Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :……
NIM/Kelas:……
T.tangan :……

Solusi Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Nugraha Priya Nugraha
Rabu, 7 Oktober 2026
Waktu: 105 menit

---

1. Diberikan **u** = (2, −1, 3), **v** = (1, 2, −1), dan **w** = (3, 0, 2) di R^3. Ketiga vektor berpangkal di *O* = (0, 0, 0). Diberikan pula titik *P* = (1, −2, 2). **(Nilai = 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3)**
   (a) Tentukan persamaan bidang Π yang direntang oleh **v** dan **w** dan melalui *O*.
   (b) Tentukan persamaan bidang Σ yang melalui *P* dan sejajar dengan Π.
   (c) Tentukan jarak antara Π dan Σ.
   (d) Tentukan jarak *P* ke Π dan jelaskan kaitannya dengan hasil bagian c.
   (e) Tentukan volume *paralelipiped* yang dibentuk oleh **u**, **v**, dan **w**.

Jawaban:

(a) Bidang yang direntang oleh v dan w

Langkah 1. Cari vektor normal n melalui hasil kali silang v × w. Vektor normal tegak lurus terhadap kedua vektor pembentuk bidang.

$$n = v \times w = (2(2) - (-1)(0), (-1)(3) - 1(2), 1(0) - 2(3))$$
$$n = (4, -5, -6)$$

Karena n tidak nol, v dan w tidak sejajar sehingga keduanya benar-benar merentang sebuah bidang.

Langkah 2. Bidang melalui O memiliki persamaan n · ((x, y, z) − O) = 0.

$$\Pi: 4x - 5y - 6z = 0$$

Langkah 3. Periksa bahwa kedua vektor berada pada bidang.

$$n \cdot v = 4(1) - 5(2) - 6(-1) = 0$$
$$n \cdot w = 4(3) - 5(0) - 6(2) = 0$$

(b) Jawaban b Bidang sejajar melalui P

Langkah 1. Bidang sejajar memiliki vektor normal yang sama. Gunakan n = (4, −5, −6) dan titik P = (1, −2, 2).

$$4(x - 1) - 5(y + 2) - 6(z - 2) = 0$$

Langkah 2. Buka tanda kurung dan gabungkan konstanta.

$$4x - 4 - 5y - 10 - 6z + 12 = 0$$
$$\Sigma: 4x - 5y - 6z = 2$$

Pemeriksaan: substitusi P menghasilkan 4(1) − 5(−2) − 6(2) = 2. Dengan demikian P berada pada Σ.

(c) Jawaban c Jarak dua bidang sejajar

Langkah 1. Tuliskan bidang sebagai n · r = d. Karena kedua bidang menggunakan normal yang sama, jaraknya adalah nilai mutlak selisih konstanta dibagi panjang normal.

$$d(\Pi, \Sigma) = |d_2 - d_1| \,/\, \|n\|$$

Di sini $d_1 = 0$ dan $d_2 = 2$. Panjang normal dihitung dari ketiga komponennya.

$$\|n\| = \sqrt{(4^2 + (-5)^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(16 + 25 + 36)} = \sqrt{77}$$
$$d(\Pi, \Sigma) = |2 - 0| \,/\, \sqrt{77} = 2/\sqrt{77} \approx 0{,}2279$$

(d) Jawaban d Jarak titik ke bidang

Langkah 1. Untuk bidang Ax + By + Cz + D = 0 dan titik (x_o, y_o, z_o), jarak tegak lurus diberikan oleh rumus berikut.

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| \,/\, \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$$

Langkah 2. Ambil A = 4, B = −5, C = −6, D = 0 dari Π. Substitusikan P = (1, −2, 2).

$$d(P, \Pi) = |4(1) - 5(-2) - 6(2)| \,/\, \sqrt{77}$$
$$d(P, \Pi) = |4 + 10 - 12| \,/\, \sqrt{77} = 2/\sqrt{77}$$

Hasilnya sama dengan bagian e. P berada pada Σ, dan semua titik pada Σ mempunyai jarak tegak lurus yang sama ke bidang sejajar Π.

