Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :……………………….................…
NIM/Kelas :…………………………..........
T.tangan:………………………..............

Solusi Kuis ke-1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Matriks, Sistem Persamaan Linier, Determinan
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Selasa, 22 September 2025
Waktu: 55 menit

1. Sebuah perusahaan *cloud computing* memiliki 3 jenis server: Server A, Server B, dan Server C. Setiap server dapat menangani jumlah *request* yang berbeda per menit. Untuk menguji performa, dilakukan simulasi berikut: • Pada uji pertama, digunakan 5 Server A, 2 Server B, dan 3 Server C, yang mampu menangani 60 request/menit. • Pada uji kedua, digunakan 3 Server A, 4 Server B, dan 2 Server C, yang mampu menangani 50 *request*/menit. • Pada uji ketiga, digunakan 4 Server A, 3 Server B, dan 5 Server C, yang mampu menangani 90 *request*/menit.	Pertanyaan: (a) Bentuklah sistem persamaan linear untuk kasus di atas. **(5)** (b) Tentukan kapasitas request/menit yang dapat ditangani oleh masing-masing jenis server menggunakan metode eliminasi Gauss. **(15)** **(c)** Jika perusahaan ingin mengoperasikan 10 Server A, 8 Server B, dan 6 Server C sekaligus, berapa banyak *request*/menit yang bisa ditangani? **(5)**

Penyelesaian:

a. Misalkan kapasitas tiap server:

- Server A = x,
- Server B = y,
- Server C = z.

Maka sistem SPL:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 60 \\ 3x + 4y + 2z = 50 \\ 4x + 3y + 5z = 90 \end{cases}$$

b. Matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 60 \\ 3 & 4 & 2 & | & 50 \\ 4 & 3 & 5 & | & 90 \end{bmatrix} R1 \leftarrow R1/5 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & | & 12 \\ 3 & 4 & 2 & | & 50 \\ 4 & 3 & 5 & | & 90 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2 \leftarrow R2 - 3R1 \\ R3 \leftarrow R3 - 4R1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & | & 12 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} & | & 14 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{13}{5} & | & 42 \end{bmatrix} R2 \leftarrow R2/(\frac{14}{5})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & | & 12 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & | & 5 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{13}{5} & | & 42 \end{bmatrix} R3 \leftarrow R3 - \left(\frac{7}{5}\right) R2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & | & 12 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & | & 5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & | & 35 \end{bmatrix} R3 \leftarrow R3/(\frac{5}{2}) \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & | & 12 \\ 0 & 1 & \frac{1}{14} & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14 \end{bmatrix}$$

Sehingga, dari baris ke-3:

$z = 14$

Substitusi ke baris 2:

$$y + \frac{1}{14} z = 5 \implies y = 5 - \frac{1}{14} z = 5 - \frac{1}{14}(14) = 4$$

Substitusi ke baris 1:

$$x + \frac{2}{5} y + \frac{3}{5} z = 12 \implies x = 12 - \frac{2}{5} y - \frac{3}{5} z = 12 - \frac{2}{5}(4) - \frac{3}{5}(14) = 2$$

Hasil:
$x = 2, y = 4, z = 14$

c. $10x + 8y + 6z = 10(2) + 8(4) + 6(14) = 136$

Maka 10 Server A, 8 Server B, dan 6 Server C menangani 136 request/menit.

---

2. Diketahui suatu persamaan matriks dalam bentuk *Mx* = *B*, dengan kofaktor dari matriks *M* adalah $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$ dan det(*M*) = 10. Jika $B = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 10 \end{bmatrix}$, tentukan solusi dari persamaan tersebut (x dinyatakan dalam *a*, *b*, *c*). **(25)**

Penyelesaian:
Balikan (invers) suatu matriks adalah hasil bagi adjoin dari matriks tersebut dengan determinannya, dengan matriks adjoin sendiri merupakan transpose dari matriks kofaktornya. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \operatorname{adj}(M) \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{c}{10} & \frac{c}{10} \\ \frac{b}{10} & \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{b}{10} & \frac{a}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} M^{-1}Mx &= M^{-1}B \\ x &= M^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{c}{10} & \frac{c}{10} \\ \frac{b}{10} & \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{b}{10} & \frac{a}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + 6c & 2a + 3c & 3a + 3c \\ 3a + 4b & a + 4b & 2a + 4b \\ 3a + 3b + c & 2a + b + 2c & a + 2b + 3c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

