Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM/Kelas:…………………………
T.tangan :…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Nilai eigen dan vektor eigen, dekomposisi matriks (SVD, QR, LU), Aljabar kompleks, Aljabar Quaternion
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Rabu, 26 November 2025
Waktu: 110 menit

---

1. **(Nilai 15)** Diberikan matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan:

   a) semua nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A tersebut
   b) matriks yang mendiagonalisasi A dan matriks diagonal yang dihasilkan
   c) matriks A^{10} dan tr(A^{10})

Jawaban:

a. det ($\boldsymbol{\lambda}$I-A) = 0

Det $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 & 3 \\ -3 & \lambda + 1 & 3 \\ -2 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

Gunakan metode apa saja

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

Untuk $\lambda_1 = 2$:

$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Gauss Jordan

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

x1 - x2 = 0, x3 = 0

x1 = x2 dan x3 = 0

v1 = $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = 1$:

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Gauss Jordan

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

x1 - x3 = 0, x2 = 0

x1 = x3 dan x2 = 0

$$v2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Untuk $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Gauss Jordan

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

x1 - x3 = 0, x2 - x3 = 0

x1 = x2 = x3

$$v3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

b. Matriks yang mendiagonalisasi A dan matriks diagonal yang dihasilkan

Matriks P (kolomnya vektor eigen)

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Inverse dengan metode apa saja

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriks $D = P^{-1}AP$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

c. Nilai matriks A^{10}

$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$

$$A^{10} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1024 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{vmatrix} 1024 & 0 & -1023 \\ 1023 & 1 & -1023 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. **(Nilai 15)** Diberikan sebuah matriks A berukuran 3×2 sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan *Singular Value Decomposition* (SVD) dari matriks A tersebut sehingga $A = U\,\Sigma\,V^{T'}$. Tuliskan langkah-langkah pengerjaan secara lengkap mulai dari pembentukan matriks V, matriks Σ, hingga melengkapi matriks U.

Jawaban:

Langkah 1: Menghitung A^TA Pertama, kita cari matriks simetri A^TA:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Mencari Nilai Eigen dan Singular Values Cari nilai eigen (λ) dari A^TA dengan persamaan karakteristik $\det(A^TA - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Diperoleh nilai eigen: $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$. Maka, *singular values* (σ) adalah akar dari nilai eigen (diurutkan dari terbesar):

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$$

Matriks Σ (ukuran sama dengan A, yaitu 3×2) adalah:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Membentuk Matriks V (Vektor Eigen ternormalisasi dari $A^T A$)

- **Untuk $\lambda_1 = 3$:**

$$(A^T A - 3I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_1 = x_2$. Vektor eigen basisnya $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Setelah dinormalisasi (bagi dengan panjang vektor $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- **Untuk $\lambda_2 = 1$:**

$$(A^T A - 1I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_1 = -x_2$. Vektor eigen basisnya $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Setelah dinormalisasi:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Maka, matriks V adalah:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dan V^T adalah (karena V simetri pada kasus ini, $V = V^T$):

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Membentuk Matriks U Gunakan rumus $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$.

- **Mencari $\mathbf{u}_1$:**

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

- **Mencari $\mathbf{u}_2$:**

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- **Mencari $\mathbf{u}_3$:** Karena matriks U harus berukuran 3×3 dan ortonormal, kita perlu mencari vektor ketiga yang tegak lurus terhadap $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$. Kita bisa menggunakan *Cross Product* (karena di $\mathbb{R}^3$) atau Nullspace dari A^T. Misal $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$: Vektor sebanding dengan $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) - (-1)(1) \\ -(2)(1) + (0)(1) \\ (2)(-1) - (0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sederhanakan menjadi $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan normalisasi (panjang $\sqrt{3}$):

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Maka, matriks U adalah:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Hasil Akhir SVD ($A = U\Sigma V^T$):

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

3. **(Nilai 10)** Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) Lakukan faktorisasi QR menggunakan metode Gram–Schmidt.

b) Gunakan matriks QR tersebut untuk menyelesaikan persamaan linear $Ax = b$ dengan matriks $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$

Jawaban:

- **Vektor pertama:**

$$u_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|u_1\| = \sqrt{2^2} = 2.$$

- **Vektor kedua (sudah ortogonal ke u_1):**

$$u_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|u_2\| = \sqrt{3^2} = 3.$$

- **Vektor ketiga (sudah ortogonal ke u_1, u_2):**

$$u_3 = a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \|u_3\| = \sqrt{4^2} = 4.$$

Semua koefisien proyeksi bernilai nol karena kolom-kolom A saling ortogonal sejak awal.