(e) Jawaban e Volume paralelipiped

Langkah 1. Volume adalah nilai mutlak hasil kali skalar rangkap tiga. Gunakan hasil silang yang sudah diperoleh pada bagian c.

$$V = |u \cdot (v \times w)| = |u \cdot n|$$

Langkah 2. Hitung hasil kali titik u dengan n.

$$u \cdot n = 2(4) + (-1)(-5) + 3(-6) = 8 + 5 - 18 = -5$$

$$V = |-5| = 5\ satuan\ volume$$

Tanda negatif menunjukkan orientasi ketiga vektor, bukan volume negatif. Sebagai pemeriksaan geometris, luas alas adalah ‖v × w‖ = √77, sedangkan tinggi dari ujung u ke Π adalah 5/√77. Luas alas dikali tinggi menghasilkan 5.

2. Diberikan dua bidang di R^3, $P_1: 2x - y + 2z = 5$ dan $P_2: x + 2y + 2z = 3$. Tentukan apakah kedua bidang tersebut sejajar atau berpotongan? Jika sejajar hitung jarak keduanya, tetapi jika berpotongan tentukan garis perpotongannya dan sudut lancip antara kedua bidang. **(Nilai = 4 + 4)**

Jawaban:

Vektor normal masing-masing bidang adalah: $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 2)$ dan $\mathbf{n}_2 = (1, 2, 2)$.

Dua bidang sejajar jika vektor normalnya saling merupakan kelipatan skalar. Karena $(2, -1, 2) \neq k(1, 2, 2)$, maka kedua vektor normal tidak sejajar, sehingga kedua bidang berpotongan.

Untuk **menentukan garis perpotongan, selesaikan SPL:**

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh solusinya dalam bentuk parametrik, yang merupakan garis perpotonganya dalam bentuk parametrik:

$$x = \frac{13}{5} - \frac{6}{5}t$$
$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}t$$
$$z = t$$

Sudut antara dua bidang sama dengan sudut lancip antara kedua vektor normalnya, dihitung dengan rumus

$$\cos\theta = \frac{|\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\ |}{\|\ \mathbf{n}_1\ \|\|\ \mathbf{n}_2\ \|} = \frac{(2)(1) + (-1)(2) + (2)(2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{9}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63{,}61°$$

=

Jawaban: Diberikan matriks persegi A berukuran 4×4 yang memuat suatu parameter riil k: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & k \\ 3 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Lakukan serangkaian Operasi Baris Elementer (OBE) untuk mereduksi matriks A ke bentuk matriks eselon baris sebagai fungsi dari parameter k. Tentukan nilai parameter k yang menyebabkan *rank*(A) bernilai minimum, dan sebutkan nilai *rank* minimum tersebut!

(b) Untuk nilai parameter k yang meminimumkan rank matriks A (berdasarkan hasil bagian a):
   i. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang baris row(A) dan ruang kolom col(A).
   ii. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang null null(A) dengan menyelesaikan SPL homogen $Ax=0$.
   iii. Buktikan bahwa hasil yang Anda peroleh memenuhi Teorema *Rank–Nullitas* (*Dimension Theorem for Matrices*).

(c) Diberikan vektor $\mathbf{w} = (1, 4, -1, 5)$. Untuk nilai parameter k yang meminimumkan *rank* pada bagian (a), periksa apakah vektor $\mathbf{w}$ berada di dalam ruang kolom col(A)! Jika ya, nyatakan vektor $\mathbf{w}$ secara unik sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis ruang kolom col(A) yang telah Anda peroleh pada bagian b.i)!

