Oleh: Dr. Ir. Rinaldi, M.T

Seri bahan kuliah Algeo #28

Aljabar Geometri
(Bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Pengantar

- Teori Aljabar Geometri (*geometric algebra*):

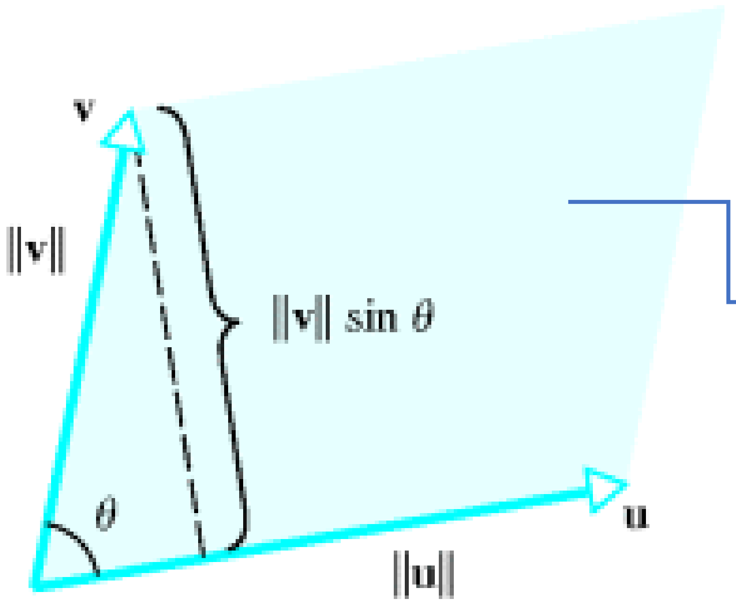
  - ditemukan oleh matematikawan Jerman Herman Gunter Grassman (1884)

  - diformulasikan oleh matematikawan Inggris, William Kingdom Clifford

- Aljabar geometri berkaitan dengan perkalian vektor yang menghasilkan luas area, volume, dan objek-objek berdimensi lebih tinggi.

- Jika pada aljabar vektor, perkalian silang (*cross product*) dua buah vektor hanya tedefinisi untuk vektor di R^3, dan ambigu untuk dimensi yang lebih tinggi, maka di dalam aljabar geometri perkalian lebih dari dua buah vektor dapat dilakukan dengan interpretasi sebagai "luas area bertanda" (*signed area*, akan dijelaskan kemudian)

- Review kembali bahwa di dalam aljabar vektor, *magnitude* dari perkalian silang menyatakan luas area parallelogram yang dibentuk oleh dua vektor.



Luas parallelogram = A

A = $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta$

- Review kembali bahwa luas parallelogram yang dibentuk oleh vektor **u** dan **v** sama dengan determinan matriks yang dibentuk oleh kedua vector.

- Karena determinan bisa bernilai negatif, maka Grassman mendukung konsep luas area dan volume yang bertanda (negatif atau positif) dengan memperkenalkan konsep ***outer product*** (akan dijelaskan nanti).

Notasi

- Di dalam aljabar geometri, vektor dilambangkan dengan huruf kecil dicetak miring (jadi bukan huruf kecil dicetak tebal seperti pada aljabar vector terdahulu).

  Contoh: a, b, c, …

- Skalar dilambangkan dengan huruf Yunani (untuk membedakannya dengan vektor).

  Contoh: α, β, γ, …

Outer Product

- Perkalian dua vektor a dan b dinamakan ***outer product***.

