriks eselon = { (1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)}

(b) dimensi(W) = 3

(c) **w** = 3(1, 1, -4, -3) + 2(2, 0, 2, -2) + 5(2, -1, 3, 2) = (17, -2, 7, -3)

2. Suatu sistem merepresentasikan masukan $x \in \mathbb{R}^3$ sebagai keluaran transformasi (pemetaan) y = λAx, dengan $\lambda \in \mathbb{R}$ dan matriks λA berikut: **(Nilai = 3 + 3 + 4)**

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+\lambda \end{bmatrix}$$

Seorang pengembang menyatakan:

(1) "Karena pemetaan tersebut linier dan matriksnya persegi, setiap keluaran selalu menentukan tepat satu masukan ." (Ket: pemetaan one-to-ne)

(2) "Ketika λ = 0, seluruh keluaran membentuk subruang berdimensi dua, dan dua masukan menghasilkan keluaran yang sama tepat ketika selisihnya merupakan kelipatan $(-1, -1, 1)^T$."

(3) "Ketika λ = 0, keluaran $(2, 3, 5)^T$ dan $(2, 3, 6)^T$ sama-sama dapat dihasilkan karena keduanya merupakan vektor di $\mathbb{R}^3$."

Evaluasilah kebenaran ketiga pernyataan tersebut dengan alasannya. Berikan argumentasi matematis yang saling terhubung; jawaban benar atau salah tanpa alasan tidak memperoleh nilai penuh.

Jawaban:

Ringkasan:

Pernyataan (1) **salah** sebagai klaim untuk semua λ; benar hanya untuk $\lambda \neq 0$.

Pernyataan (2) **benar**.

Pernyataan (3) **salah**: keluaran pertama dapat dicapai, keluaran kedua tidak. Urutan dan metode penalaran mahasiswa tidak harus sama dengan pembahasan ini.

Pernyataan (1): linearitas tidak menjamin keterbalikan

1. Untuk λ tetap, $T_\lambda(u + v) = A_\lambda(u + v) = A\lambda u + A\lambda v$ dan $T_\lambda(ku) = kA\lambda u$. Pemetaan memang linier untuk setiap λ.
2. Pada A_λ, lakukan $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, lalu $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$. Diperoleh matriks segitiga dengan baris (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, λ). Kedua operasi tidak mengubah determinan, sehingga $\det(A_\lambda) = \lambda$.
3. Untuk $\lambda \neq 0$, A_λ invertibel. Setiap keluaran $y \in \mathbb{R}^3$ mempunyai tepat satu masukan $x = A\lambda^{-1}y$. Untuk $\lambda = 0$, matriks singular: beberapa keluaran tidak memiliki masukan, sedangkan keluaran yang dapat dicapai memiliki lebih dari satu masukan.
4. Jadi alasan "linier dan persegi" tidak cukup. Persegi hanya menyamakan dimensi domain dan kodomain; keunikan serta ketercapaian semua keluaran membutuhkan keterbalikan.

Alternatif tanpa determinan: dari $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, dan $y_3 = x_1 + x_2 + (2 + \lambda)x_3$ diperoleh $y_3 - y_1 - y_2 = \lambda x_3$. Untuk $\lambda \neq 0$, $x_3 = (y_3 - y_1 - y_2)/\lambda$, lalu $x_1 = y_1 - x_3$ dan $x_2 = y_2 - x_3$. Untuk $\lambda = 0$, diperlukan $y_3 = y_1 + y_2$ dan x_3 tidak ditentukan secara unik.

