

Solusi Kuis ke-1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Matriks, Sistem Persamaan Linier, Determinan

Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Nugraha Priya Utama

Senin, 14 September 2026

Waktu: 60 menit

1. Sebuah perusahaan *Cloud Provider* menyewakan empat tipe *Virtual Machine* (VM) khusus untuk komputasi kecerdasan buatan (AI). Setiap tipe VM membutuhkan alokasi sumber daya (*resource*) perangkat keras yang berbeda dari *server* fisik, dengan spesifikasi sebagai berikut: **(Nilai = 5 + 7,5 + 7,5)**

- Tipe Alpha (x_1): Membutuhkan 3 unit vCPU, 4 GB RAM, dan 2 unit GPU.
- Tipe Beta (x_2): Membutuhkan 5 unit vCPU, 8 GB RAM, dan 3 unit GPU.
- Tipe Gamma (x_3): Membutuhkan 8 unit vCPU, 12 GB RAM, dan 5 unit GPU.
- Tipe Delta (x_4): Membutuhkan 2 unit vCPU, 4 GB RAM, dan 2 unit GPU.

Saat ini, sistem *load balancer* harus mendistribusikan VM sedemikian rupa sehingga kapasitas sebuah *server rack* fisik digunakan sepenuhnya tanpa sisa. Kapasitas *server rack* tersebut adalah:

- Total vCPU: 71 unit
- Total RAM: 112 GB
- Total GPU: 49 unit.

- a) Modelkan masalah alokasi *resource* di atas ke dalam Sistem Persamaan Linear (SPL) $Ax = B$ dan tuliskan matriks *augmented*-nya!
- b) Selesaikan SPL tersebut menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan (wajib sampai bentuk matriks eselon baris tereduksi sesuai standar Howard Anton) untuk mencari solusi umum dari jumlah masing-masing VM (x_1, x_2, x_3, x_4)!
- c) Syarat dari perusahaan menyatakan bahwa setiap tipe VM minimal harus ada 1 yang berjalan ($x_i \geq 1$ dan harus bilangan bulat). Jika perusahaan ingin memaksimalkan jumlah VM tipe Gamma (x_3) untuk klien VVIP mereka, tentukan konfigurasi pasti dari jumlah masing-masing tipe VM yang harus dihidupkan!

Penyelesaian:

a) Persamaan disusun berdasarkan penggunaan masing-masing *resource*:

- **vCPU:** $3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 71$
- **RAM:** $4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 112$
- **GPU:** $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 49$

Matriks *Augmented*:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 2 & 71 \\ 4 & 8 & 12 & 4 & 112 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 49 \end{bmatrix}$$

b) Proses Eliminasi Gauss-Jordan

1. Sederhanakan Baris ke-2 ($R_2 \leftarrow \frac{1}{4} R_2$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 8 & 2 & 71 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 49 \end{array} \right]$$

2. Tukar Baris 1 dengan Baris 2 ($R_1 \leftrightarrow R_2$) agar Pivot utama bernilai 1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 3 & 5 & 8 & 2 & 71 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 49 \end{array} \right]$$

3. Eliminasi kolom pertama di bawah Pivot ($R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ dan $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -13 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -7 \end{array} \right]$$

7. Lakukan Eliminasi Mundur (Fase Gauss-Jordan) untuk men-nol-kan elemen di atas pivot ($R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ dan $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

8. Eliminasi nilai di atas Pivot ke-2 ($R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

4. Jadikan Pivot baris ke-2 bernilai positif 1 ($R_2 \leftarrow -1 \cdot R_2$ dan $R_3 \leftarrow -1 \cdot R_3$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

5. Eliminasi ke bawah pada kolom ke-2 ($R_3 \leftarrow R_3 - R_2$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right]$$

6. Buat Pivot baris ke-3 bernilai positif 1 ($R_3 \leftarrow -1 \cdot R_3$):
(Di titik ini, mahasiswa sudah mencapai Eselon Baris biasa / Metode Gauss).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Dari ketiga irisan di atas, nilai parameter t yang valid (karena VM tidak bisa bernilai pecahan) hanyalah $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pertanyaan meminta kita untuk memaksimalkan jumlah VM Gamma (x_3). Karena $x_3 = t$, maka nilai maksimal yang memenuhi syarat sistem adalah $t = 6$.

Substitusi nilai $t = 6$ ke solusi umum, didapatkan konfigurasi pasti:

- Tipe Alpha (x_1) = $8 - 6 = 2$
- Tipe Beta (x_2) = $7 - 6 = 1$
- Tipe Gamma (x_3) = **6**
- Tipe Delta (x_4) = **6**

2. Diberikan matriks persegi M berukuran 3×3 yang memuat suatu parameter k , yaitu $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- a) Hitung determinan M sebagai fungsi parameter k , dengan operasi baris elementer (OBE), kemudian tentukan nilai k yang menyebabkan matriks M singular **(Nilai = 6)**
- b) Untuk nilai parameter k yang menyebabkan matriks M singular, tentukan solusi umum dari sistem persamaan linier homogen $M\mathbf{x} = 0$ menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Nyatakan vektor solusi $\mathbf{x}$ sebagai bentuk perkalian parameter **(Nilai = 6)**
- c) Tinjau kondisi ketika $k=3$, (i) tentukan matriks adjoin dari M , yaitu $\text{adj}(M)$, dan (ii) tentukan matriks balikan M^{-1} dengan menggunakan rumus matriks adjoin **(Nilai = 4 + 4)**