  Notasi: $a \wedge b$

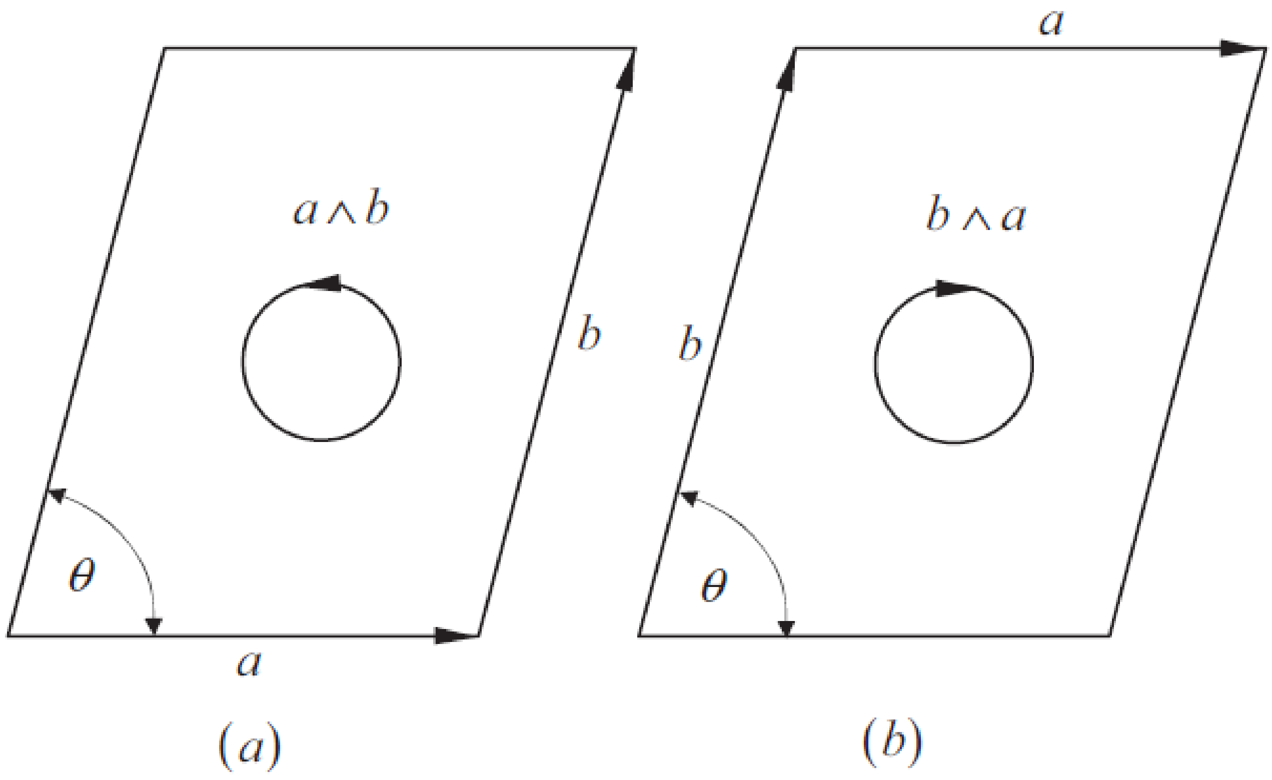
  Simbol $\wedge$ dinamakan ***wedge product***.
- $a \wedge b$ disebut juga sebagai ***bivector***
- $a \wedge b$ tidak bersifat komutatif, jadi

$$a \wedge b = -\, b \wedge a$$

- Perbedaan *cross product* dengan *outer product*:

  a x **b** $\rightarrow$ menghasikan sebuah vektor yang ortogonal dengan **a** dan **b**

  $a \wedge b \rightarrow$ menghasilkan *bivector* yang menggambarkan sebuah area paralelogram bertanda (positif atau negatif) yang dibentuk oleh a dan b, *magnitude*-nya menyatakan luas area tersebut, dan arahnya berlawanan dengan arah jarum jam.

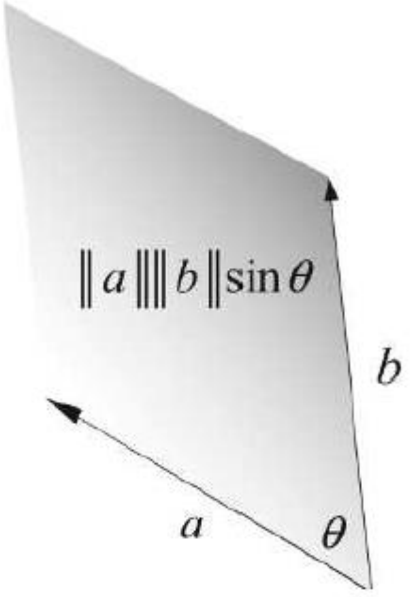


Gambar 1. (a) $a \wedge b$ menghasilkan area yang arahnya berlawanan jarum jam
(b) $b \wedge a$ menghasilkan area yang searah jarum jam

$$a \wedge b = -\, b \wedge a$$

- *Magnitude* dari *outer product* menyatakan luas area parallelogram yang dibentuk oleh vektor *a* dan *b*:

$$\|a \wedge b\| = \|a\| \, \|b\| \sin\theta$$



- Rumus di atas tidak bertentangan dengan *magnitude* dari *cross product* di dalam aljabar vector yang juga menyatakan luas area parallelogram yang dibentuk oleh vektor ***a*** dan ***b**:*

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$$

Sifat-sifat *Outer Product*

1. Non-komutatif:

$$a \wedge b = -\, b \wedge a$$

2. Distributif:

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$$

3. Luas vektor yang parallel = 0

$$\|a \wedge a\| = \|a\|\ \|a\| \sin 0 = 0$$

Representasi Vektor

- Vektor di dalam aljabar geometri dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis:

$$v = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + \ldots + a_n\mathrm{e}_n$$

  yang dalam hal ini e_1, e_2, …, e_n adalah vektor-vektor basis satuan di R^n.