Pernyataan (2): ruang keluaran dan ambiguitas masukan

1. Kolom A_0 adalah $u = (1, 0, 1)^T$, $v = (0, 1, 1)^T$, dan $w = (1, 1, 2)^T = u + v$. Maka $\text{Col}(A_0) = \text{span}\{u, v\} = \{(a, b, a + b)^T : a, b \in \mathbb{R}\} = W$.
2. W adalah subruang karena merupakan span. Sebagai bukti langsung, W memuat nol dan persamaan $y_3 = y_1 + y_2$ dipertahankan oleh penjumlahan serta perkalian skalar.
3. Jika $\alpha u + \beta v = 0$, komponen pertama dan kedua memberi $\alpha = \beta = 0$. Jadi {u, v} bebas linier dan membangun W; keduanya basis W, sehingga $\dim(W) = \text{rank}(A_0) = 2$.
4. Persamaan $A_0 z = 0$ memberi $z_1 + z_3 = 0$ dan $z_2 + z_3 = 0$; persamaan ketiga merupakan jumlah dua persamaan pertama. Dengan $z_3 = t$, diperoleh $z = t(-1, -1, 1)^T$. Jadi $\text{Null}(A_0) = \text{span}\{n\}$, $n = (-1, -1, 1)^T$, dan $\text{nullity}(A_0) = 1$.
5. Untuk masukan x dan x', $A_0x = A_0x'$ jika dan hanya jika $A_0(x - x') = 0$, jika dan hanya jika $x - x' = tn$ untuk suatu $t \in \mathbb{R}$. Ini membuktikan kedua arah frasa "tepat ketika".
6. Hubungan rank–nullity: $2 + 1 = 3$. Secara konseptual, keluaran hanya mengisi bidang W, sedangkan perubahan masukan sepanjang n tidak teramati pada keluaran. Jika kedua masukan berbeda, $t \neq 0$.

Pernyataan (3): anggota kodomain belum tentu dapat dicapai

1. Untuk $\lambda = 0$, y dapat dihasilkan tepat ketika $y \in W$, yakni $y_3 = y_1 + y_2$. Vektor $b = (2, 3, 5)^T$ memenuhi syarat ini; $c = (2, 3, 6)^T$ tidak.
2. Contoh masukan untuk b ialah $x = (2, 3, 0)^T$. Semua masukannya adalah $x = (2, 3, 0)^T + t(-1, -1, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Jadi b dapat dicapai tetapi masukannya tidak unik.
3. Dalam SPL $A_0x = c$, jumlah persamaan pertama dan kedua menuntut $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$, sementara persamaan ketiga menuntut nilai yang sama sebesar 6. Kontradiksi ini membuktikan tidak ada masukan untuk c.

4. Bukti alternatif melalui dot product: $n \cdot y = -y_1 - y_2 + y_3 = 0$ untuk setiap $y \in W$. Namun $n \cdot b = 0$ dan $n \cdot c = 1$. Jadi c tidak berada pada bidang keluaran.
5. Kodomain pemetaan adalah $\mathbb{R}^3$, sedangkan himpunan keluaran yang benar-benar dicapai adalah $\text{Col}(A_o) = W$, sebuah subruang sejati $\mathbb{R}^3$. Menjadi anggota kodomain tidak cukup untuk menjamin ketercapaian.

Sintesis yang diharapkan

Sumber seluruh gejala pada $\lambda = 0$ adalah ketergantungan kolom ketiga terhadap dua kolom pertama. Ketergantungan ini membuat determinan nol dan rank dua: keluaran terbatas pada bidang W, dan ruang null satu dimensi menimbulkan ambiguitas masukan. Dengan demikian, kegagalan ketercapaian semua keluaran dan kegagalan keunikan masukan merupakan dua konsekuensi yang saling terkait, bukan dua fakta yang berdiri sendiri.

3. Diketahui ruang vektor P_5, yaitu ruang polinomial berkoefisien real dengan derajat paling tinggi 5, dan enam polinomial: **(Nilai = 15)**

$$p_1(x) = 1 + x,$$
$$p_2(x) = x + x^2,$$
$$p_3(x) = x^2 + x^3,$$
$$p_4(x) = x^3 + x^4,$$
$$p_5(x) = x^4 + kx^5,$$
$$p_6(x) = k + x^5.$$

Ditanyakan: tentukan semua nilai $k \in \mathbb{R}$ agar

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

merupakan basis bagi P_5.

