Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Ujian Akhir Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Semester I tahun akademik 2025/2026
Kamis, 18 Desember 20254
Waktu: 120 menit

Berdoalah terlebih dahulu sebelum ujian dimulai.

A. Pilihan Ganda

Jawablah dengan teliti. Tuliskan jawaban soal pilihan ganda di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3.

1. Manakah di antara pernyataan di bawah ini yang BENAR?
   - A. Jika persamaan karakteristik matriks A adalah $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, maka A memiliki balikan (*A is invertible*)
   - B. Nilai-nilai eigen matriks A sama dengan nilai-nilai eigen matriks eselon tereduksi dari matriks A.
   - C. Jika λ adalah nilai eigen matriks A, maka sistem persamaan linier $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial
   - D. Jika 0 adalah nilai eigen matriks A, maka himpunan kolom-kolom matriks A bebas linier.
   - E. Jika A adalah matriks persegi dan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk beberapa skalar λ tidak nol , maka **x** adalah vektor eigen matriks A
   - F. Semua jawaban A, B, C, D, dan E benar
   - G. Hanya A, C, D benar
   - H. Hanya A, D, E benar
   - I. Hanya B, C, D benar
   - J. Hanya A dan E benar
   - K. Tidak ada satupun jawaban yang benar

   Jawaban: A

2. Manakah di antara pernyataan di bawah ini yang SALAH?
   - A. Jika A adalah matriks $m \times n$, maka A^TA adalah matriks simetri.
   - B. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka A dapat didiagonalisasi secara ortogonal (*A is orthogonally diagonalizable*)
   - C. Nilai-nilai eigen dari A^TA juga merupakan nilai-nilai singular dari matriks A.
   - D. Setiap matriks $m \times n$ dapat didekomposisi dengan SVD.
   - E. Jawaban B, C, dan D
   - F. Jawaban B dan C
   - G. Jawaban C dan D
   - H. Semua jawaban A, B, C, dan D

   Jawaban: F

3. Misalkan A adakah matriks $n \times n$, maka
   - A. Jika A difaktorkan dengan SVD menjadi $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, maka $\det(A) = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}\sigma_n$, yang dalam hal ini σ_i adalah nilai-nilai singular matriks A
   - B. Jika A difaktorkan dengan SVD menjadi $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, maka $|\det(U)| = 1$ dan $|\det(V)| = 1$
   - C. Matriks A selalu dapat didekomposisi menjadi $A = LU$
   - D. Jika matriks A dapat didekomposisi menjadi $A = LU$, maka $\det(A) = \det(U)$
   - E. A, B, C, dan D benar
   - F. A, B, dan D benar
   - G. C dan D benar

4. Diberikan vektor $a = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3$, maka:
   - A. $\mathrm{e}_{12}a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2$ dan tingginya a_3
   - B. $a\mathrm{e}_{12}$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2$ dan tingginya a_2
   - C. $\mathrm{e}_{12}a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2$ sejauh 90° searah

H. B dan D benar
I. A dan D benar
J. Tidak ada jawaban yang memenuhi (tidak ada jawaban yang benar)

Jawaban: H

jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_2 \wedge e_3$ dan tingginya a_3
D. ae_{12} menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_2 \wedge e_3$ dan tingginya a_3
E. $e_{12}a$ menghasilkan efek merotasi proyeksi vektor a pada bidang $e_1 \wedge e_2$ sejauh 90° searah jarum jam dan membentuk volume a_3 dengan bidang alasnya $e_1 \wedge e_2$ dan tingginya a_3
F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: E

5. Manakah pernyataan tentang aljabar quaternion yang TIDAK BENAR?
A. Perkalian dua quaternion tidak bersifat komutatif
B. Untuk setiap quaternion q, berlaku $q\bar{q} = \|q\|^2$
C. Unit quaternion memenuhi $i^2 = j^2 = k^2 = 1$
D. Dua buah quaternion murni jika dikalikan menghasilkan quaternion tidak murni
E. Jika *invers* sebuah quaternion q sama dengan sekawannya (*conjugate*), maka dipastikan kuadrat *magnitude* quaternion tersebut selalu sama dengan 1.
F. B dan C
G. B, C, dan E
H. C dan E
I. C, D, E
J. B, C, D, E