(Nilai = 5 + 10 + 5)

Jawaban:

a) **Reduksi Baris (OBE) dan Analisis Nilai Kritis k:**

Lakukan Operasi Baris Elementer (OBE) pada matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & k \\ 3 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & k-1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminasi baris ke-3 dan baris ke-4 menggunakan baris ke-2:

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - R_2]{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas berada dalam bentuk eselon baris (REF):

- Jika $k+1 \neq 0$ ($k \neq -1$), baris ke-3 memuat satu utama (*leading 1*) pada kolom ke-4, sehingga terdapat 3 baris tak-nol dan $\text{rank}(A) = 3$.
- Jika $k+1 = 0 \iff k = -1$, baris ke-3 menjadi seluruhnya nol, sehingga hanya tersisa 2 baris tak-nol.

Dengan demikian, nilai parameter yang meminimumkan rank adalah $\mathbf{k = -1}$, dengan nilai rank minimum $\text{rank}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$.

b) **Basis Ruang Sub-Matriks dan Teorema Rank-Nullitas untuk $k = -1$:**

Untuk $k = -1$, bentuk eselon baris dari A adalah:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i. **Basis Ruang Baris** $\text{row}(A)$**:** Dibentuk oleh baris-baris tak-nol pada matriks eselon U:

$$\text{Basis row}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim(\text{row}(A)) = 2.$$

Basis Ruang Kolom $\text{col}(A)$**:** Kolom pivot berada pada kolom ke-1 dan kolom ke-2. Maka basis $\text{col}(A)$ diambil dari kolom ke-1 dan ke-2 matriks asal A:

$$\text{Basis col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim(\text{col}(A)) = 2.$$

Peubah bebas adalah $x_3 = s$ dan $x_4 = t$ dengan $s, t \in \mathbb{R}$. Vektor solusi umum:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Maka basis dan dimensi ruang null adalah:

$$\text{Basis null}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{nullity}(A) = 2.$$

iii. **Verifikasi Teorema Rank-Nullitas:** Matriks A memiliki $n = 4$ kolom.

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 2 + 2 = 4 = n \quad \text{(Terbukti Sesuai Teorema).}$$

c) **Uji Keberadaan Vektor w di $\text{col}(A)$ dan Kombinasi Linier:**

Vektor $\mathbf{w} \in \text{col}(A)$ jika dan hanya jika terdapat skalar c_1, c_2 sehingga:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linier yang terbentuk: (1) $c_1 + 2c_2 = 1$, (2) $2c_1 + 5c_2 = 4$, (3) $c_1 + c_2 = -1$, (4) $3c_1 + 7c_2 = 5$. Dari persamaan (1) dan (3): kurangkan (1) dengan (3) menghasilkan $c_2 = 2$. Substitusi ke (3) menghasilkan $c_1 = -1 - 2 = -3$. Uji konsistensi pada persamaan lain: - Persamaan (2): $2(-3) + 5(2) = -6 + 10 = 4$ (Cocok). - Persamaan (4): $3(-3) + 7(2) = -9 + 14 = 5$ (Cocok). Karena sistem konsisten, $\mathbf{w} \in \text{col}(A)$ dan kombinasi linier uniknya adalah:

$$\mathbf{w} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

3. Sebuah mesin pencari merepresentasikan satu *query* (q) dan dua dokumen (d_1 dan d_2) sebagai vektor fitur terpusat di $\mathbb{R}^4$: **q** = (3, 1, 2, 0), **d_1** = (1, 1, 0, 0), **d_2** = (1, −1, 1, 1). Didefinisikan W = *span*{**d_1, d_2**}.
   (a) Tunjukkan bahwa {**d_1, d_2**} merupakan himpunan ortogonal. **(Nilai = 4)**
   (b) Hitung nilai kosinus sudut antara **q** dan **d_1**, serta antara **q** dan **d_2**. Berdasarkan hasil tersebut, tentukan dokumen yang membentuk sudut lebih kecil dengan **q**. **(Nilai = 4)**
   (c) Tentukan proyeksi ortogonal **q** pada W, yaitu **proj_w (q)**. **(Nilai = 4)**
   (d) Hitung jarak Euclidean dari **q** ke W. **(Nilai = 4)**

Jawaban:

q = (3, 1, 2, 0), d_1 = (1, 1, 0, 0), d_2 = (1, −1, 1, 1), W = span{d_1, d_2}.

