

Solusi Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Rabu, 15 Oktober 2025
Waktu: 100 menit

1. **(Bobot 16)** Diketahui empat buah titik di ruang R^3 : $P(1,0,1)$, $Q(2,2,1)$, $R(3,1,3)$, $S(0,4,4)$. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan menunjukkan langkah-langkah pengerjaannya:
- (a) Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P , Q , dan R .
 - (b) Hitunglah luas segitiga yang dibentuk oleh titik P , Q , dan R .
 - (c) Hitunglah volume dari paralelepiped yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PR}$, dan $\mathbf{PS}$.
 - (d) Hitunglah jarak dari titik S ke bidang yang telah Anda temukan pada soal (a).

Jawaban:

(a) Langkah 1: Tentukan vektor $\mathbf{PQ}$ dan $\mathbf{PR}$

$$\mathbf{PQ} = Q - P = (2 - 1, 2 - 0, 1 - 1) = (1, 2, 0)$$

$$\mathbf{PR} = R - P = (3 - 1, 1 - 0, 3 - 1) = (2, 1, 2)$$

Langkah 2: Hitung normal bidang dengan cross product

$$\mathbf{n} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{i}(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 2) - \mathbf{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)$$
$$= \mathbf{i}(4) - \mathbf{j}(2) - \mathbf{k}(1 - 4) = (4, -2, -3)$$

Langkah 3: Gunakan normal dan titik P untuk persamaan bidang

$$\text{Persamaan bidang: } 4(x - 1) - 2(y - 0) - 3(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow 4x - 2y - 3z - 1 = 0$$

(b) Luas segitiga = setengah dari besar cross product $\mathbf{PQ}$ dan $\mathbf{PR}$

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \|\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}\| = \frac{1}{2} \|(4, -2, -3)\|$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 9} = \frac{1}{2} \sqrt{29} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

(c) Langkah 1: Hitung vektor $\mathbf{PS}$

$$\mathbf{PS} = S - P = (0 - 1, 4 - 0, 4 - 1) = (-1, 4, 3)$$

Langkah 2: Triple scalar product

$$V = |\mathbf{PQ} \cdot (\mathbf{PR} \times \mathbf{PS})|$$

$$\mathbf{PR} = (2, 1, 2), \mathbf{PS} = (-1, 4, 3)$$

$$\mathbf{PR} \times \mathbf{PS} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) - j(2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) - k(2 \cdot 4 - 1 \cdot (-1))$$

$$= i(3 - 8) - j(6 + 2) - k(8 + 1) = (-5, -8, 9)$$

$$\Rightarrow \mathbf{PQ} \cdot (\mathbf{PR} \times \mathbf{PS}) = (1)(-5) + (2)(-8) + (0)(9) = -5 - 16 + 0 = -21$$

$$\Rightarrow V = |-21| = 21$$

(d) Persamaan bidang: $4x - 2y - 3z - 1 = 0$

Titik $S = (0, 4, 4)$

$$Distance = \frac{|4(0) - 2(4) - 3(4) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|0 - 8 - 12 - 1|}{\sqrt{16 + 4 + 9}} = \frac{21}{\sqrt{29}}$$

2. **(Bobot 14)** Diberikan tiga buah vektor $\mathbf{v}_1 = (4, -3, 12)$, $\mathbf{v}_2 = (a, b, 0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (4, -3, 0)$ di ruang Euclidean $\mathbb{R}^3$. Diketahui luas parallelogram (jajar genjang) yang terbentuk antara vektor $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah 65 sementara luas parallelogram yang terbentuk antara vektor $\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$ adalah 25. Tentukan volume paralelepiped yang terbentuk oleh $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$.