Jawaban: C

6. Diberikan dua buah vektor di $\mathbb{R}^3$: $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ dan $v = 2e_1 - e_2 + e_3$. Proyeksi *wedge product* $u \wedge v$ pada bidang $e_2 \wedge e_3$ adalah:
A. $-5(e_2 \wedge e_3)$
B. $5(e_2 \wedge e_3)$
C. $7(e_2 \wedge e_3)$
D. $-7(e_2 \wedge e_3)$
E. $12(e_2 \wedge e_3)$
F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: B

7. Diberikan tiga buah vektor di $\mathbb{R}^3$: $a = 2e_1 + e_2$, $b = e_1 + 2e_2 + e_3$, $c = e_2 + 2e_3$. Volume *parallelpiped* yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut adalah:
A. 2 satuan volume
B. 6 satuan volume
C. 8 satuan volume
D. 4 satuan volume
E. 0 satuan volume (koplanar)
F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: D

8. Diberikan dua buah vektor di $\mathbb{R}^2$: $a = 2e_1 + e_2$, $b = e_1 - e_2$, dan pseudoscalar $I = e_{12} = e_1 \wedge e_2$. Nilai dari $(ab)I$ adalah?
A. $3 + e_{12}$
B. $3 - e_{12}$
C. $-3 + e_{12}$
D. $-3 - e_{12}$
E. 0
F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: A

9. Perkalian geometri pertama kali ditemukan oleh :
A. Herman Gunter Grassman
B. Sir William Rowan Hamilton
C. William Kingdom Clifford
D. Semua jawaban salah

10. Grassman memperkenalkan konsep yang bernama :
A. Dot product
B. Cross product
C. Outer product

Jawaban: C	D. Semua jawaban salah Jawaban: C
11. Diketahui B adalah bivektor, dan a adalah vektor di ruang dimensi 3. Maka B.a sama dengan : A. -B.a B. 0,5(aB-Ba) C. 0,5(Ba-ab) D. (a.b)c – (a.c)b E. (a.c)b – (a.b)c F. Jawaban a,b dan d benar. G. Jawaban a,b, dan e benar. H. Jawaban a, c, dan e benar. I. Jawaban c dan d benar. J. Jawaban c dan e benar K. Jawaban b dan d benar L. Jawaban b dan e benar. M. Semua jawaban salah N. Semua jawaban benar. Jawaban: J	12. Manakah diantara jawaban di bawah ini yang paling benar : A. a ∧ b = -b ∧ a B. a ∧ B = B ∧ a C. a ∧ B = abc D. a ∧ B = 0,5(aB + Ba) E. B ∧ a = abc F. Semua jawaban benar G. Jawaban a,b,c, dan d saja yang benar H. Jawaban a,b, d, dan e saja yang benar I. Jawaban a,c dan d saja yang benar J. Jawaban a dan d saja yang benar K. Jawaban a dan b saja yang benar L. Jawaban b dan d saja yang benar M. Semua jawaban salah. Jawaban: F

B. Soal essay
Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

1. **(Nilai = 12)** Diberikan dua buah quaternion: $q_1 = 2 + 3i - j + 2k,\ q_2 = 1 - i + 2j + k$ dan sebuah vektor di $\mathbb{R}^3$: $v = (1,2,-1)$
   (a) Hitung hasil perkalian $q_1 q_2$ (dengan aturan perkalian quaternion)
   (b) Tentukan norma dari $q_1\ dan\ q_2$
   (c) Tentukan invers dari quaternion q_1
   (d) Rotasi vektor v = (1,2,−1) sejauh 180° berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu u = (1,1,0). Tentukan vektor hasil rotasi v′

Jawaban:

a. $q_1 q_2 = (2 \cdot 1 - (-3), 2(-1,2,1) + 1(3,-1,2) + (-5,-5,5))$
$= (5, (-2 + 3 - 5, 4 - 1 - 5, 2 + 2 + 5))$
$= 5 - 4i - 2j + 9k$

b. Untuk $q_1 = 2 + 3i - j + 2k$:
$$||q_1|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9 + 1 + 4} = 3\sqrt{2}$$