- Misalkan didefinisikan dua buah vektor di R^2 sebagai berikut:

$$a = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2$$

$$b = b_1\mathrm{e}_1 + b_2\mathrm{e}_2.$$

Hitung perkalian *outer product* $a \wedge b$:

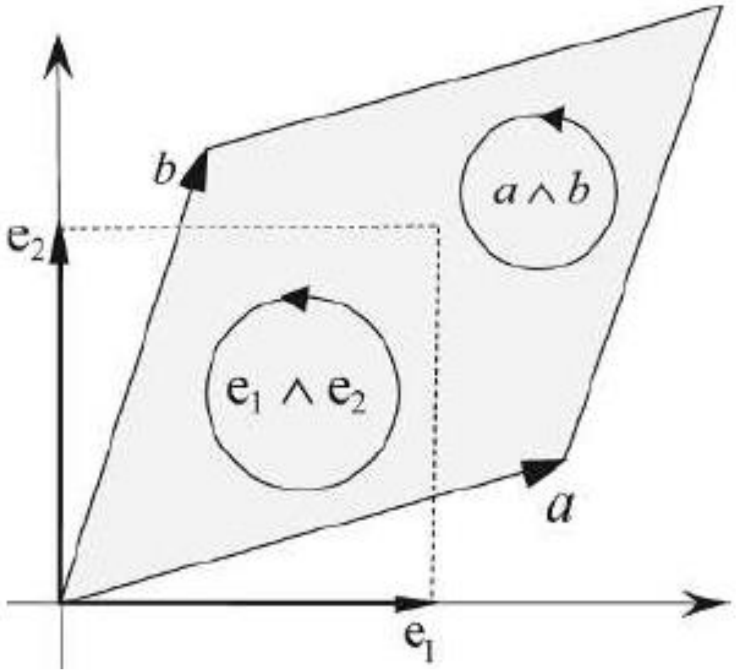
$$a \wedge b = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

$$= a_1 b_1 (e_1 \wedge e_1) + a_1 b_2 (e_1 \wedge e_2) + a_2 b_1 (e_2 \wedge e_1) + a_2 b_2 (e_2 \wedge e_2)$$

Sulihkan: $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = 0$ dan $e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$

$$= a_1 b_2 (e_1 \wedge e_2) - a_2 b_1 (e_1 \wedge e_2)$$

$$= \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\text{skalar}} \underbrace{(e_1 \wedge e_2)}_{\text{bivector satuan}}.$$



- $a_1 b_2 - a_2 b_1$ menyatakan luas area parallelogram
- Jadi, *outer product* $a \wedge b$ adalah area skalar dikali dengan *bivector* satuan $e_1 \wedge e_2$
- $e_1 \wedge e_2$ menyatakan bidang yang dibentuk oleh e_1 dan e_2

Sekarang hitung perkalian *outer product* $b \wedge a$:

$$
\begin{aligned}
b \wedge a &= (b_1 e_1 + b_2 e_2) \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2) \\
&= a_1 b_1 (e_1 \wedge e_1) + a_2 b_1 (e_1 \wedge e_2) + a_1 b_2 (e_2 \wedge e_1) + a_2 b_2 (e_2 \wedge e_2)
\end{aligned}
$$

Sulihkan: $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = 0$ dan $e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$

$$= -(a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2)$$

Sedangkan sebelumnya ditunjukkan $a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2)$.

Jadi,

$$a \wedge b = - b \wedge a$$

Contoh 1: Misalkan $a = 3e_1 + 4e_2$ dan $b = 2e_1 - 5e_2$, hitung $a \wedge b$ dan $b \wedge a$.