Normalisasi (mendapatkan kolom-kolom Q)

- **Normalisasi tiap u_i:**

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Terlihat $A = QR$ dengan Q ortonormal dan R segitiga atas, seluruh entri bilangan bulat.

$$QRx = b \;\Rightarrow\; Rx = b.$$

Penyelesaian langsung (back-substitution)

Selesaikan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- **Baris 1:** $2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$
- **Baris 2:** $3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4$
- **Baris 3:** $4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2$

Semua langkah menggunakan bilangan bulat karena setiap komponen b dipilih sebagai kelipatan dari diagonal R. Jadi

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. **(Nilai 15)** Diberikan matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}$. Faktorkan A menjadi L dan U dengan menggunakan metode eliminasi Gauss sedemikian sehingga A = LU, lalu selesaikan Ax = b dengan menggunakan L dan U tersebut.

Jawaban:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{?}{\underset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times(-2) \quad \overset{?}{\underset{R_3 - 2 \cdot R_1 \to R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times(-3) \quad \overset{?}{\underset{R_4 - 3 \cdot R_1 \to R_4}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \times(-1) \quad \overset{?}{\underset{R_4 - 1 \cdot R_3 \to R_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ax = b
LUx = b
Misal Ux = y, maka Ly = b ---> y1, y2, y3, y4 diperoleh dengan substitusi maju
Selanjutnya,
Ux = y ----> x1, x2, x3, x4 diperoleh dengan substitusi mundur

Solusi: x1 = 0.5, x2 = 1.5, x3 = -0.667, x4 = 1.667

5. **(Nilai 10)** Hitunglah aljabar kompleks berikut ini :
   a) Lakukan pembagian bilangan kompleks : $\frac{4+i}{1-2i}$
   b) Tuliskan z = 1 + i dalam bentuk polar
   c) Hitung $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$

   Jawaban:
   a)

$$\frac{4+i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(4+i)(1+2i)}{1+4} = \frac{4+8i+i+2i^2}{5} = \frac{4+9i-2}{5} = \frac{2}{5}+\frac{9}{5}i$$

   b)

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

   c)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$$

6. **(Nilai 10)** Diketahui bilangan kompleks $u = -2-2i,\ v = 2-2i,\ w = 1+i$ memenuhi $\bar{x} = 4u + 3\bar{v} + w$.
   a) Tentukan *x*
   b) Tentukan bayangan *x* jika diputar 90 derajat searah jarum jam terhadap titik asal
   c) Tentukan luas segitiga yang didefinisikan oleh titik-titik O(0, 0), $\bar{x}$ dan $\bar{w}$

   Jawaban:

a. Dari

$$\overline{x} = 4u + 3\overline{v} + w$$

ambil konjugat kedua ruas:

$$x = \overline{4u + 3\overline{v} + w} = 4\overline{u} + 3v + \overline{w}.$$

Hitung:

$$\overline{u} = -2 + 2i, \qquad \overline{w} = 1 - i.$$

Sehingga

$$x = 4(-2+2i) + 3(2-2i) + (1-i) = (-8+8i) + (6-6i) + (1-i) = -1+i.$$

Jadi

$$\boxed{x = -1 + i.}$$

b. Rotasi $90°$ searah jarum jam di bidang kompleks ekuivalen dengan perkalian oleh $-i$. Dengan $x = -1 + i$,

$$x' = -ix = -i(-1+i) = i - i^2 = 1 + i.$$

Jadi bayangan x adalah

$$\boxed{x' = 1 + i.}$$

c. Dari (a) diperoleh

$$\overline{x} = -1 - i, \qquad \overline{w} = 1 - i.$$

Misalkan

$$z_1 = \overline{x} = -1 - i, \qquad z_2 = \overline{w} = 1 - i.$$

Luas segitiga O, z_1, z_2 adalah setengah dari luas jajargenjang yang dibentang oleh z_1 dan z_2.

Luas jajargenjang adalah

$$\left| i\left(z_1 \overline{z_2}\right) \right|.$$

Karena

$$\overline{z_2} = w = 1 + i,$$

maka

$$z_1 \overline{z_2} = (-1-i)(1+i) = -1 - i - i - i^2 = -2i.$$

Jadi

$$i\left(z_1 \overline{z_2}\right) = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{luas jajargenjang} = |-2| = 2.$$

Maka luas segitiga

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Jadi

$$\boxed{\text{Luas segitiga} = 1.}$$

7. **(Nilai 10)** Diberikan dua buah quaternion: $q_1 = 2 + i - j + k$ dan $q_2 = 1 + 2i + j - 2k$. Hitunglah $q_1 + q_2$, q_1q_2 dan q_1/q_2

Jawaban:

a. Penjumlahan

Penjumlahan dan pengurangan quaternion dilakukan komponen per komponen (skalar dengan skalar, koefisien i dengan i, dan seterusnya).

