Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Ujian Tengah Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Semester I tahun akademik 2025/2026
Selasa, 21 Oktober 2025
Waktu: 120 menit

A. Pilihan Ganda

Tuliskan jawaban soal pilihan ganda (12 soal) di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3. Total nilai = 36.

1. Manakah pernyataan yang BENAR perihal sistem persamaan linier (SPL)?
   A. Sistem persamaan linier homogen $A\mathbf{x} = 0$ selalu konsisten
   B. Pada SPL $A\mathbf{x} = b$, jika $\det(A) = 0$, maka SPL mungkin memiliki banyak solusi
   C. Pada SPL $A\mathbf{x} = b$, jika A berukuran $n \times n$ dan solusinya unik (tunggal), maka $rank(A) = n$
   D. Jawaban A, B, dan C benar
   E. Hanya jawaban A dan C yang benar
   F. Hanya jawaban B dan C yang benar
   G. Hanya jawaban A dan B yang benar

Jawaban: D

2. Misalkan **u** dan **v** adalah vektor di ruang euclidean. Jika **u.v** >=0 dan **v.v** = 0 jika dan hanya jika **v** = 0. Teorema ini disebut dengan :
   A. zero property
   B. homogeneity property
   C. heterogeneity property
   D. positivity property
   E. identity property
   F. transitivity property
   G. Teorema di atas adalah salah
   H. tidak ada jawaban yang benar
   I. semua jawaban benar.

Jawaban: D

3. Jika **u**,**v**, dan **w** adalah vektor maka pernyataan **u** x (**v** x **w**) = (**u**.**w**).**v** – (**u**.**v**).**w** adalah :
   A. Pernyataan yang benar.
   B. Pernyataan yang salah.
   C. Tidak bisa ditentukan.

Jawaban: B

4. Diketahui vektor **u** = 2**i** + **j** + s**k** dan vektor **v** = **i** – 2**j** + **k**. Jika sudut antara vektor **u** dan **v** adalah 60°, maka nilai s adalah :
   A. Bilangan bulat positif

B. Bilangan bulat negatif
C. Bilangan pecahan positif
D. Bilangan pecahan negatif
E. Semua jawaban salah

Jawaban: E

5. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Pernyataan yang benar mengenai *rank*(A) adalah
   A. Jika $r = 2$ dan $s = 1$, maka *rank*(A) = 2.
   B. Jika $r - 2 \neq 0$ atau $s - 1 \neq 0$, maka *rank*(A) = 3.
   C. *Rank*(A) tidak pernah sama dengan 1 berapapun nilai r dan s
   D. Jawaban A, B, dan C benar
   E. Hanya jawaban A dan C yang benar
   F. Hanya jawaban B dan C yang benar
   G. Hanya jawaban A dan B yang benar

Jawaban: D

6. Sudut yang dibentuk oleh bidang $3x - 4y + 5z = 6$ dengan bidang $2x + y - 8z = -11$ adalah (dibulatkan ke integer terdekat):
   A. 42° B. 50° C. 55° D. 59° E. 63° Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: B

7. Diberikan $S = \{\mathbf{v1}, \mathbf{v2}, \mathbf{v3}\}$ adalah himpunan vektor di R^3. Jika S adalah basis di ruang R^3 dan A adalah matriks 3×3 dengan **v1**, **v2**, **v3** sebagai vektor-vektor kolomnya, manakah pernyataan di bawah ini yang salah?
   A. $\det(A) \neq 0$
   B. Vektor-vektor baris dari A saling bebas linier
   C. $A\mathbf{x} = b$ memiliki solusi unik di setiap b di R^3
   D. *Rank*(A) < 3
   E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: D

8. Diberikan $T_1 : R^3 \to R^3$ adalah operator proyeksi ortogonal ke bidang xy, dan $T_2 : R^3 \to R^3$ adalah operator refleksi terhadap bidang yz. Matriks standar untuk transformasi komposisi $T = T_2 \circ T_1$ (yaitu, $T(v) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$) adalah:

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: C

9. Jika $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linier dengan $T(\mathbf{e_1}) = (1,0,2),\ T(\mathbf{e_2}) = (3,-1,1),$ maka bayangan vektor (2, -1) oleh *T* adalah:
   A. (-1, 1, 3) B. (1, 1, 3) C. (-1, -1, 3) D. (1, -1, 3) E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: A

10. Jika *A* adalah matriks *n* × *n* dan *A* adalah *invertible*, maka *nullity A* adalah 0. Pernyataan ini adalah :
    A. Pernyataan yang benar
    B. Pernyataan yang salah
    C. Tidak bisa ditentukan.