Jawaban:

Alternatif 1

Dari 2 informasi terkait luas jajar genjang didapatkan

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3a + 4b)$$

sehingga

$$3a + 4b = 25$$

dan volume dari paralelepipednya adalah

$$|v_1 \cdot (v_2 \times v_3)| = (4, -3, 12) \cdot (0, 0, 3a + 4b)$$

$$= 12(3a + 4b)$$

$$= 12(25)$$

$$= 300$$

Alternatif 2

Dari 2 informasi terkait luas jajar genjang didapatkan

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3a + 4b)$$

sehingga

$$3a + 4b = 25 \quad \text{atau} \quad b = \frac{25 - 3a}{4}$$

dan

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 12 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = (-12b, 12a, 3a + 4b)$$

sehingga

$$\begin{aligned} |v_2 \times v_3|^2 &= (-12a)^2 + (12b)^2 + (3a + 4b)^2 \\ 65^2 &= 144a^2 + 144b^2 + 25^2 \\ 65^2 - 25^2 &= 144(a^2 + b^2) \\ (65 + 25)(65 - 25) &= 144\left(a^2 + \left(\frac{25 - 3a}{4}\right)^2\right) \\ 90(40) &= 144\left(a^2 + \frac{625 - 150a + 9a^2}{16}\right) \\ 90(40)(16) &= 144(16a^2 + 625 - 150a + 9a^2) \\ 57600 &= 3600a^2 - 21600a + 90000 \\ 3600a^2 - 21600a + 32400 &= 0 \\ a^2 - 6a + 9 &= 0 \\ a = 3 &\implies b = 4 \end{aligned}$$

Dengan demikian, volume dari parallelepipedanya adalah

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 12 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12(25) = 300$$

3. **(Bobot 10)** Bidang $3x + 2y - 4z = 6$ berpotongan dengan bidang $x - 3y - 2z = 4$ pada sebuah garis di $\mathbb{R}^3$.
- Tentukan persamaan parametrik garis perpotongan kedua bidang tersebut
 - Tentukan sudut yang dibentuk oleh kedua bidang

Jawaban:

- (a) Perpotongan bidang $3x + 2y - 4z = 6$ dengan bidang $x - 3y - 2z = 4$ adalah sebuah SPL

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 4 \\ 3x + 2y - 4z &= 6 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} R_2 - 3R_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solusi: } 11y + 2z = -6 \rightarrow y = (-6 - 2z)/11$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 4 \rightarrow x = 4 + 3y + 2z = 4 + 3/11(-6 - 2z) + 2z = 4 - 18/11 - (6/11)z + 2z \\ &= 26/11 + (16/11)z \end{aligned}$$

$$\text{Misalkan } x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Maka persamaan parametrik garis perpotongan kedua bidang adalah:

$$x = 26/11 + (16/11)t$$

$$y = (-6 - 2t)/11$$

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Normal bidang 1: $\mathbf{n}_1 = (1, -3, -2)$

Normal bidang 2: $\mathbf{n}_2 = (3, 2, -4)$

Sudut yang dibentuk oleh perpotongan bidang 1 dan bidang 2 sama dengan sudut yang dibentuk oleh kedua norma bidang:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-2) = 5.$$

$$\|\mathbf{n}_1\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\mathbf{n}_2\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{29}} = \frac{5}{406} = 0.01231527 = 89,31^\circ = 1,55848 \text{ radian}$$

4. **(Bobot 16)** Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah transformasi linier T.

Transformasi linier $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai rotasi sebesar 90° berlawanan arah jarum jam, diikuti oleh pencerminan (refleksi) terhadap garis $y = x$.

- Tentukan basis dan dimensi untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks A
- Tentukan $\text{rank}(A)$ dan $\text{nullity}(A)$
- Periksa apakah vektor $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ berada di dalam ruang kolom dari matriks A. Jika iya, nyatakan $\mathbf{w}$ sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis ruang kolom A
- Tentukan matriks standar untuk transformasi T. Kemudian, gunakan matriks standar tersebut untuk menemukan bayangan dari vektor $\mathbf{v} = (3, -2)$ setelah melalui transformasi T

Jawaban:

(a) Langkah 1: Reduksi baris A ke bentuk eselon baris tereduksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operasi baris:

- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi baris:

- $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operasi baris:

- $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ruang Baris

Basis:

$$\{(1, 0, -2, -1), (0, 1, 1, 1)\}$$

Dimensi = 2

- Ruang Kolom

Basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Dimensi = 2

- Ruang Null

SPL:

$$x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3 + x_4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 - x_4$$

Misalkan $x_3 = s, x_4 = t$, maka:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{Dimensi} = 2$$

(b) Rank(A) = 2, Nullity(A) = 2

(c) Apakah $w = (1, 2, 3)$ di Ruang Kolom A?