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (2 + i - j + k) + (1 + 2i + j - 2k) \\ &= (2+1) + (1+2)i + (-1+1)j + (1-2)k \\ &= 3 + 3i + 0j - k \\ &= \boldsymbol{3 + 3i - k} \end{aligned}$$

b. Perkalian q_1q_2 (Ekspansi Aljabar)

Kita kalikan setiap suku dari q_1 dengan setiap suku dari q_2 dan terapkan aturan dasar quaternion:

- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$
- $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (2 + i - j + k)(1 + 2i + j - 2k) \\ &= 2(1 + 2i + j - 2k) + i(1 + 2i + j - 2k) - j(1 + 2i + j - 2k) + k(1 + 2i + j - 2k) \\ &= 2 + 4i + 2j - 4k + i + 2i^2 + ij - 2ik - j - 2ji - j^2 + 2jk + k + 2ki + kj - 2k^2 \end{aligned}$$

Terapkan aturan perkalian:

$$\begin{aligned} &= 2 + 4i + 2j - 4k + i + 2(-1) + k - 2(-j) - j - 2(-k) - (-1) + 2i + k + 2j + (-i) - 2(-1) \\ &= 2 + 4i + 2j - 4k + i - 2 + k + 2j - j + 2k + 1 + 2i + k + 2j - i + 2 \end{aligned}$$

Kelompokkan suku sejenis:

- **Skalar**: $2 - 2 + 1 + 2 = \mathbf{3}$
- **Koefisien** $i : 4i + i + 2i - i = \boldsymbol{6i}$
- **Koefisien** $j : 2j + 2j - j + 2j = \boldsymbol{5j}$
- **Koefisien** $k : -4k + k + 2k + k = \boldsymbol{0k}$

Jadi, hasilnya adalah:

$$\boldsymbol{q_1 q_2 = 3 + 6i + 5j}$$

c. Pembagian

$q_1 / q_1 = (2 + i - j + k)/(1 + 2i + j - 2k) = (2 + i - j + k)(1 + 2i + j - 2k)^{-1}$

$= (2 + i - j + k)\ (0.1 - 0.2\ i - 0.1\ j + 0.2\ k)$

$= 0.1 - 0.4i - 0.7j + 0.2k$

8. **(Nilai 15)** Sebuah pesawat *drone* berada dalam sistem koordinat Kartesius di titik (1, 0, 1). *Drone* kemudian melakukan *roll* (rotasi terhadap sumbu X) sebesar 180°, kemudian dilanjutkan dengan *yaw* (rotasi terhadap sumbu Y) sebesar 180°. Dengan menggunakan perkalian quaternion, jika sekuens dua rotasi tersebut dinyatakan kembali sebagai satu rotasi tunggal maka tentukan besar sudut ϑ dan vektor sumbu rotasi **u**. ($0° \leq \vartheta \leq 360°$).
Jawaban:

Quaternion untuk rotasi pertama:

$$q_1 = \cos\left(\frac{180^\circ}{2}\right) + \sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right)\mathbf{i} = 0 + \mathbf{i}$$

Quaternion untuk rotasi kedua:

$$q_2 = \cos\left(\frac{180^\circ}{2}\right) + \sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right)\mathbf{j} = 0 + \mathbf{j}$$

Quaternion untuk rotasi keseluruhan:

$$q = q_2 q_1 = \mathbf{ji} = -\mathbf{k}$$

Perhatikan bahwa bentuk umum quaternion untuk rotasi sebesar ϑ terhadap sumbu **u** adalah

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u}.$$

Mencocokkannya dengan quaternion sebelumnya, kita dapatkan

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \iff \quad \frac{\theta}{2} = 90^\circ \vee \frac{\theta}{2} = 270^\circ \quad \iff \theta = 180^\circ \vee \theta = 540^\circ$$

Karena $\vartheta \leq 360°$, kita ambil $\vartheta = 180°$. Lalu,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} &= \mathbf{k} \\ \sin(90^\circ)\mathbf{u} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{k} \end{aligned}$$