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2) \\ &= ((3)(-5) - (4)(2))(e_1 \wedge e_2) \\ &= (-15 - 8)(e_1 \wedge e_2) \\ &= -23(e_1 \wedge e_2) \end{aligned}$$

- Jadi, $a \wedge b$ menyatakan area parallelogram bertanda (*signed area*), yaitu –23 dikali *bivektor* satuan.
- *Magnitude* $a \wedge b$ adalah $\|a \wedge b\| = \|-23(e_1 \wedge e_2)\| = 23$.

$$\begin{aligned} b \wedge a &= -(a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \wedge e_2) \\ &= -(-23)(e_1 \wedge e_2) \\ &= 23(e_1 \wedge e_2) \end{aligned}$$

Vektor di R^3

- Misalkan didefinisikan dua buah vektor di R^3 sebagai berikut:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

- Hitung perkalian *outer product a* $\wedge$ *b:*

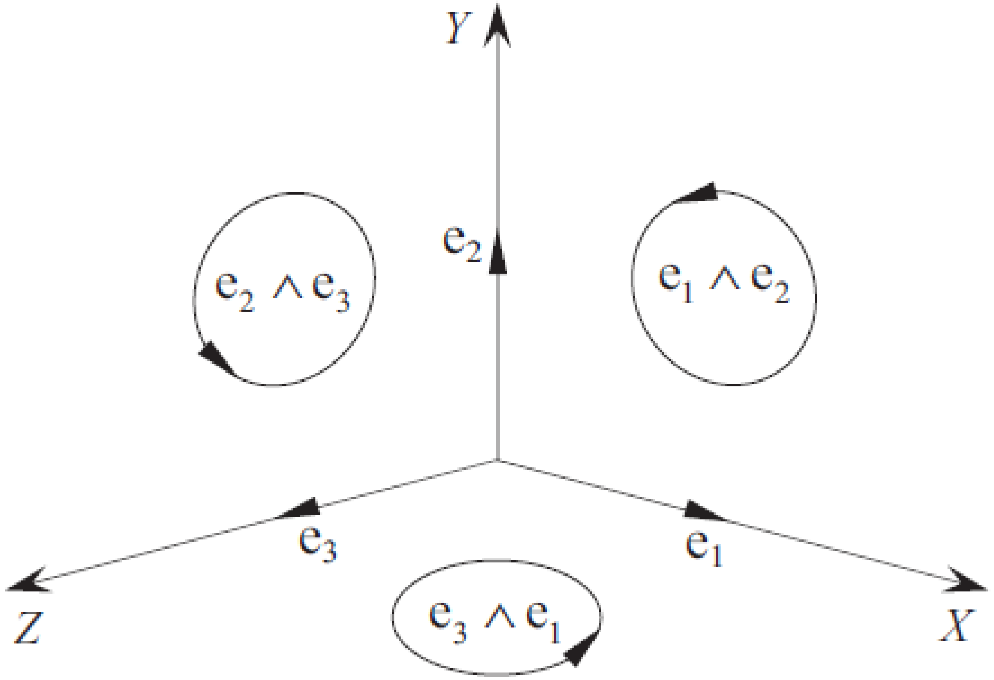
$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= a_1 b_1 (e_1 \wedge e_1) + a_1 b_2 (e_1 \wedge e_2) + a_1 b_3 (e_1 \wedge e_3) + a_2 b_1 (e_2 \wedge e_1) + a_2 b_2 (e_2 \wedge e_2) \\ &\quad + a_2 b_3 (e_2 \wedge e_3) + a_3 b_1 (e_3 \wedge e_1) + a_3 b_2 (e_3 \wedge e_2) + a_3 b_3 (e_3 \wedge e_3) \end{aligned}$$

Sulihkan: $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$

$$e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2 \quad e_1 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_1 \quad e_3 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_3$$

$$= a_1b_2(e_1 \wedge e_2) - a_1b_3(e_3 \wedge e_1) - a_2b_1(e_1 \wedge e_2)$$
$$+ a_2b_3(e_2 \wedge e_3) + a_3b_1(e_3 \wedge e_1) - a_3b_2(e_2 \wedge e_3)$$

$$a \wedge b = (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \wedge e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \wedge e_1$$



Sumbu-x ortogonal dengan $e_2 \wedge e_3$

Sumbu-y ortogonal dengan $e_3 \wedge e_1$

Sumbu-z ortogonal dengan $e_1 \wedge e_2$

Hubungan *Outer Product* dengan *Cross Product*

- Misalkan *a* dan *b* adalah dua vektor yang dinyatakan dalam vektor basis **i**, **j**, dan **k**:

$$a = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$$

$$b = b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}$$

- Perkalian silang (*cross product*) *a* dan *b* adalah:

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}) \times (b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}) \\ &= a_1b_1(\mathrm{i} \times \mathrm{i}) + a_1b_2(\mathrm{i} \times \mathrm{j}) + a_1b_3(\mathrm{i} \times \mathrm{k}) + a_2b_1(\mathrm{j} \times \mathrm{i}) + a_2b_2(\mathrm{j} \times \mathrm{j}) \\ &\quad + a_2b_3(\mathrm{j} \times \mathrm{k}) + a_3b_1(\mathrm{k} \times \mathrm{i}) + a_3b_2(\mathrm{k} \times \mathrm{j}) + a_3b_3(\mathrm{k} \times \mathrm{k}). \end{aligned}$$

Dengan mengingat bahwa $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = \mathrm{j} \times \mathrm{j} = \mathrm{k} \times \mathrm{k} = 0$

maka $$a \times b = a_1b_2(\mathrm{i} \times \mathrm{j}) + a_1b_3(\mathrm{i} \times \mathrm{k}) + a_2b_1(\mathrm{j} \times \mathrm{i})$$
$$+ a_2b_3(\mathrm{j} \times \mathrm{k}) + a_3b_1(\mathrm{k} \times \mathrm{i}) + a_3b_2(\mathrm{k} \times \mathrm{j})$$

dan mengingat bahwa $\mathrm{j} \times \mathrm{i} = -\mathrm{i} \times \mathrm{j} \quad \mathrm{k} \times \mathrm{j} = -\mathrm{j} \times \mathrm{k} \quad \mathrm{i} \times \mathrm{k} = -\mathrm{k} \times \mathrm{i}$

$$= a_1b_2(\mathrm{i} \times \mathrm{j}) - a_1b_3(\mathrm{k} \times \mathrm{i}) - a_2b_1(\mathrm{i} \times \mathrm{j})$$
$$+ a_2b_3(\mathrm{j} \times \mathrm{k}) + a_3b_1(\mathrm{k} \times \mathrm{i}) - a_3b_2(\mathrm{j} \times \mathrm{k}).$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{j} \times \mathrm{k} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathrm{k} \times \mathrm{i} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{i} \times \mathrm{j}$$

Dengan mengganti **i**, **j**, dan **k** dengan e_1, e_2, dan e_3, bandingkan dengan $a \wedge b$:

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \wedge e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \wedge e_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2$$
$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \times e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \times e_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \times e_2$$

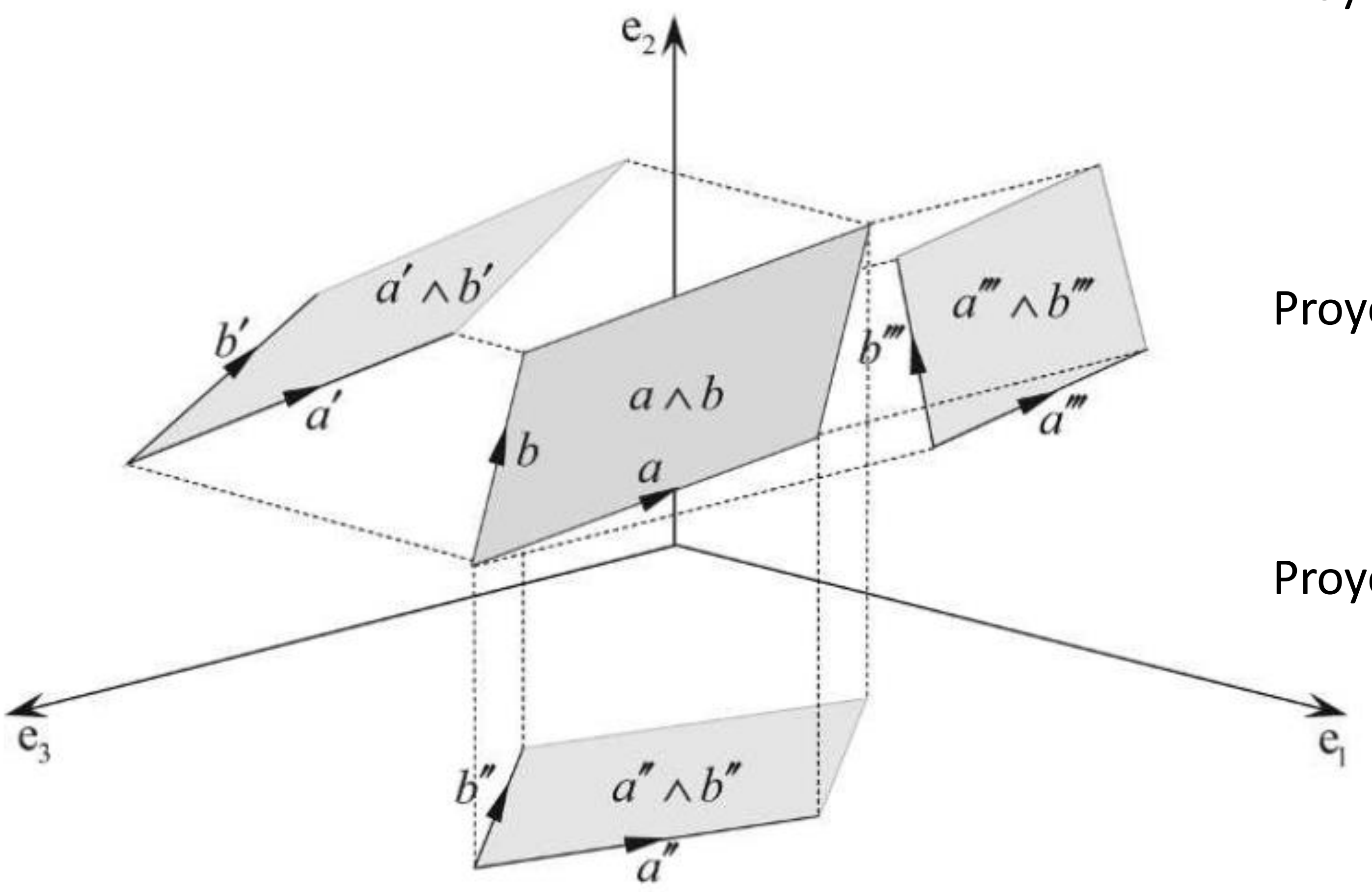
- Perhatikan dari keduanya:

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \wedge e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \wedge e_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \times e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \times e_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \times e_2$$

- Pada *cross product*, komponen $(a_2b_3 - a_3b_2), (a_3b_1 - a_1b_3)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$ adalah komponen vektor yang ortogonal dengan *a* dan *b*

- Sedangkan pada *outer product*, komponen $(a_2b_3 - a_3b_2), (a_3b_1 - a_1b_3)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$ menyatakan luas area bertanda yang diproyeksikan pada bidang yang didefinisikan oleh unit bivektor $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$, dan $e_1 \wedge e_2$.



Proyeksi a dan b pada bidang $e_1 \wedge e_2$ adalah:

$$a''' = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$b''' = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

Proyeksi a dan b pada bidang $e_2 \wedge e_3$ adalah:

$$a' = a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b' = b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Proyeksi a dan b pada bidang $e_3 \wedge e_1$ adalah:

$$a'' = a_1 e_1 + a_3 e_3$$

$$b'' = b_1 e_1 + b_3 e_3$$

Proyeksi $a \wedge b$ pada bidang $e_1 \wedge e_2$ adalah $a''' \wedge b''' = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2$

Proyeksi $a \wedge b$ pada bidang $e_2 \wedge e_3$ adalah $a' \wedge b' = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3$

Proyeksi $a \wedge b$ pada bidang $e_3 \wedge e_1$ adalah $a'' \wedge b'' = (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1$

Contoh 2: Tinjau dua vektor a dan b di R^3 sebagai berikut:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Misalkan $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1 \rightarrow a = e_1 + e_3$

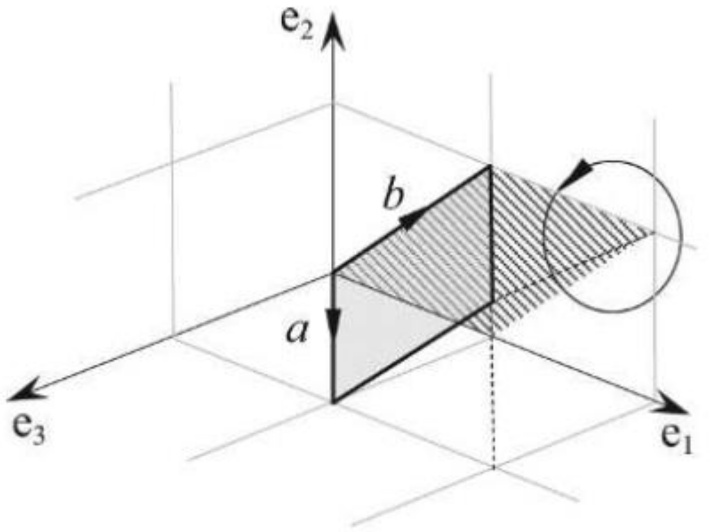
$b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0 \rightarrow b = e_1 + e_2$