Untuk $q_2 = 1 - i + 2j + k$:
$$||q_2|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{7}$$

c. Invers: $q^{-1} = \frac{q}{||q||^2}$

Konjugat q_1: $\underline{q_1} = 2 - 3i + j - 2k$

$$||q_1||^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

$$q1^{-1} = \frac{2 - 3i + j - 2k}{18} = \frac{1}{9} - \frac{1}{6}i + \frac{1}{18}j + \frac{1}{9}k$$

d. Langkah 1: Normalisasi sumbu

$$\hat{u} = \frac{u}{||u||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Langkah 2: Bentuk quaternion rotasi

$$qr = cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}\hat{u}$$

$$\frac{\theta}{2} = 90° \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} = 0, sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$qr = 0 + 1 \cdot \hat{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Langkah 3: Representasi vektor sebagai quaternion murni

$$q_v = (0,1,2,-1)$$

Langkah 4: Hitung rotasi (metode efisien untuk $\theta = 180°$

$$v' = 2(\hat{u} \cdot v)\hat{u} - v$$

$$\hat{u} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2) + 0(-1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$2(\hat{u} \cdot v)\hat{u} = 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (3,3,0)$$

$$v' = (3,3,0) - (1,2,-1) = (2,1,1)$$

2. **(Nilai = 10)** Diberikan vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$ yang dinyatakan dalam basis standar $\{e_1, e_2, e_3\}$: $u = 2e_1 - e_2 + e_3,\ v = e_1 + 2e_2 - e_3$, dan $w = 3e_1 - e_2 + 2e_3$. Pseudoscalar di $\mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai $I = e_1e_2e_3$ (atau e_{123}).
   (a) Hitung multivektor $M = (u \wedge v) + (v \wedge w)$ sebagai kombinasi linier dari bivector basis $\{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$
   (b) Tentukan invers vektor v (v^{-1})

Jawaban:

a. Langkah 1: Hitung $u \wedge v$

$u \wedge v = (2e_1 - e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - e_3)$

Dengan menguraikan dan menggunakan sifat antisimetris:

$= 2e_1 \wedge e_1 + 4e_1 \wedge e_2 - 2e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_1 - 2e_2 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1 + 2e_3 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_3$

$= 4e_{12} + 2e_{31} + e_{12} + e_{23} - 2e_{23}$

$= (5e_{12} - e_{23} + 3e_{31})$

Langkah 2: Hitung v∧w

$v \wedge w = (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (3e_1 - e_2 + 2e_3)$

Menguraikan:

$= 3e_1 \wedge e_1 - e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_1 - 2e_2 \wedge e_2 + 4e_2 \wedge e_3 - 3e_3 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_2 - 2e_3 \wedge e_3$

$= -e_{12} - 2e_{31} - 6e_{12} + 4e_{23} - 3e_{31} - e_{23}$

$= (-7e_{12} + 3e_{23} - 5e_{31})$

Langkah 3: Jumlahkan hasilnya

$M = (u \wedge v) + (v \wedge w)$

$= (5e_{12} - e_{23} + 3e_{31}) + (-7e_{12} + 3e_{23} - 5e_{31})$

$= -2e_{12} + 2e_{23} - 2e_{31}$

b. Langkah 1: Hitung norma kuadrat v

$$||v||^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

Langkah 2: Hitung invers

$$v^{-1} = \frac{v}{6} = \frac{e_1 + 2e_2 - e_3}{6}$$

$$v^{-1} = \frac{1}{6}e_1 + \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{6}e_3$$

3. **(Nilai = 12)** Dalam ruang Euclidean 3D dengan basis ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Sebuah **rotor** didefinisikan sebagai:

$$R = \cos\frac{\theta}{2} - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\sin\frac{\theta}{2}$$

dan vektor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$

Jawablah pertanyaan di bawah ini :

(a) Tentukan **reverse rotor** $\tilde{R}$.

(b) Hitung hasil rotasi vektor $\mathbf{v}'$.

