Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :……
NIM/Kelas:……
T.tangan :……

Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Nugraha Priya Nugraha
Rabu, 7 Oktober 2026
Waktu: 105 menit

---

1. Diberikan **u** = (2, −1, 3), **v** = (1, 2, −1), dan **w** = (3, 0, 2) di R^3. Ketiga vektor berpangkal di *O* = (0, 0, 0). Diberikan pula titik *P* = (1, −2, 2). **(Nilai = 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3)**
   (a) Tentukan persamaan bidang Π yang direntang oleh **v** dan **w** dan melalui *O*.
   (b) Tentukan persamaan bidang Σ yang melalui *P* dan sejajar dengan Π.
   (c) Tentukan jarak antara Π dan Σ.
   (d) Tentukan jarak *P* ke Π dan jelaskan kaitannya dengan hasil bagian c.
   (e) Tentukan volume *paralelipiped* yang dibentuk oleh **u**, **v**, dan **w**.

2. Diberikan dua bidang di R^3, $P_1: 2x - y + 2z = 5$ dan $P_2: x + 2y + 2z = 3$. Tentukan apakah kedua bidang tersebut sejajar atau berpotongan? Jika sejajar hitung jarak keduanya, tetapi jika berpotongan tentukan garis perpotongannya dan sudut lancip antara kedua bidang. **(Nilai = 4 + 4)**

3. Diberikan matriks persegi A berukuran 4×4 yang memuat suatu parameter riil k: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & k \\ 3 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
   (a) Lakukan serangkaian Operasi Baris Elementer (OBE) untuk mereduksi matriks A ke bentuk matriks eselon baris sebagai fungsi dari parameter k. Tentukan nilai parameter k yang menyebabkan *rank*(A) bernilai minimum, dan sebutkan nilai *rank* minimum tersebut!
   (b) Untuk nilai parameter k yang meminimumkan rank matriks A (berdasarkan hasil bagian a):
      i. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang baris row(A) dan ruang kolom col(A).
      ii. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang null null(A) dengan menyelesaikan SPL homogen $A\mathrm{x}=0$.
      iii. Buktikan bahwa hasil yang Anda peroleh memenuhi Teorema *Rank–Nullitas* (*Dimension Theorem for Matrices*).
   (c) Diberikan vektor **w** = $(1, 4, -1, 5)$. Untuk nilai parameter k yang meminimumkan *rank* pada bagian (a), periksa apakah vektor **w** berada di dalam ruang kolom col(A)! Jika ya, nyatakan vektor **w** secara unik sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis ruang kolom col(A) yang telah Anda peroleh pada bagian b.i)!
   (Nilai = 5 + 10 + 5)

4. Sebuah mesin pencari merepresentasikan satu *query* (*q*) dan dua dokumen (d_1 dan d_2) sebagai vektor fitur terpusat di $\mathbb{R}^4$: **q** = (3, 1, 2, 0), $\mathbf{d_1}$ = (1, 1, 0, 0), $\mathbf{d_2}$ = (1, −1, 1, 1). Didefinisikan *W* = *span*{$\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$}.
   (a) Tunjukkan bahwa {$\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$} merupakan himpunan ortogonal. **(Nilai = 4)**
   (b) Hitung nilai kosinus sudut antara **q** dan $\mathbf{d_1}$, serta antara **q** dan $\mathbf{d_2}$. Berdasarkan hasil tersebut, tentukan dokumen yang membentuk sudut lebih kecil dengan **q**. **(Nilai = 4)**
   (c) Tentukan proyeksi ortogonal **q** pada *W*, yaitu $\mathbf{proj_w}(\mathbf{q})$. **(Nilai = 4)**
   (d) Hitung jarak Euclidean dari **q** ke *W*. **(Nilai = 4)**

5. Misalkan P_2 adalah ruang vektor semua polinom real berderajat paling tinggi 2. Diberikan:
   $\mathbf{p_1}(x) = 1 + x$, $\mathbf{p_2}(x) = x + x^2$, $\mathbf{p_3}(x) = 1 + x^2$,
   $B = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$, dan $\mathbf{p}(x) = 5 + x + 2x^2$.
   (a) Tunjukkan bahwa *B* merupakan basis untuk P_2. **(Nilai = 4)**
   (b) Tentukan vektor koordinat $[\mathbf{p}]_B$. **(Nilai = 4)**
   (c) Didefinisikan *W* = {**f** ∈ P_2 | **f**(1) = 0}. Tunjukkan bahwa *W* merupakan subruang dari P_2. **(Nilai = 4)**

(Petunjuk: Gunakan syarat aksioma ruang vector)

(d) Lanjutan soal (c) di atas, tentukan satu basis untuk *W* dan tentukan dim(*W*). **(Nilai = 4)**

6. Misalkan P_2 adalah ruang polinom real berderajat paling tinggi dua, termasuk polinom nol. Didefinisikan

   T: $P_2 \rightarrow R^3$

   sebagai berikut. **(Nilai = 4 + 4 + 4)**

   $$T(a + bx + cx^2) = (a + 2b - c, 2a - b + c, a + b + c)$$

   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.

   (b) Hitung $T(3 - 2x + x^2)$.

   (c) Tentukan matriks T terhadap basis B = $(1, x, x^2)$ di P_2 dan basis standar di R^3.

7. Vektor **v** = (3, 1, -4) di R^3 mula-mula diproyeksikan ke bidang XZ, selanjutnya bayangannya dicerminkan terhadap titik asal, selanjutnya hasilnya di-*shear* lagi dalam arah y dengan faktor *k* = 3. Tentukan matriks standard transformasinya dan bayangan akhir vektor **v**. **(Nilai = 4 + 4)**

8. **(Soal Bonus, Nilai = 10)** Diberikan dua buah vector: $\mathbf{u} = (2, -1, 2), \mathbf{v} = (1, 2, 2)$ dan dua buah titik di ruang R^3: $P = (-1, 2, 0), Q = (3, -1, 4)$.

   Jawablah pertanyaan berikut dengan menunjukkan langkah-langkah pengerjaannya:

   (a) Tentukan $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

   (b) Hitung $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, dan jarak antara titik P dan Q.

   (c) Tentukan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

   (d) Tentukan komponen $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{v}$.

   (e) Tentukan vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{u}$.

Total nilai = 110

==========

Kerjakan pada bagian ksosong, pada halaman dibaliknya, dan pada lembar yang lain. Jika kurang pakai kertas sendiri