

Ujian Akhir Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Semester I tahun akademik 2025/2026

Kamis, 18 Desember 2025

Waktu: 120 menit

Berdoalah terlebih dahulu sebelum ujian dimulai.

A. Pilihan Ganda

Jawablah dengan teliti. Tuliskan jawaban soal pilihan ganda di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3.

<p>1. Manakah di antara pernyataan di bawah ini yang BENAR?</p> <p>A. Jika persamaan karakteristik matriks A adalah $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, maka A memiliki balikan (A is invertible)</p> <p>B. Nilai-nilai eigen matriks A sama dengan nilai-nilai eigen matriks eselon tereduksi dari matriks A.</p> <p>C. Jika λ adalah nilai eigen matriks A, maka sistem persamaan linier $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial</p> <p>D. Jika 0 adalah nilai eigen matriks A, maka himpunan kolom-kolom matriks A bebas linier.</p> <p>E. Jika A adalah matriks persegi dan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk beberapa skalar λ tidak nol, maka \mathbf{x} adalah vektor eigen matriks A</p> <p>F. Semua jawaban A, B, C, D, dan E benar</p> <p>G. Hanya A, C, D benar</p> <p>H. Hanya A, D, E benar</p> <p>I. Hanya B, C, D benar</p> <p>J. Hanya A dan E benar</p> <p>K. Tidak ada satupun jawaban yang benar</p>	<p>2. Manakah di antara pernyataan di bawah ini yang SALAH?</p> <p>A. Jika A adalah matriks $m \times n$, maka $A^T A$ adalah matriks simetri.</p> <p>B. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka A dapat didiagonalisasi secara ortogonal (A is orthogonally diagonalizable)</p> <p>C. Nilai-nilai eigen dari $A^T A$ juga merupakan nilai-nilai singular dari matriks A.</p> <p>D. Setiap matriks $m \times n$ dapat didekomposisi dengan SVD.</p> <p>E. Jawaban B, C, dan D</p> <p>F. Jawaban B dan C</p> <p>G. Jawaban C dan D</p> <p>H. Semua jawaban A, B, C, dan D</p>
<p>3. Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka</p> <p>A. Jika A difaktorkan dengan SVD menjadi $A = U\Sigma V^T$, maka $\det(A) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n$, yang dalam hal ini σ_i adalah nilai-nilai singular matriks A</p> <p>B. Jika A difaktorkan dengan SVD menjadi $A = U\Sigma V^T$, maka $\det(U) = 1$ dan $\det(V) = 1$</p> <p>C. Matriks A selalu dapat didekomposisi menjadi $A = LU$</p> <p>D. Jika matriks A dapat didekomposisi menjadi $A = LU$, maka $\det(A) = \det(U)$</p> <p>E. A, B, C, dan D benar</p> <p>F. A, B, dan D benar</p>	<p>4. Diberikan vektor $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, maka:</p> <p>A. $e_{12} a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya a_3</p> <p>B. $a e_{12}$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya a_2</p> <p>C. $e_{12} a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° searah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_2 \wedge e_3$ dan tingginya a_3</p>