(a) [4 poin]

$d_1 \cdot d_2$ = (1)(1) + (1)(−1) + (0)(1) + (0)(1) = 0.

Karena d_1 dan d_2 keduanya bukan vektor nol serta $d_1 \cdot d_2 = 0$, maka d_1 dan d_2 ortogonal. Jadi, {d_1, d_2} merupakan himpunan ortogonal.

(b) [4 poin]

$\|q\| = \sqrt{14}$, $\|d_1\| = \sqrt{2}$, $\|d_2\| = 2$.

$q \cdot d_1 = 4$, $q \cdot d_2 = 4$.

$\cos \theta_1 = 4/(\sqrt{14}\sqrt{2}) = 2/\sqrt{7} \approx 0{,}756$.

$\cos \theta_2 = 4/(2\sqrt{14}) = 2/\sqrt{14} \approx 0{,}535$.

Karena $\cos \theta_1 > \cos \theta_2$, maka $\theta_1 < \theta_2$. Jadi, dokumen yang direpresentasikan oleh d_1 membentuk sudut lebih kecil dengan q.

(c) [4 poin]

Karena $\{d_1, d_2\}$ ortogonal, proyeksi q pada W dihitung langsung dengan:

$\text{proj}_W(q) = [(q \cdot d_1)/(d_1 \cdot d_1)]d_1 + [(q \cdot d_2)/(d_2 \cdot d_2)]d_2$.

$d_1 \cdot d_1 = 2$, $d_2 \cdot d_2 = 4$.

$\text{proj}_W(q) = (4/2)d_1 + (4/4)d_2 = 2d_1 + d_2$

$= 2(1, 1, 0, 0) + (1, -1, 1, 1) = (3, 1, 1, 1)$.

(d) [4 poin]

$q - \text{proj}_W(q) = (3, 1, 2, 0) - (3, 1, 1, 1) = (0, 0, 1, -1)$.

$\text{dist}(q, W) = \|q - \text{proj}_W(q)\| = \sqrt{(1^2 + (-1)^2)} = \sqrt{2}$.

Jadi, jarak Euclidean dari q ke W adalah $\sqrt{2}$.

Rincian penskoran

Komponen	Poin
(a) Menghitung dot product; menyimpulkan ortogonal	2 + 2
(b) Norma dan dot product; dua nilai kosinus; keputusan	1 + 2 + 1
(c) Rumus proyeksi; koefisien; vektor proyeksi	1 + 2 + 1
(d) Vektor residual; norma residual; simpulan	1 + 2 + 1

4. Misalkan P_2 adalah ruang vektor semua polinom real berderajat paling tinggi 2. Diberikan:

$$\mathbf{p_1}(x) = 1 + x, \quad \mathbf{p_2}(x) = x + x^2, \quad \mathbf{p_3}(x) = 1 + x^2,$$
$$B = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}, \quad \text{dan} \quad \mathbf{p}(x) = 5 + x + 2x^2.$$

(a) Tunjukkan bahwa B merupakan basis untuk P_2. **(Nilai = 4)**
(b) Tentukan vektor koordinat $[\mathbf{p}]_B$. **(Nilai = 4)**
(c) Didefinisikan $W = \{\mathbf{f} \in P_2 \mid \mathbf{f}(1) = 0\}$. Tunjukkan bahwa W merupakan subruang dari P_2. **(Nilai = 4)**
(Petunjuk: Gunakan syarat aksioma ruang vector)
(d) Lanjutan soal (c) di atas, tentukan satu basis untuk W dan tentukan dim(W). **(Nilai = 4)**

Jawaban:

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = 1 + x^2, \quad p(x) = 5 + x + 2x^2.$$

(a) [4 poin]
Terhadap basis standar $\{1, x, x^2\}$, vektor koefisien p_1, p_2, dan p_3 berturut-turut adalah (1, 1, 0), (0, 1, 1), dan (1, 0, 1). Bentuk matriks dengan ketiga vektor tersebut sebagai kolom:

$A = [[1, 0, 1], [1, 1, 0], [0, 1, 1]]$.