Penyelesaian:

a) Determinan dan Nilai k Singular:

Lakukan OBE untuk mereduksi matriks M ke bentuk matriks segitiga atas:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Matriks kini telah berwujud matriks segitiga atas:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Karena seluruh operasi yang dilakukan berupa penambahan kelipatan baris, nilai determinan tidak berubah:

$$\det(M) = \det(U) = 1 \times 1 \times (k-1) = k-1$$

Matriks M tidak memiliki balikan (singular) jika dan hanya jika $\det(M) = 0$:

$$k-1 = 0 \iff k = 1$$

b) Solusi SPL Homogen untuk $k = 1$:

Untuk $k = 1$, matriks augmented $[M \mid 0]$ direduksi menggunakan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks terakhir merupakan matriks eselon baris tereduksi (RREF). Dari RREF diperoleh persamaan:

$$x_1 + 3x_3 = 0 \implies x_1 = -3x_3$$

$$x_2 - x_3 = 0 \implies x_2 = x_3$$

Kolom ke-3 tidak memiliki satu utama, sehingga x_3 adalah peubah bebas. Misalkan $x_3 = t$ dengan $t \in \mathbb{R}$, maka vektor solusi umum adalah:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Matriks Adjoin dan Balikan untuk $k = 3$:

Untuk $k = 3$, determinan bernilai $\det(M) = 3 - 1 = 2 \neq 0$. Matriksnya adalah:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitung kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ untuk setiap entri matriks M :

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Matriks adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor:

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks balikan M^{-1} dihitung dengan rumus:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. Diberikan matriks A sebagai berikut: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. a) Tentukan nilai p jika diketahui determinan matriks A adalah 143. Determinan harus dihitung dengan metode ekspansi kofaktor. b) Hitung $\text{tr}(A)$ **(Nilai = 15 + 5)**

Penyelesaian:

a) Hitung determinan A dengan ekspansi kofaktor, kolom ketiga dijadikan acuan (karena banyak 0):

$$\det(A) = (3) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$143 = (3) \{ (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \} + p \{ (4) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \}$$

$$143 = (3)(-2)(8) + (3)(5) + p(4)(11)$$

$$143 = -48 + 15 + 44p$$

$$143 = -33 + 44p$$

$$176 = 44p \rightarrow p = 176/44 = 4$$

b) Matriks A menjadi $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, maka $\text{tr}(A) = \text{jumlah semua elemen diagonal} = 4 + 2 + 4 + 8 = 18$

4. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Jika diketahui $\det(A) = -4$ dan $t = 3$, hitunglah determinan berikut:

a) $\det(2A^{-1}) - \det(A^T)$ b) $\det \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g - 4d & h - 4e & i - 4f \end{pmatrix}$ c) $\det \begin{pmatrix} a + td & b + te & c + tf \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix}$
(Nilai = 5 + 7,5 + 7,5)

Penyelesaian:

a) $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = 8 \frac{1}{\det(A)} = \frac{8}{-4} = -2$

$\det(2A^{-1}) - \det(A^T) = -2 - (-4) = -2 + 4 = 2$

b) Baris 1 dikali -3, jadi determinan matriks yang baru = $(-3)(-4) = 12$

Baris 3 yang baru dikurangi 4 kali baris kedua, determinan tetap

Jadi, $\det \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g - 4d & h - 4e & i - 4f \end{pmatrix} = 12$

c) $\det \begin{pmatrix} a + td & b + te & c + tf \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 - tR2} \det \begin{pmatrix} a - t^2a & b - t^2b & c - t^2c \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix} =$

$\det \begin{pmatrix} (1 - t^2)a & (1 - t^2)b & (1 - t^2)c \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix}$
 $\det \begin{pmatrix} (1 - t^2)a & (1 - t^2)b & (1 - t^2)c \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix} = (1 - t^2) \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 - tR1}$
 $= (1 - t^2) \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (1 - 3^2) (-4) = (-8) (-4) = 32$

5. a) Tentukan persamaan $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ yang menginterpolasi titik-titik pada kurva di sebelah kanan ini.
 b) Berapa nilai y untuk $x = 2$?

(Nilai = 15 + 5)

Penyelesaian:

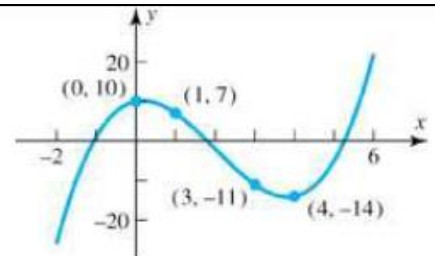
a)

Sulihkan titik (0,10), (1,7), (3, -11), dan (4, -14) ke dalam persamaan $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, diperoleh SPL:

$d = 10$

$a + b + c + d = 7$

$27a + 9b + 3c + d = -11$



$$64a + 16b + 4c + d = -14$$

Sulihkan $d = 10$, maka

$$a + b + c = -3$$

$$27a + 9b + 3c = -21$$

$$64a + 16b + 4c = -24$$

Selesaikan dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$$

Persamaan interpolasi: $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$

$$\begin{aligned} \text{b) Untuk } x = 2, \text{ maka } y &= 2^3 - 6(2)^2 + 2(2) + 10 \\ &= 8 - 24 + 4 + 10 \end{aligned}$$