Maka

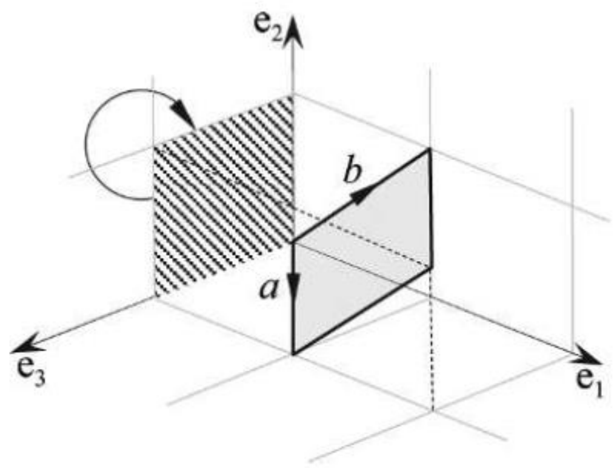
$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1$$

$$a \wedge b = (1) e_1 \wedge e_2 + (-1) e_2 \wedge e_3 + (1) e_3 \wedge e_1.$$

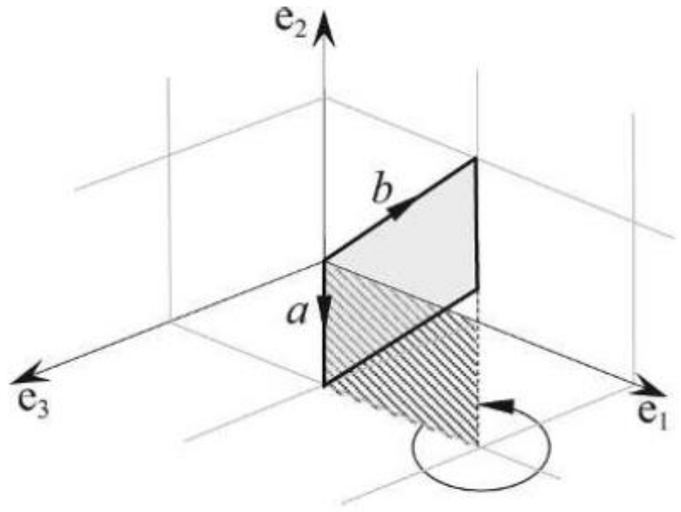
Luas area bertanda yang diproyeksikan pada bidang $e_1 \wedge e_2$ (bagian yang diarsir) adalah +1



Luas area bertanda yang diproyeksikan pada bidang $e_2 \wedge e_3$ adalah –1



Luas area bertanda yang diproyeksikan pada bidang $e_3 \wedge e_1$ adalah +1



Luas parallelogram yang dibentuk oleh *a* dan *b* adalah $\|a \wedge b\| = \|a\| \, \|b\| \sin \theta$.
Perlu dihitung sudut θ terlebih dahulu. Dengan menggunakan *dot product* bahwa

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \frac{(1)(1)+(0)(1)+(1)(0)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ$$

Maka, luas parallelogram yang dibentuk oleh a dan b adalah

$$\|a \wedge b\| = \|a\| \, \|b\| \sin \theta = \sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sin 60^\circ = (2)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$$

Luas parallelogram yang $\sqrt{3}$ ini berkaitan dengan luas area ketiga proyeksi tadi. Perhatikan bahwa

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1$$

$$a \wedge b = (1)\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2 + (-1)\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3 + (1)\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1.$$

maka

$$\|a \wedge b\| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}$$

- *Cross product* terdefinisi dengan baik untuk vektor-vektor di R^3, tetapi ambigu untuk dimensi yang lebih tinggi.

- Sedangkan *outer product* dapat diterapkan untuk mengalikan vektor-vektor pada dimensi yang lebih tinggi.