$\det(A) = 2 \neq 0$.

Maka kolom-kolom A bebas linier dan membangun $\mathbb{R}^3$. Dengan korespondensi koefisien terhadap $\{1, x, x^2\}$, B bebas linier dan membangun P_2. Jadi, B merupakan basis untuk P_2.

(b) [4 poin]
Cari c_1, c_2, c_3 sehingga $p = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$. Dengan menyamakan koefisien diperoleh:

$c_1 + c_3 = 5$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_2 + c_3 = 2$.

Diperoleh $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 3$.

$[p]^B = (2, -1, 3)^T$.

Pemeriksaan: $2p_1 - p_2 + 3p_3 = 5 + x + 2x^2$.

(c) [4 poin]
Gunakan uji subruang.

$0 \in W$, karena polinom nol memenuhi $0(1) = 0$.

Jika $f, g \in W$, maka $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$; jadi $f + g \in W$.

Jika $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $f \in W$, maka $(\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha \cdot 0 = 0$; jadi $\alpha f \in W$.

Karena W tidak kosong serta tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, W merupakan subruang dari P_2.

(d) [4 poin]
Ambil $f(x) = a + bx + cx^2 \in W$. Syarat $f(1) = 0$ memberikan $a + b + c = 0$, sehingga $a = -b - c$.

$f(x) = (-b - c) + bx + cx^2 = b(x - 1) + c(x^2 - 1)$.

Jadi, $W = \text{span}\{x - 1, x^2 - 1\}$. Kedua polinom tersebut bebas linier, sehingga salah satu basis untuk W adalah $\{x - 1, x^2 - 1\}$, dan $\dim(W) = 2$.

Rincian penskoran

Komponen	Poin
(a) Vektor koefisien; matriks; determinan; simpulan basis	1 + 1 + 1 + 1
(b) Membentuk SPL; menyelesaikan SPL; menulis koordinat	1 + 2 + 1
(c) Polinom nol; tertutup penjumlahan; tertutup perkalian skalar	1 + 1,5 + 1,5
(d) Parametrisasi; basis; dimensi	2 + 1 + 1

5. Misalkan P_2 adalah ruang polinom real berderajat paling tinggi dua, termasuk polinom nol. Didefinisikan

$T: P_2 \rightarrow R^3$

sebagai berikut. **(Nilai = 4 + 4 + 4)**

$$T(a + bx + cx^2) = (a + 2b - c, 2a - b + c, a + b + c)$$

(a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.

(b) Hitung $T(3 - 2x + x^2)$.

(c) Tentukan matriks T terhadap basis $B = (1, x, x^2)$ di P_2 dan basis standar di R^3.

Jawaban:

(a) Jawaban Pembuktian linearitas

Langkah 1. Ambil dua polinom sembarang $p(x) = a + bx + cx^2$ dan $q(x) = d + ex + fx^2$ serta skalar real λ dan μ. Untuk membuktikan linearitas, tunjukkan $T(\lambda p + \mu q) = \lambda T(p) + \mu T(q)$.

Langkah 2. Susun koefisien polinom gabungan.

$$\lambda p + \mu q = (\lambda a + \mu d) + (\lambda b + \mu e)x + (\lambda c + \mu f)x^2$$

Langkah 3. Masukkan ketiga koefisien tersebut ke definisi T. Komponen pertama menjadi:

$$(\lambda a + \mu d) + 2(\lambda b + \mu e) - (\lambda c + \mu f) = \lambda(a + 2b - c) + \mu(d + 2e - f)$$

Komponen kedua menjadi:

$$2(\lambda a + \mu d) - (\lambda b + \mu e) + (\lambda c + \mu f) = \lambda(2a - b + c) + \mu(2d - e + f)$$