<p>G. C dan D benar</p> <p>H. B dan D benar</p> <p>I. A dan D benar</p> <p>J. Tidak ada jawaban yang memenuhi (tidak ada jawaban yang benar)</p>	<p>D. ae_{12} menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_2 \wedge e_3$ dan tingginya a_3</p> <p>E. $e_{12}a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° searah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya a_3</p> <p>F. Tidak ada jawaban yang benar</p>
<p>5. Manakah pernyataan tentang aljabar quaternion yang TIDAK BENAR?</p> <p>A. Perkalian dua quaternion tidak bersifat komutatif</p> <p>B. Untuk setiap quaternion q, berlaku $q\bar{q} = \ q\ ^2$</p> <p>C. Unit quaternion memenuhi $i^2 = j^2 = k^2 = 1$</p> <p>D. Dua buah quaternion murni jika dikalikan menghasilkan quaternion tidak murni</p> <p>E. Jika <i>invers</i> sebuah quaternion q sama dengan sekawannya (<i>conjugate</i>), maka dipastikan kuadrat <i>magnitude</i> quaternion tersebut selalu sama dengan 1.</p> <p>F. B dan C</p> <p>G. B, C, dan E</p> <p>H. C dan E</p> <p>I. C, D, E</p> <p>J. B, C, D, E</p>	<p>6. Diberikan dua buah vektor di \mathbb{R}^3: $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ dan $v = 2e_1 - e_2 + e_3$. Proyeksi <i>wedge product</i> $u \wedge v$ pada bidang $e_2 \wedge e_3$ adalah:</p> <p>A. $-5(e_2 \wedge e_3)$</p> <p>B. $5(e_2 \wedge e_3)$</p> <p>C. $7(e_2 \wedge e_3)$</p> <p>D. $-7(e_2 \wedge e_3)$</p> <p>E. $12(e_2 \wedge e_3)$</p> <p>F. Tidak ada jawaban yang benar</p>
<p>7. Diberikan tiga buah vektor di \mathbb{R}^3: $a = 2e_1 + e_2$, $b = e_1 + 2e_2 + e_3$, $c = e_2 + 2e_3$. Volume <i>parallelepiped</i> yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut adalah:</p> <p>A. 2 satuan volume</p> <p>B. 6 satuan volume</p> <p>C. 8 satuan volume</p> <p>D. 4 satuan volume</p> <p>E. 0 satuan volume (koplanar)</p> <p>F. Tidak ada jawaban yang benar</p>	<p>8. Diberikan dua buah vektor di \mathbb{R}^2: $a = 2e_1 + e_2$, $b = e_1 - e_2$, dan pseudoscalar $I = e_{12} = e_1 \wedge e_2$. Nilai dari $(ab)I$ adalah?</p> <p>A. $3 + e_{12}$</p> <p>B. $3 - e_{12}$</p> <p>C. $-3 + e_{12}$</p> <p>D. $-3 - e_{12}$</p> <p>E. 0</p> <p>F. Tidak ada jawaban yang benar</p>
<p>9. Perkalian geometri pertama kali ditemukan oleh :</p> <p>A. Herman Gunter Grassman</p> <p>B. Sir William Rowan Hamilton</p> <p>C. William Kingdom Clifford</p> <p>D. Semua jawaban salah</p>	<p>10. Grassman memperkenalkan konsep yang bernama :</p> <p>A. Dot product</p> <p>B. Cross product</p> <p>C. Outer product</p> <p>D. Semua jawaban salah</p>
<p>11. Diketahui B adalah bivektor, dan a adalah vektor di ruang dimensi 3. Maka B.a sama dengan :</p> <p>A. $-B.a$</p> <p>B. $0,5(aB - Ba)$</p> <p>C. $0,5(Ba - ab)$</p> <p>D. $(a.b)c - (a.c)b$</p>	<p>12. Manakah diantara jawaban di bawah ini yang paling benar :</p> <p>A. $a \wedge b = -b \wedge a$</p> <p>B. $a \wedge B = B \wedge a$</p> <p>C. $a \wedge B = abc$</p> <p>D. $a \wedge B = 0,5(aB + Ba)$</p>

E. $(a.c)b - (a.b)c$	E. $B \wedge a = abc$
F. Jawaban a,b dan d benar.	F. Semua jawaban benar
G. Jawaban a,b, dan e benar.	G. Jawaban a,b,c, dan d saja yang benar
H. Jawaban a, c, dan e benar.	H. Jawaban a,b, d, dan e saja yang benar
I. Jawaban c dan d benar.	I. Jawaban a,c dan d saja yang benar
J. Jawaban c dan e benar	J. Jawaban a dan d saja yang benar
K. Jawaban b dan d benar	K. Jawaban a dan b saja yang benar
L. Jawaban b dan e benar.	L. Jawaban b dan d saja yang benar
M. Semua jawaban salah	M. Semua jawaban salah.
N. Semua jawaban benar.	

B. Soal essay

Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

- (Nilai = 12) Diberikan dua buah quaternion: $q_1 = 2 + 3i - j + 2k$, $q_2 = 1 - i + 2j + k$ dan sebuah vektor di \mathbb{R}^3 : $v = (1, 2, -1)$
 - Hitung hasil perkalian $q_1 q_2$ (dengan aturan perkalian quaternion)
 - Tentukan norma dari q_1 dan q_2
 - Tentukan *invers* dari quaternion q_1
 - Rotasi vektor $v = (1, 2, -1)$ sejauh 180° berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu $u = (1, 1, 0)$. Tentukan vektor hasil rotasi, v'

