

Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum
Dosen: Rinaldi, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Rabu, 15 Oktober 2025
Waktu: 100 menit

-
1. **(Bobot 16)** Diketahui empat buah titik di ruang $\mathbb{R}^3$: $P(1,0,1)$, $Q(2,2,1)$, $R(3,1,3)$, $S(0,4,4)$. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan menunjukkan langkah-langkah pengerjaannya:
- Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P , Q , dan R .
 - Hitunglah luas segitiga yang dibentuk oleh titik P , Q , dan R .
 - Hitunglah volume dari paralelepiped yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PR}$, dan $\mathbf{PS}$.
 - Hitunglah jarak dari titik S ke bidang yang telah Anda temukan pada soal (a).
2. **(Bobot 14)** Diberikan tiga buah vektor $\mathbf{v}_1 = (4, -3, 12)$, $\mathbf{v}_2 = (a, b, 0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (4, -3, 0)$ di ruang Euclidean $\mathbb{R}^3$. Diketahui luas parallelogram (jajar genjang) yang terbentuk antara vektor $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah 65 sementara luas parallelogram yang terbentuk antara vektor $\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$ adalah 25. Tentukan volume paralelepiped yang terbentuk oleh $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$.
3. **(Bobot 10)** Bidang $3x + 2y - 4z = 6$ berpotongan dengan bidang $x - 3y - 2z = 4$ pada sebuah garis di $\mathbb{R}^3$.
- Tentukan persamaan parametrik garis perpotongan kedua bidang tersebut
 - Tentukan sudut yang dibentuk oleh kedua bidang
4. **(Bobot 16)** Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah transformasi linier T .
- Transformasi linier $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai rotasi sebesar 90° berlawanan arah jarum jam, diikuti oleh pencerminan (refleksi) terhadap garis $y = x$.
- Tentukan basis dan dimensi untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks A
 - Tentukan $\text{rank}(A)$ dan $\text{nullity}(A)$
 - Periksa apakah vektor $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ berada di dalam ruang kolom dari matriks A . Jika iya, nyatakan $\mathbf{w}$ sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis ruang kolom A
 - Tentukan matriks standar untuk transformasi T . Kemudian, gunakan matriks standar tersebut untuk menemukan bayangan dari vektor $\mathbf{v} = (3, -2)$ setelah melalui transformasi T
5. **(Total 14)** Misalkan P_2 adalah ruang polinom dengan derajat paling tinggi 2. Diketahui empat buah polinom:
- $$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2; \mathbf{p}_2 = 3 + x; \mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2; \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 4x^2$$
- Tunjukkan apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ membangun P_2 ?
 - Tunjukkan apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ bebas linier?
 - Apakah $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ basis untuk P_2 ?
6. **(Bobot 15)** Misalkan $V = P_2$ adalah ruang vektor polinomial berderajat 2 dan $W = \mathbb{R}^3$ adalah ruang vector dimensi tiga.

Didefinisikan sebuah transformasi linear $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan aturan sebagai berikut $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$

(keterangan: p' menyatakan turunan fungsi). Diberikan dua basis nonstandard:

- Basis untuk P_2

$$B = \{\mathbf{u}_1(x) = 1 + x, \mathbf{u}_2(x) = x + x^2, \mathbf{u}_3(x) = x^2 - 1\}$$

- Basis untuk $\mathbb{R}^3$

$$B' = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$$

(a) Tentukan representasi matriks untuk transformasi T relatif terhadap basis B dan B'

(b) Diberikan sebuah polinomial $p(x)$ yang memiliki vektor koordinat terhadap basis B adalah $[P]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tentukan vector koordinat titik di atas relatif terhadap B'.

7. **(Bobot 15)** M_{22} adalah ruang vektor yang berisi semua matriks berukuran 2×2 . Tunjukkan bahwa vektor-vektor:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk M_{22} .

8. **(Bonus 10)** Tentukan koordinat vektor A relatif terhadap basis $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ di ruang vektor M_{22} :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Total nilai = 110

Kerjakan pada bagian kosong pada halaman dibaliknya, jika kurang pakai kertas sendiri