(c) Tentukan besar rotasi, arah rotasi, bidang rotasi, dan besar vektor rotasi yang terjadi.

Jawaban:

(a) Reverse rotor $\tilde{R}$

Karena bivector membalik tanda saat di-*reverse*:

$$\widetilde{e_1 e_2} = -e_1 e_2$$

maka:

$$\tilde{R} = \cos\frac{\theta}{2} + (e_1 e_2)\sin\frac{\theta}{2}$$

(b) Menghitung hasil rotasi $v' = R\, v\, \tilde{R}$

Substitusi:

$$v' = \left(\cos\frac{\theta}{2} - e_1 e_2 \sin\frac{\theta}{2}\right) e_1 \left(\cos\frac{\theta}{2} + e_1 e_2 \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Langkah 1: Kalikan bagian kiri

$$(\cos\frac{\theta}{2})\mathrm{e}_1-(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)\mathrm{e}_1\sin\frac{\theta}{2}$$

Karena:

$$\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1=\mathrm{e}_1(\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1)=-\mathrm{e}_1(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)=-\mathrm{e}_2$$

maka:

$$=\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_1+\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_2$$

Langkah 2: Kalikan dengan $\tilde{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}' &= (\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_1+\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_2)(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\sin\frac{\theta}{2})\\ &=\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_1+\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_2)\end{aligned}$$

Gunakan:

$$\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2=-\mathrm{e}_1$$

maka:

$$\mathrm{v}'=(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})\mathrm{e}_1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}_2$$

Langkah 3: Gunakan identitas trigonometri

$$\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$
$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$$

Hasil akhir

$$\boxed{\mathrm{v}'=\cos\theta\,\mathrm{e}_1+\sin\theta\,\mathrm{e}_2}$$

(c) Jadi

- Rotor *R* menghasilkan **rotasi sebesar** θ
- Bidang rotasi: **bivector $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$**
- Arah rotasi: dari $\mathbf{e}_1$ menuju $\mathbf{e}_2$ (berlawanan arah jarum jam dilihat dari $+\mathbf{e}_3$)
- Besar vektor tetap (rotasi murni)

4. **(Nilai =12)** Diberikan tiga vektor di ruang Euclid 3-dimensi:

$$a=2e_1-e_2+3e_3, b=-e_1+4e_2+2e_3, c\ =e_1+e_2-e_3$$

(a) Tentukan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ menggunakan *wedge product*.

(b) Hitung luas bayangan jajaran genjang yang dibentuk oleh *a* dan *b* pada bidang $e_1\wedge e_2$.

(c) Tentukan volume jajaran genjang tiga dimensi (parallelepiped) yang dibentuk oleh vektor *a*, *b*, *c* menggunakan *wedge product*.

Jawaban:

(a) Luas jajaran genjang yang dibentuk oleh $\vec{a}$dan $\vec{b}$

Hitung *wedge product*:

$$a \wedge b = \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{array}$$

Komponen:

$$a \wedge b = (-1 \cdot 2 - 3 \cdot 4)e_1 - (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1))e_2 + (2 \cdot 4 - (-1)(-1))e_3$$
$$= (-2 - 12)e_1 - (4 + 3)e_2 + (8 - 1)e_3 = -14e_1 - 7e_2 + 7e_3$$

Besarnya:

$$| a \wedge b | = \sqrt{(-14)^2 + (-7)^2 + 7^2} = \sqrt{196 + 49 + 49} = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$$

Jadi Luas jajaran genjang: $7\sqrt{6}$

(b) Luas bayangan jajaran genjang pada bidang $e_1 \wedge e_2$

Luas bayangan sama dengan nilai mutlak komponen $e_1 \wedge e_2$ dari *wedge product*.
Komponen $e_1 \wedge e_2$:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (2)(4) - (-1)(-1) = 8 - 1 = 7$$

Luas bayangan pada bidang $e_1 \wedge e_2$: 7

(c) Volume *parallelepiped* yang dibentuk oleh *a*, *b*, *c*:

Volume diberikan oleh:

$$V = | a \wedge b \wedge c |$$

Setara dengan determinan:

$$V = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hitung determinan:

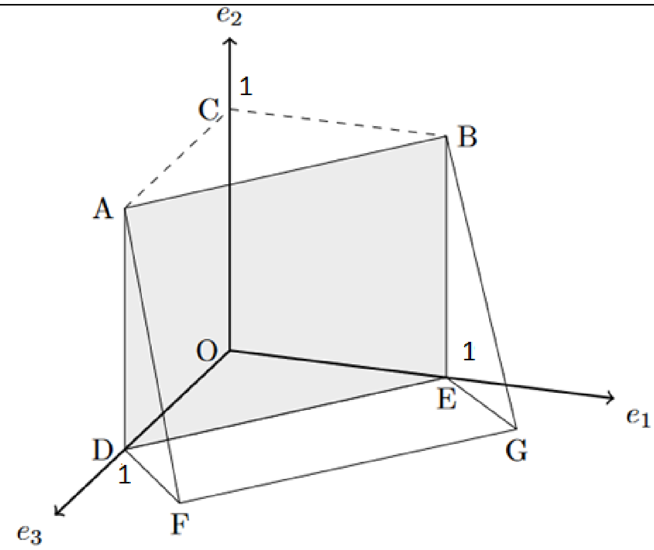
$$= 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2(-4 - 2) + 1(1 - 2) + 3(-1 - 4)$$
$$= 2(-6) + (-1) + 3(-5) = -12 - 1 - 15 = -28$$

Ambil nilai mutlak:

$$V = 28$$

Volume parallelepiped: 28

5. **(Nilai = 10)** Diberikan gambar-gambar bidang di R^3 seperti di bawah ini. C adalah titik (0, 1, 0), D titik (0, 0, 1), dan E titik (1, 0, 0).

	(a) Nyatakan bidang $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ dalam ekspresi e_1, e_2, dan e_3 (b) Nyatakan vektor $\overrightarrow{DE}$ dalam e_1, e_2, dan e_3, lalu tunjukkan dengan operasi *meet* bahwa perpotongan bidang ABDE dengan bidang $e_1 \wedge e_3$ sama dengan vektor $\overrightarrow{DE}$

Jawaban:

(a)

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -e_2$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = e_1 - e_3$$

$$\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = -e_2 \wedge (e_1 - e_3) = -e_2 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3 = e_{23} - e_{21}$$

(b) $$\overrightarrow{DE} = E - D = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = e_1 - e_3$$

Perpotongan bidang ABDE dengan bidang $e_1 \wedge e_3$ dicari dengan operasi *meet*:

Misalkan bidang ABDE = X, bidang $e_1 \wedge e_3 = e_{13}$ = Y,

maka $X \vee Y = X^* \cdot Y = e_{123}\,(e_{23} - e_{21}) \cdot e_{13}$

$= (e_{12323} - e_{12321}) \cdot e_{13}$

$= (-e_1 - e_3) \cdot e_{13}$

$= ½\,((-e_1 - e_3)\,e_{13} - e_{13}(-e_1 - e_3))$

$= ½\,(-e_3 + e1 - e3 + e_1)$

$= ½\,(-2e_3 + 2e_1)$

$= e_1 - e_3 = \overrightarrow{DE}$

6. (a) Diberikan matriks 4 x 3 berikut: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dekomposisi A menjadi matriks Q dan R sedemikian sehingga $A = QR$.

(b) Salah satu penerapan dekomposisi QR adalah untuk menyelesaikan persoalan *least square* $\min_x \|Ax - b\|^2$, yaitu selesaikan $Ax = b$. Jika $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, carilah nilai x dengan memanfaatkan Q dan R.

(Nilai = 10)

Jawaban:

(a)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{21}}{21} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{21}}{21} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{7} \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{21}}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{3} \end{bmatrix}$$

(b) $Ax = b$

$QRx = b$

$Q^TQRx = Q^Tb$

$IRx = Q^Tb$

$Rx = Q^Tb$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{21}}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{21}}{3} \end{bmatrix}$$

Dengan teknik substitusi mundur diperoleh $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

7. Apa prediksi nilai anda untuk kuliah ini? (A/AB/B/BC/C/D/E)