Jawaban:
Langkah 1. Gunakan syarat basis
Ruang P_5memiliki basis standar

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$$

sehingga dimensinya adalah

$$\dim(P_5) = 6.$$

Karena terdapat enam polinomial di dalam himpunan tersebut, maka himpunan itu menjadi basis jika dan hanya jika keenam polinomialnya **bebas linear**.
Untuk membuktikan kebebasan linear menggunakan sifat determinan, kita susun matriks Adari koefisien setiap polinomial terhadap basis standar.
Sifat yang akan digunakan adalah

$$\boxed{\det(A) \neq 0 \implies \text{kolom-kolom } A \text{ bebas linear.}}$$

Sebaliknya, jika $\det(A) = 0$, kolom-kolomnya tidak bebas linear sehingga keenam polinomial tersebut tidak dapat menjadi basis P_5.
Langkah 2. Bentuk matriks koefisien A
Tuliskan setiap polinomial dalam urutan pangkat $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

- $p_1(x) = 1 + x$memiliki koefisien $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$.
- $p_2(x) = x + x^2$memiliki koefisien $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$.
- $p_3(x) = x^2 + x^3$memiliki koefisien $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

- $p_4(x) = x^3 + x^4$memiliki koefisien $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$.
- $p_5(x) = x^4 + kx^5$memiliki koefisien $(0, 0, 0, 0, 1, k)$.
- $p_6(x) = k + x^5$memiliki koefisien $(k, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Dengan menjadikan koefisien setiap polinomial sebagai kolom, diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Agar keenam polinomial bebas linear, kita perlu memenuhi

$$\boxed{\det(A) \neq 0}.$$

Langkah 3. Hitung determinan matriks A

Kita gunakan ekspansi kofaktor pada baris pertama:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{vmatrix}.$$

Pada baris pertama, hanya terdapat dua elemen yang tidak nol, yaitu $a_{11} = 1$dan $a_{16} = k$.
Berdasarkan rumus ekspansi kofaktor,

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{16}C_{16},$$

dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, di mana M_{ij}adalah determinan minor.
Jadi,

$$\det(A) = M_{11} + k(-1)^{1+6}M_{16}.$$

Karena $(-1)^7 = -1$, maka

$$\det(A) = M_{11} - kM_{16}.$$

Menghitung minor M_{11}:

Hapus baris pertama dan kolom pertama, sehingga

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{vmatrix}.$$

Matriks tersebut berbentuk segitiga bawah, sehingga determinannya adalah hasil kali elemen diagonal utama:

$$M_{11} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Menghitung minor M_{16}:

Hapus baris pertama dan kolom keenam, sehingga

$$M_{16} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Matriks ini berbentuk segitiga atas, sehingga

$$M_{16} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot k = k.$$

Substitusikan kedua hasil tersebut ke rumus determinan:

$$\begin{aligned} \det(A) &= M_{11} - kM_{16} \\ &= 1 - k(k) \\ &= 1 - k^2. \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\boxed{\det(A) = 1 - k^2}.$$

Langkah 4. Gunakan syarat $\det(A) \neq 0$

Agar keenam polinomial bebas linear, harus berlaku

$$\det(A) \neq 0.$$

Substitusikan determinan yang telah diperoleh:

$$1 - k^2 \neq 0.$$

Pindahkan suku-suku sehingga diperoleh

$$k^2 \neq 1.$$

Karena

$$k^2 - 1 = (k-1)(k+1),$$

maka

$$(k-1)(k+1) \neq 0.$$

Hasil ini berarti

$$k \neq 1 \text{ dan } k \neq -1.$$

Langkah 5. Kesimpulan

Karena P_5berdimensi 6, keenam polinomial tersebut membentuk basis jika dan hanya jika keenamnya bebas linear. Berdasarkan hasil determinan,

$$\det(A) = 1 - k^2 \neq 0$$

jika dan hanya jika $k \neq \pm 1$.

Jadi, **semua nilai k yang memenuhi adalah** boleh berupa sembarang bilangan real, kecuali $k = -1$ dan $k = 1$.

4. Misalkan V adalah ruang vektor semua barisan real yang hanya memiliki sejumlah berhingga suku tak nol. Diketahui himpunan **(Nilai = 10 + 5)**

$$B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

dengan

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots), \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots), \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Misalkan $U = span\{v_1, v_2, v_3\}$, sehingga B merupakan basis bagi U.