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

SPL:

$$c_1 + 2c_2 = 1$$

$$2c_1 + 5c_2 = 2$$

$$c_1 + 3c_2 = 3$$

Substitusi Mundur:

- Dari persamaan 1: $c_1 = 1 - 2c_2$

- Substitusi ke persamaan 2:

$$2(1 - 2c_2) + 5c_2 = 2 \Rightarrow 2 - 4c_2 + 5c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$$

Cek ke persamaan 3:

$$1 + 3(0) = 1 \neq 3 \text{ (Tidak konsisten)}$$

Kesimpulan: $\mathbf{w}$ tidak berada di ruang kolom A

(d) Langkah 1: Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam

Matriks rotasi:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Refleksi terhadap garis $y = x$

Matriks refleksi:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Matriks transformasi total T

$$T(v) = F \cdot R \cdot v$$

$$T = F \cdot R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Terapkan ke $v = (3, -2)$

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan:

- Matriks standar T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Bayangan $v = (3, -2)$

5. **(Total 14)** Misalkan P_2 adalah ruang polinom dengan derajat paling tinggi 2. Diketahui empat buah polinom:

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2; \mathbf{p}_2 = 3 + x; \mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2; \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 4x^2$$

- Tunjukkan apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ membangun P_2 ?
- Tunjukkan apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ bebas linier?
- Apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ basis untuk P_2 ?

Jawaban:

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2 = (1, -1, 2)$$

$$\mathbf{p}_2 = 3 + x = (3, 1, 0)$$

$$\mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2 = (5, -1, 4)$$

$$\mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 4x^2 = (-2, -2, 4)$$

- Jika $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ membangun P_2 , maka sembarang polinom $\mathbf{p} \in P_2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, dan $\mathbf{p}_4$:

$$\mathbf{p} = k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 + k_4\mathbf{p}_4$$

Misalkan $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0, a_1, a_2)$, maka

$$(a_0, a_1, a_2) = k_1(1, -1, 2) + k_2(3, 1, 0) + k_3(5, -1, 4) + k_4(-2, -2, 4)$$

Diperoleh SPL $Ax = b$, dengan matriks A adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lakukan OBE untuk mendapatkan matriks eselon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \dots \text{OBE} \dots \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $\text{rank}(A) = 3 = \text{dimensi } \mathbf{P}_2 = 3$, maka SPL $Ax = b$ konsisten memiliki solusi, meskipun solusinya banyak, artinya terdapat minimal satu himpunan penyelesaian k_1, k_2, k_3, k_4 yang memenuhi:

$$\mathbf{p} = k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 + k_4\mathbf{p}_4$$

Artinya, $\mathbf{p}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, dan $\mathbf{p}_4$, dengan kata lain $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ membangun $\mathbf{P}_2$.

(b) Untuk menunjukkan $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ bebas linier atau tidak bebas linier, maka pecahkan SPL homogen:

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 + k_4\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$$

dengan metode eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{Gauss-Jordan} \dots \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh solusi non-trivial:

$$k_4 = 0$$

$$k_2 + k_3 = 0 \rightarrow k_2 = -k_3$$

$$k_1 + 2k_3 = 0 \rightarrow k_1 = -2k_3$$

Misalkan $k_3 = r, r \in \mathbb{R}$, maka

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = (-2r, -r, r, 0)$$

Oleh karena SPL homogen memiliki solusi non-trivial, maka $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, dan $\mathbf{p}_4$ tidak bebas linier.