3. Kurva polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ menginterpolasi tiga buah titik di dalam dataset, yaitu (1, 1), (2, 0), (3, 5).
   (a) Tentukan sistem persamaan linier yang merepresentasikan persamaan interpolasi **(5)**
   (b) Tentukan nilai a_0, a_1, dan a_2 dengan Kaidah Cramer dan persamaan interpolasinya. Determinan dihitung dengan metode OBE atau metode lainnya **(15)**
   (c) Tentukan estimasi nilai *y* untuk *x* = 1,5 **(5)**

Penyelesaian:

(a)

x = 1 → y = p(1) = $a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1$

x = 2 → y = p(2) = $a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$

x = 3 → y = p(3) = $a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 5$

SPL yang diperoleh adalah:

$a_0 + a_1 + a_2 = 1$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$

$a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 5$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1)\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 5 + 1 = 2$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A1) = 16 \qquad A2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A2) = -20 \qquad A3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A1) = 6$$

Maka a_0 = de(A1)/det(A) = 16/2 = 8; a_1 = det(A2)/det(A) = -20/2 = -10; a_3 = det(A3)/det(A) = 6/2 = 3

Persamaan polinom interpolasi: $p(x) = 8 - 10x + 3x^2$

(c) Estimasi nilai y untuk x = 1,5 adalah $p(1,5) = 8 - 10(1,5) + 3(1,5)^2 = -0,25$

4. Diberikan matriks *H* dan matriks *b* seperti di samping kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini.

(a) Hitung determinan dari matriks *H* dengan metode ekspansi kofaktor. **(10)**

(b) Tentukan matriks adjoin, adj(H), dan tentukan matriks balikan dari H, jika ada. **(10)**

(c) Selesaikan sistem persamaan linear Hx = b **(5)**

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

(a) Langkah Penyelesaian sebagai berikut:

Ekspansi sepanjang baris pertama.

Minor untuk entri $(1,1)$:

$$M_{11} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15} - \frac{1}{16} = \frac{1}{240}.$$

Minor untuk entri $(1,2)$:

$$M_{12} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}.$$

Minor untuk entri $(1,3)$:

$$M_{13} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}.$$

Ekspansi kofaktor baris pertama:

$$\det(H) = 1 \cdot M_{11} - \frac{1}{2} \cdot M_{12} + \frac{1}{3} \cdot M_{13} = \frac{1}{240} - \frac{1}{120} + \frac{1}{216}.$$

Dengan penyebut sama:

$$\det(H) = \frac{9-18+10}{2160} = \frac{1}{2160}.$$

(b) Langkah Penyelesaian sebagai berikut:

Matriks kofaktor:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{60} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Karena C simetris, maka

$$\operatorname{adj}(H) = C.$$

Invers:

$$H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \operatorname{adj}(H) = 2160 \cdot C = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

(c) Langkah Penyelesaian sebagai berikut:

$$x = H^{-1}b = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hitung:

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 36 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

5. **(BONUS-tdk wajib, nilai 10)** Jika A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan det(A) = 5, tentukan $\begin{vmatrix} a & a+2b & a+2b+3c \\ d & d+2e & d+2e+3f \\ g & g+2h & g+2h+3i \end{vmatrix}$ dan det(A^{-2})

Penyelesaian:

det(A) = 5

(a)

$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & a+2b & a+2b+3c \\ d & d+2e & d+2e+3f \\ g & g+2h & g+2h+3i \end{bmatrix}$ diperoleh dengan mengalikan A dengan P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sehingga B = AP

P adalah matriks segitiga , det(P) = (1)(2)(3) = 6

det(B) = det(AP) = det(A)det(P) = (5)(6) = 30

(b) $A^{-2} = (A^{-1})^3 = (A^{-1})\,(A^{-1})$

$\det(A^{-2}) = \det((A^{-1})^2) = \det((A^{-1})(A^{-1})) = \det(A^{-1})\det(A^{-1}) = (1/5)(1/5) = 1/25$