Jawaban: A

11. Jika diketahui bahwa determinan matriks A tidak sama dengan 0 maka manakah di bawah ini yang merupakan pernyataan yang benar :
    A. Vektor kolom A pastilah tidak *independently linear*
    B. Vektor kolom A pastilah *independently linear*
    C. Vektor kolom A bisa *independently linear* bisa juga tidak

Jawaban: B

12. Manakah dari berikut ini yang merupakan contoh ruang vektor di $\mathbb{R}^2$?
    A. Himpunan semua vektor bentuk (x, y)di mana $x + y = 1$
    B. Himpunan semua vektor bentuk (x, y)di mana $x = 2y$
    C. Himpunan semua vektor bentuk (x, y)di mana $x \geq 0$
    D. Himpunan semua vektor bentuk (x, y)di mana $x = y^2$
    E. Semua jawaban benar.
    F. Semua jawaban salah.

Jawaban: B

B. Essay
Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

1. **(Nilai = 10)** Diberikan vektor $\mathbf{a} = (1, a, 2), \mathbf{b} = (4,5,6)$. Jika diketahui $\| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \|^2 = 117$, tentukan nilai a.

Jawaban:

Gunakan identitas Lagrange: $\| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \|^2 = \| \mathbf{a} \|^2 \| \mathbf{b} \|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

Hitung $\| \mathbf{a} \|^2$: $\| \mathbf{a} \|^2 = 1^2 + a^2 + 2^2 = 1 + a^2 + 4 = a^2 + 5$

Hitung $\| \mathbf{b} \|^2$: $\| \mathbf{b} \|^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2 = 16 + 25 + 36 = 77$

Hitung dot product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 4 + a \times 5 + 2 \times 6 = 4 + 5a + 12 = 16 + 5a$$

Masukkan ke identitas Lagrange

$$117 = (a^2 + 5)(77) - (16 + 5a)^2$$
$$117 = 77a^2 + 385 - (16 + 5a)^2$$

Hitung kuadrat

$$(16 + 5a)^2 = 16^2 + 2 \times 16 \times 5a + (5a)^2 = 256 + 160a + 25a^2$$

Masukkan ke persamaan

$$117 = 77a^2 + 385 - (256 + 160a + 25a^2)$$
$$117 = 77a^2 + 385 - 256 - 160a - 25a^2$$
$$117 = (77a^2 - 25a^2) + (385 - 256) - 160a$$
$$117 = 52a^2 + 129 - 160a$$

Langkah 7: Susun menjadi persamaan kuadrat

$$52a^2 - 160a + 129 - 117 = 0$$

$$52a^2 - 160a + 12 = 0$$
$$13a^2 - 40a + 3 = 0$$
$$\big(13a \quad - 1\big)(a - 3) = 0$$

Nilai a yang memenuhi adalah

$$\boxed{a = 3 \text{ atau } a = \frac{1}{13}}$$

2. **(Nilai = 15)** Diberikan vektor $\mathbf{u_1} = (1,1,0)$ dan $\mathbf{u_2} = (1,-1,4)$
   (a) Tunjukkan bahwa $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$ saling ortogonal
   (b) Bentuklah himpunan ortonormal $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ dari $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$
   (c) Tentukan vektor v_3 sedemikian sehingga $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ menjadi basis ortonormal untuk R^3

Jawaban:

a. Dua vektor ortogonal jika hasil kali titiknya nol:

$$u_1 \cdot u_2 = (1)(1) + (1)(-1) + (0)(4) = 1 - 1 + 0 = 0$$

b. Normalisasi u_1 dan u_2

$$||u_1|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$||u_2|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4)$$

Jadi, himpunan ortonormalnya adalah:

$$v_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad v_2 = \left(\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{4}{3\sqrt{2}}\right),$$

c. Cari vektor yang ortogonal terhadap v_1 dan v_2, lalu normalisasi

$$v_3 = v_1 \times v_2 =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Hitung determinan:

$$= i(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{2}} - 0) - j(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{2}} - 0) + k(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}})$$

$$= i(\frac{4}{6}) - j\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Normalisasi:

$$||v_3|| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+1}{9}} = \sqrt{1} = 1$$

Jadi, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

3. **(Nilai = 10)** Diberikan himpunan vektor $S = \{(2,-1,4), (3,0,-2), (b,5,b+1)\}$. Tentukan semua nilai b agar S tidak bebas linear

Jawaban:

Agar himpunan vektor S tak-bebas linier, maka salah satu vektor harus dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lainnya. Dengan kata lain, determinan matriks yang dibentuk dari ketiga vektor tersebut (sebagai baris atau kolom) harus **nol**.