Didefinisikan transformasi linear

$$T: U \longrightarrow V$$

dengan ketentuan

$$T(v_i) = w_i,\ i = 1,2,3,$$

di mana

$$w_1 = (1,1,0,0,\dots),$$
$$w_2 = (0,1,1,0,\dots),$$
$$w_3 = (1,0,1,0,\dots).$$

Pertanyaan:

(a). Tentukan matriks representasi transformasi linear T terhadap basis B pada domain dan basis standar pada kodomain yang relevan.

(b) Tentukan hasil transformasi dari barisan

$$v = (2,3,-1,1,0,0\dots).$$

Jawaban:

a. Menentukan matriks representasi transformasi T

Matriks representasi transformasi linear diperoleh dengan menyusun koordinat hasil transformasi setiap elemen basis sebagai kolom.

Diketahui

$$T(v_1) = (1,1,0,0,\dots),$$

$$T(v_2) = (0,1,1,0,\dots),$$

$$T(v_3) = (1,0,1,0,\dots).$$

Ketiga hasil tersebut memiliki koordinat tak nol pada tiga posisi pertama. Oleh karena itu, representasi koordinatnya adalah

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi, matriks representasi transformasi linear Tadalah

$$\boxed{[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matriks ini merepresentasikan koordinat tiga suku pertama hasil transformasi. Suku-suku berikutnya selalu nol untuk transformasi yang didefinisikan pada U.

b. Menentukan hasil transformasi $T(v)$

Diketahui

$$v = (2,3,-,1,0,0\dots).$$

Koordinat v terhadap basis Badalah

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gunakan matriks representasi transformasi:

$$[T(v)] = [T][v]_B.$$

Substitusikan:

$$[T(v)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kalikan matriks dengan vektor koordinat:

$$[T(v)] = \begin{pmatrix} 1(2) + 0(3) + 1(-1) \\ 1(2) + 1(3) + 0(-1) \\ 0(2) + 1(3) + 1(-1) \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$[T(v)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Karena hasil transformasi merupakan barisan, kita tuliskan kembali dalam bentuk barisan:

$$\boxed{T(v) = (1, 5, 2, 0, 0, \ldots)}$$

5. **(Soal Bonus, nilai 10)** Diberikan bidang A: 2x – 3y + 2z = 4 dan bidang B: 4x + 2y - z = 6, apakah kedua bidang ini ortogonal atau paralel? Jika ortogonal, tentukan persamaan parametrik garis perpotongannya dengan eliminasi Gauss.

Jawaban:

Vektor normal masing-masing bidang adalah

$\mathbf{n}_A$ = (2,-3,2)
$\mathbf{n}_B$ = (4,2,-1)

Hitung hasil kali dot kedua vektor normal:

$\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B$ = (2)(4) + (-3)(2) + (2)(-1) = 8 – 6 – 2 = 0

Karena hasil kali dot sama dengan nol, kedua bidang ortogonal.

2. Menentukan garis perpotongan dengan eliminasi Gauss

Tuliskan kedua persamaan dalam bentuk matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \text{R2} - 4/2\ \text{R1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -5 & -2 \end{bmatrix} \text{R2}/8 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Dari baris kedua diperoleh:

$$y - \frac{5}{8}z = -\frac{1}{4} \rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}z$$

Dari baris pertama:

$$2x - 3y + 2z = 4 \rightarrow x = 2 + \frac{3}{2}y - z$$

Substitusikan nilai y:

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{3}{2}(-\frac{1}{4} + \frac{5}{8}z) - z \\ &= \frac{13}{8} - \frac{1}{16}z \end{aligned}$$

Misalkan z = t, dengan t $\in$ R. Persamaan parametrik garis perpotongan adalah

$$\begin{aligned} x &= \frac{13}{8} - \frac{1}{16}t \\ y &= -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}t \\ z &= t \end{aligned}$$

SELAMAT MENGERJAKAN
Total Nilai = 110