- (Nilai = 10) Diberikan vektor-vektor di \mathbb{R}^3 yang dinyatakan dalam basis standar $\{e_1, e_2, e_3\}$: $u = 2e_1 - e_2 + e_3$, $v = e_1 + 2e_2 - e_3$, dan $w = 3e_1 - e_2 + 2e_3$. *Pseudoscalar* di \mathbb{R}^3 didefinisikan sebagai $I = e_1 e_2 e_3$ (atau e_{123}).
 - Hitung multivektor $M = (u \wedge v) + (v \wedge w)$ sebagai kombinasi linier dari *bivector* basis $\{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$
 - Tentukan *invers* vektor v (yaitu v^{-1})

- (Nilai = 12) Dalam ruang Euclidean 3D dengan basis ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sebuah **rotor** didefinisikan sebagai:

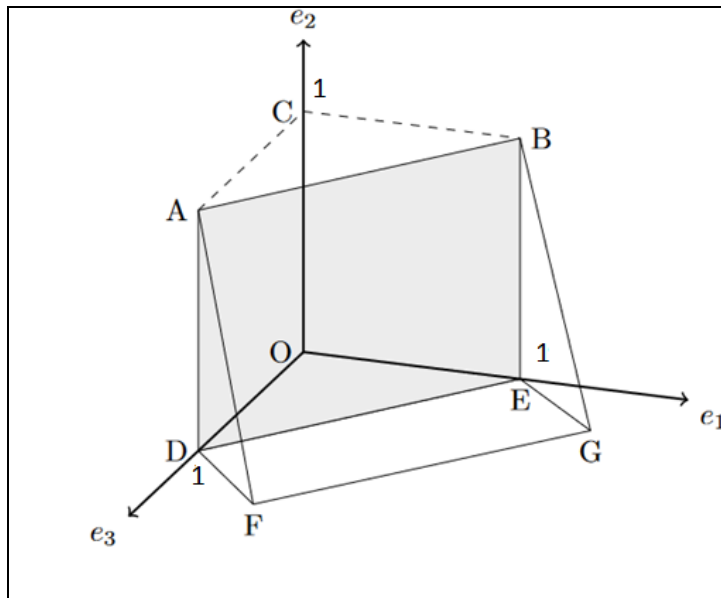
$$R = \cos \frac{\theta}{2} - (e_1 e_2) \sin \frac{\theta}{2}$$

dan vektor $v = e_1$

Jawablah pertanyaan di bawah ini :

- Tentukan **reverse** (atau kebalikan) **rotor** \tilde{R} .
 - Hitung hasil rotasi vektor v (yaitu v')
 - Tentukan besar rotasi, arah rotasi, bidang rotasi, dan besar vektor rotasi yang terjadi.
- (Nilai = 12) Diberikan tiga vektor di ruang Euclidean 3D:
$$a = 2e_1 - e_2 + 3e_3, \quad b = -e_1 + 4e_2 + 2e_3, \quad c = e_1 + e_2 - e_3$$
 - Tentukan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor a dan b menggunakan *wedge product*.
 - Hitung luas bayangan jajaran genjang yang dibentuk oleh a dan b pada bidang $e_1 \wedge e_2$.
 - Tentukan volume jajaran genjang tiga dimensi (parallelepiped) yang dibentuk oleh vektor a, b, c menggunakan *wedge product*.

5. **(Nilai = 10)** Diberikan gambar-gambar bidang di \mathbb{R}^3 seperti di bawah ini. C adalah titik $(0, 1, 0)$, D titik $(0, 0, 1)$, dan E titik $(1, 0, 0)$.



- (a) Nyatakan bidang $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ dalam ekspresi e_1, e_2 , dan e_3
- (b) Nyatakan vektor \overrightarrow{DE} dalam e_1, e_2 , dan e_3 , lalu tunjukkan dengan operasi *meet* bahwa perpotongan bidang ABDE dengan bidang $e_1 \wedge e_3$ sama dengan vektor \overrightarrow{DE}

6. (a) Diberikan matriks 4×3 berikut: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dekomposisi A menjadi matriks Q dan R sedemikian sehingga $A = QR$.

- (b) Salah satu penerapan dekomposisi QR adalah untuk menyelesaikan persoalan *least square*

$\min_x \|Ax - b\|^2$, yaitu selesaikan $Ax = b$. Jika $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, carilah nilai x dengan memanfaatkan Q dan R .

(Nilai = 10)

7. Apa prediksi nilai anda untuk kuliah ini? (A/AB/B/BC/C/D/E)

Total nilai = 102

Batas pengumpulan makalah Algeo: 24 Desember 2025 pukul 23.59.
Terlambat mengumpulkan nilai makalah = 0