Susun ketiga vektor sebagai baris-baris dalam matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ b & 5 & b+1 \end{bmatrix}$$

Hitung determinannya:

$$\text{Det} = 2 \cdot (0 \cdot (b+1) - (-2) \cdot 5) - (-1) \cdot (3 \cdot (b+1) - (-2) \cdot b) + 4 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot b)$$

Sederhanakan:

$$\begin{aligned} &= 2(0+10) + 1(3(b+1) + 2b) + 4(15) \\ &= 2(10) + 1(3b + 3 + 2b) + 60 \\ &= 20 + (5b+3) + 60 \\ &= 83 + 5b \end{aligned}$$

Agar tak-bebas linier, determinan harus **nol**:

$$83 + 5b = 0 \Rightarrow 5b = -83 \Rightarrow b = -\frac{83}{5}$$

4. **(Nilai = 10)** Diberikan $B = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$ adalah basis untuk P_2 (ruang polinom order 2), di mana $\mathbf{p_1} = 1$, $\mathbf{p_2} = 1 + x$ dan $\mathbf{p_3} = 1 + x + x^2$. Diketahui $T: P_2 \to R^2$ adalah transformasi linier sedemikian sehingga:

$$T(p_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; T(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; T(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tentukan $T(2-x+3x^2)$

Jawaban:

Langkah 1: Nyatakan polinom dalam basis B

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2 - x + 3x^2$$
$$a(1) + b(1+x) + c(1+x+x^2) = 2 - x + 3x^2$$
$$(a+b+c) + (b+c)x + cx^2 = 2 - x + 2x^2$$

Samakan koefisien:

$$a + b + c = 2$$
$$b + c = -1$$
$$c = 3$$

Dari c = 3, substitusi:

$$b + 3 = -1 \Rightarrow b = -4$$
$$a - 4 + 3 = 2 \Rightarrow a = 3$$
$$2 - x + 3x^2 = 3p_1 - 4p_2 + 3p_3$$

Langkah 2: Linearitas T

$$T(2-x+3x^2) = 3T(p_1) - 4T(p_2) + 3T(p_3) =$$

$$3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-4+0\\0-4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$$

$$T(2-x+3x^2) = \begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$$

5. **(Nilai = 10)** Tentukan basis untuk subruang dari R^4 yang dibangun oleh vektor-vektor $\mathbf{v_1}$=(1,1,-4,-3), $\mathbf{v_2}$ = (2, 0, 2, -2), $\mathbf{v_3}$ = (2, -1, 3, 2), $\mathbf{v_4}$ = (3, 1, 2, 0).

Jawaban:

Nyatakan semua vektor sebagai vektor baris matriks (baris-baris matriks), lalu lakukan OBE sampai mendapatkan matriks eselon:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & -3\\2 & 0 & 2 & -2\\2 & -1 & 3 & 2\\3 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \ldots \text{OBE} \ldots \begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & -3\\0 & 1 & -5 & -2\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Baris-baris matriks yang tidak nol adalah basis untuk subruang dari R4 yang dibangun oleh keempat vektor di atasmyaitu $\{(1,1,-4,-3),\ (0,1,-5,-2),\ (0,0,1,-\frac{1}{2}),\ (0,0,0,1)\}$

Catatan: Jawaban lain juga benar dengan membuktikan bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, v_4 bebas linier sehingga $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ juga basis untuk subruang yang dibentuk oleh keempat vektor tersebut. Cara lainnya adalah dengan menyatakan setiap vektor sebagai kolom-kolom matriks, lalu lakukan reduksi sampai membentuk matriks eselon, tidak ada baris nol, kemudian tentukan basis ruang kolom, yang hasilnya nanti sama dengan keempat vektor tersebut.

6. **(Nilai = 10)** M_{22} adalah ruang vektor yang berisi semua matriks berukuran 2 x 2. Vektor-vektor berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk M_{22}. Tentukan koordinat **m** = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis tersebut.

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + \; d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} 3a \qquad\qquad\quad + d &= 2 \\ 6a - b - 8c \qquad\quad &= -1 \\ 3a - b - 12c \quad - d &= 0 \\ -6a \qquad - 4c \quad + 2d &= 3 \end{aligned}$$

Matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -8 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -12 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \ldots \text{Gauss-Jordan} \ldots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh:

$a = 1/3$, $b = 9$, $c = -3/4$, $d = 1$

Jadi, koordinat koordinat **m** = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis tersebut adalah $[\mathbf{m}]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 9 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

7. **(Bonus, tidak wajib, nilai = 9)** Diketahui vektor **u'** = (0, -6, 12) adalah hasil transformasi vektor **u** oleh transformasi T yang pertama-tama dicerminkan terhadap bidang xz, berikutnya kontraksi dengan faktor 3, dan terakhir dirotasi terhadap sumbu y sebesar 90° searah jarum jam.
   (a) Tentukan matriks standar T^{-1}
   (b) Tentukan vektor **u**
   (c) Diketahui **v** = (3, -1, 6), tentukan T(**v**)

Jawaban:

a. Tentukan matriks standar untuk T^{-1}

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$T = T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Tentukan vektor u

$$u = T^{-1} u'$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u' = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c. Diketahui v = (3, -1, 6). Tentukan T(v)

$$T(v) = T\,v$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$T(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

SELAMAT MENGERJAKAN

Total Nilai = 110