Misalnya jika $k_3 = 1$, maka $(-2, -1, 1, 0)$ adalah salah satu solusinya sehingga

$$(-2)\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_3 \text{ bergantung pada } \mathbf{p}_1 \text{ dan } \mathbf{p}_2$$

(c) Oleh karena $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, dan $\mathbf{p}_4$ tidak bebas linier, meskipun membangun $\mathbf{P}_2$, maka $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, dan $\mathbf{p}_4$ tidak dapat menjadi basis untuk $\mathbf{P}_2$.

:

6. **(Bobot 15)** Misalkan $V = P_2$ adalah ruang vektor polinomial berderajat 2 dan $W = R^3$ adalah ruang vector dimensi tiga.

Didefinisikan sebuah transformasi linear $T: P_2 \rightarrow R^3$ dengan aturan sebagai berikut $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$

(keterangan: p' menyatakan turunan fungsi). Diberikan dua basis nonstandard:

- Basis untuk P_2

$$B = \{u_1(x) = 1 + x, u_2(x) = x + x^2, u_3(x) = x^2 - 1\}$$

- Basis untuk R^3

$$B' = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)\}$$

(a) Tentukan representasi matriks untuk transformasi T relatif terhadap basis B dan B'

(b) Diberikan sebuah polinomial $p(x)$ yang memiliki vektor koordinat terhadap basis B adalah $[P]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tentukan vektor koordinat titik di atas relatif terhadap B' .

Jawaban:

(a)

Hitung T pada vektor basis u_i

$$u_1(x) = 1 + x \Rightarrow$$

$$T(u_1) = (u_1(0), u_1(1), u_1'(0)) = (1, 2, 1)$$

$$u_2(x) = x + x^2 \Rightarrow$$

$$T(u_2) = (0, 2, 1)$$

$$u_3(x) = x^2 - 1 \Rightarrow$$

$$T(u_3) = (-1, 0, 0)$$

Lakukan OBE

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

OBE $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$[T]_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Vektor koordinat relative terhadap B'

$$[T(\mathbf{p})]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. **(Bobot 15)** M_{22} adalah ruang vektor yang berisi semua matriks berukuran 2×2 . Tunjukkan bahwa vektor-vektor:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk M_{22} .

Jawaban: Syarat $\{M_1, M_2, M_3, \text{ dan } M_4\}$ menjadi basis M_{22} adalah bebas linier dan membangun M_{22} .

(a) Tunjukkan bahwa $\{M_1, M_2, M_3, \text{ dan } M_4\}$ bebas linier

$$a \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh SPL $Ax = 0$:

$$3a \quad \quad \quad + d = 0$$

$$6a - b - 8c \quad \quad = 0$$

$$3a - b - 12c - d = 0$$

$$-6a \quad \quad - 4c + 2d = 0$$

Solusinya harus trivial, yaitu $a, b, c, \text{ dan } d$ seluruhnya 0, syaratnya determinan $\neq 0$

(b) Tunjukkan bahwa $\{M_1, M_2, M_3, \text{ dan } M_4\}$ membangun M_{22} . Misalkan $M = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_{22}$, maka

$$a \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

Diperoleh SPL $Ax = b$:

$$3a \quad \quad \quad + d = w$$

$$6a - b - 8c \quad \quad = x$$

$$3a - b - 12c - d = y$$

$$-6a \quad \quad - 4c + 2d = z$$

SPL ini harus memiliki solusi, determinan(A) $\neq 0$

Untuk (a) dan (b) dapat ditunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$

Oleh karena itu $\{M_1, M_2, M_3, \text{ dan } M_4\}$ adalah basis M_{22}

8. **(Bonus 10)** Tentukan koordinat vektor A relatif terhadap basis $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ di ruang vektor M_{22} :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh SPL:

$$-c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_3 = -1$$

$$c_4 = 3$$

$$c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_1 = -c_2$$

$$-c_1 + c_2 = 2 \rightarrow -(-c_2) + c_2 = 2 \rightarrow 2c_2 = 2 \rightarrow c_2 = 1 \rightarrow c_1 = -c_2 = -1$$

Jadi, koordinat A relatif terhadap basis S adalah $[A]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Total nilai = 110

Kerjakan pada bagian kosong pada halaman dibaliknya, jika kurang pakai kertas sendiri