Komponen ketiga menjadi:

$$(\lambda a + \mu d) + (\lambda b + \mu e) + (\lambda c + \mu f) = \lambda(a + b + c) + \mu(d + e + f)$$

Langkah 4. Gabungkan ketiga komponen. Masing-masing adalah λ kali komponen T(p) ditambah μ kali komponen T(q).

$$T(\lambda p + \mu q) = \lambda T(p) + \mu T(q)$$

Karena identitas berlaku untuk semua p, q, λ, dan μ, T merupakan transformasi linear. Identitas ini sekaligus membuktikan sifat penjumlahan dan perkalian skalar.

(b) Jawaban b Menghitung hasil transformasi

Langkah 1. Cocokkan $3 - 2x + x^2$ dengan bentuk $a + bx + cx^2$. Diperoleh $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$. Koefisien x bertanda negatif.

Langkah 2. Hitung setiap komponen secara terpisah.

$$a + 2b - c = 3 + 2(-2) - 1 = -2$$
$$2a - b + c = 2(3) - (-2) + 1 = 9$$
$$a + b + c = 3 - 2 + 1 = 2$$
$$T(3 - 2x + x^2) = (-2, 9, 2)$$

(c) Jawaban c Matriks transformasi

Langkah 1. Kolom matriks adalah citra vektor basis dalam urutan $B = (1, x, x^2)$.

$$T(1) = T(1 + 0x + 0x^2) = (1, 2, 1)$$
$$T(x) = T(0 + 1x + 0x^2) = (2, -1, 1)$$
$$T(x^2) = T(0 + 0x + 1x^2) = (-1, 1, 1)$$

Langkah 2. Letakkan ketiga citra sebagai kolom, bukan baris.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 3. Periksa hubungan matriks dengan definisi T. Vektor koordinat $a + bx + cx^2$ terhadap B adalah $(a, b, c)^T$.

$$A(a, b, c)^T = (a + 2b - c, 2a - b + c, a + b + c)^T$$

Hubungan tersebut tepat sama dengan definisi T. Untuk bagian b, $A(3, -2, 1)^T = (-2, 9, 2)^T$.

6. Vektor **v** = (3, 1, -4) di R^3 mula-mula diproyeksikan ke bidang XZ, selanjutnya bayangannya dicerminkan terhadap titik asal, selanjutnya hasilnya di-*shear* lagi dalam arah y dengan faktor k = 3. Tentukan matriks standard transformasinya dan bayangan akhir vektor **v**. **(Nilai = 4 + 4)**

Jawaban:

1. Proyeksi ke bidang XZ oleh transformasi T_P

Pada bidang XZ, koordinat $y$dibuat nol, sedangkan x dan z tetap.

$(x, y, z) \rightarrow (x, 0, z)$

Untuk **e1** = (1, 0, 0) $\rightarrow T_P$(**e1**) = (1, 0, 0)

Untuk **e2** = (0, 1, 0) $\rightarrow T_P$(**e2**) = (0, 0, 0)

Untuk **e3** = (0, 0, 1) $\rightarrow T_P$(**e3**) = (0, 0, 1)

Matriks standard transformasi: $P_{XZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Refleksi terhadap titik asal oleh transformasi T_R

$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$

Untuk **e1** = (1, 0, 0) $\rightarrow T_R$(**e1**) = (-1, 0, 0)

Untuk **e2** = (0, 1, 0) $\rightarrow T_R$(**e2**) = (0, -1, 0)

Untuk **e3** = (0, 0, 1) $\rightarrow T_R$(**e3**) = (0, 0, -1)

Matriks standard transformasinya: $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Shear dalam arah y, $k = 3$, oleh transformasi T_S

$(x, y, z) \rightarrow (x, y + kx, z)$

Untuk **e1** = (1, 0, 0) $\rightarrow T_S$(**e1**) = (1, 3, 0)

Untuk **e2** = (0, 1, 0) $\rightarrow T_S$(**e2**) = (0, 1, 0)

Untuk **e3** = (0, 0, 1) $\rightarrow T_S$(**e3**) = (0, 0, 1)

Dengan $k = 3$, matriks standard transformasinya: $S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Matriks standar transformasi gabungan

Karena urutannya adalah

$$P_{XZ} \rightarrow R \rightarrow S_y,$$

maka transformasinya dapat dinyatakan sebagai komposisi T_S o T_R o T_P.

dan matriks standard transformasinya adalah $M = S_y R P_{XZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bayangan akhir v

$$T(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. **(Soal Bonus, Nilai = 10)** Diberikan dua buah vector: $\mathbf{u} = (2, -1, 2), \mathbf{v} = (1, 2, 2)$ dan dua buah titik di ruang R^3: $P = (-1, 2, 0), Q = (3, -1, 4)$.
   Jawablah pertanyaan berikut dengan menunjukkan langkah-langkah pengerjaannya:
   (a) Tentukan $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
   (b) Hitung $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, dan jarak antara titik P dan Q.
   (c) Tentukan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
   (d) Tentukan komponen $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}$.
   (e) Tentukan vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{u}$.

Jawaban:

(a)
Diketahui:
u = (2, -1, 2)
v = (1, 2, 2)
Maka:
2**u** – **v** = 2(2, -1, 2) - (1, 2, 2) = (4, -2, 4) - (1, 2, 2) = (3, -4, 2)

(b)
Norma vektor u:
||**u**|| = √(2² + (-1)² + 2²) = √(4 + 1 + 4) = √9 = 3

Norma vektor v:
||**v**|| = √(1² + 2² + 2²) = √(1 + 4 + 4) = √9 = 3

Untuk mencari jarak antara P dan Q, tentukan terlebih dahulu vektor PQ:
PQ = Q – P = (3, -1, 4) - (-1, 2, 0) = (4, -3, 4)

Jarak antara P dan Q:
d(P,Q) = ||PQ|| = √(4² + (-3)² + 4²) = √(16 + 9 + 16) = √41

(c)
Gunakan hubungan:
u · **v** = ||**u**|| ||**v**|| cos θ
Hitung dot product:
u · v = (2)(1) + (-1)(2) + (2)(2) = 2 - 2 + 4 = 4

Karena ||u|| = 3 dan ||v|| = 3, maka:
cos θ = (u · v) / (||u|| ||v||) = cos θ = 4 / (3 × 3) = cos θ = 4/9
Sehingga:
θ = $\cos^{-1}$(4/9) = 63,6°

(d)
Rumus proyeksi **u** pada **v**:
$\text{proj}_{\mathbf{v}}$ **u** = [(**u · v**) / (**v · v**)] **v**

Diketahui:

u · v = 4
v · v = 1² + 2² + 2² = 9
Maka:
$\text{proj}_{\mathbf{v}}$ **u =** (4/9)(1, 2, 2) = (4/9, 8/9, 8/9)

Komponen ortogonal diperoleh dari:

$$\mathbf{u}\perp = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$$

Maka:

$$\mathbf{u}\perp = (2, -1, 2) - (4/9, 8/9, 8/9) = (18/9 - 4/9, -9/9 - 8/9, 18/9 - 8/9) = (14/9, -17/9, 10/9)$$

Untuk memeriksa bahwa hasil tersebut benar-benar ortogonal terhadap **v**:

$$\mathbf{u}\perp \cdot \mathbf{v} = (14/9)(1) + (-17/9)(2) + (10/9)(2) = 14/9 - 34/9 + 20/9 = 0$$

(e)
Rumus vector satuan:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} / ||\mathbf{u}||$$

Karena $||\mathbf{u}|| = 3$, maka:

$$\hat{\mathbf{u}} = (1/3)(2, -1, 2) = (2/3, -1/3, 2/3)$$

Total nilai = 110