Contoh 3: Misalkan *a* dan *b* adalah vektor-vektor di R^4 sebagai berikut

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$$
$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$$

Outer-product-nya adalah:

$$a \wedge b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4)$$

$$
\begin{aligned}
a \wedge b = a_1 b_1 (\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_1) + a_1 b_2 (\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2) + a_1 b_3 (\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_3) + a_1 b_4 (\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_4) \\
+ a_2 b_1 (\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_1) + a_2 b_2 (\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_2) + a_2 b_3 (\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3) + a_2 b_4 (\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_4) \\
+ a_3 b_1 (\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1) + a_3 b_2 (\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_2) + a_3 b_3 (\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_3) + a_3 b_4 (\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_4) \\
+ a_4 b_1 (\mathrm{e}_4 \wedge \mathrm{e}_1) + a_4 b_2 (\mathrm{e}_4 \wedge \mathrm{e}_2) + a_4 b_3 (\mathrm{e}_4 \wedge \mathrm{e}_3) + a_4 b_4 (\mathrm{e}_4 \wedge \mathrm{e}_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_3) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_1) \\
+ (a_1 b_4 - a_4 b_1)(\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_4) + (a_2 b_4 - a_4 b_2)(\mathrm{e}_2 \wedge \mathrm{e}_4) + (a_3 b_4 - a_4 b_3)(\mathrm{e}_3 \wedge \mathrm{e}_4)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ menghasilkan enam *bivector*

Contoh 3: Hitung luas parallelogram yang dibentuk oleh vektor-vektor

$a = e_1 + e_3 + e_4$ dan $b = e_1 + e_2 + e_4$

Jawaban: Luas parallelogram adalah $\|a \wedge b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta$

$\|a\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\|b\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \frac{(1)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 48.19^\circ$

Sehingga, $\|a \wedge b\| = \|a\|\,\|b\| \sin\theta = \sqrt{3}\,\sqrt{3} \sin 48.19^\circ = 2.2361$

Cara lain:
$$
\begin{aligned}
a \wedge b &= (a_1b_2 - a_2b_1)(e_1 \wedge e_2) + (a_2b_3 - a_3b_2)(e_2 \wedge e_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(e_3 \wedge e_1) \\
&\quad + (a_1b_4 - a_4b_1)(e_1 \wedge e_4) + (a_2b_4 - a_4b_2)(e_2 \wedge e_4) + (a_3b_4 - a_4b_3)(e_3 \wedge e_4) \\
&= (1)(e_1 \wedge e_2) + (-1)(e_2 \wedge e_3) + (1)(e_3 \wedge e_1) + (-1)(e_2 \wedge e_4) + (1)(e_3 \wedge e_4)
\end{aligned}
$$

maka $\|a \wedge b\| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{5} = 2.2361$

Latihan Soal UAS 2019

Diketahui dua buah vector:

$a = 2e_1 + 2e_2 + e_3$

$b = 3e_1 + 2e_2 - 2e_3$

(a) Hitunglah luas jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor *a* dan *b*

(b) Luas bayangan jajaran genjang (a) pada bidang $e_1 \wedge e_2$

<u>Jawaban</u>:

(a) Luas jajaran genjang (parallelogram) yang dibentuk oleh *a* dan *b* adalah $\|a \wedge b\|$

$$
\begin{aligned}
a \wedge b &= (2e_1 + 2e_2 + e_3) \wedge (3e_1 + 2e_2 - 2e_3) \\
&= 6(e_1 \wedge e_1) + 4(e_1 \wedge e_2) - 4(e_1 \wedge e_3) + 6(e_2 \wedge e_1) + 4(e_2 \wedge e_2) - 4(e_2 \wedge e_3) \\
&\quad + 3(e_3 \wedge e_1) + 2(e_3 \wedge e_2) - 2(e_3 \wedge e_3) \\
&= 0 + 4(e_1 \wedge e_2) - 4(e_1 \wedge e_3) + 6(e_2 \wedge e_1) + 0 - 4(e_2 \wedge e_3) \\
&\quad + 3(e_3 \wedge e_1) + 2(e_3 \wedge e_2) - 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= 0 + 4(e_1 \wedge e_2) - 4(e_1 \wedge e_3) + 6(e_2 \wedge e_1) + 0 - 4(e_2 \wedge e_3) \\ &\quad + 3(e_3 \wedge e_1) + 2(e_3 \wedge e_2) - 0 \\ &= 4(e_1 \wedge e_2) - 6(e_1 \wedge e_2) + 4(e_3 \wedge e_1) + 3(e_3 \wedge e_1) - 4(e_2 \wedge e_3) - 2(e_2 \wedge e_3) \\ &= -2(e_1 \wedge e_2) - 6(e_2 \wedge e_3) + 7(e_3 \wedge e_1) \end{aligned}$$

Luas jajaran genjang = $\|a \wedge b\| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2 + (7)^2} = \sqrt{4 + 36 + 49} = \sqrt{89}$

(b) Luas bayangan jajaran genjang (a) pada bidang $e_1 \wedge e_2$ adalah luas proyeksi jajaran genjang pada bidang $e_1 \wedge e_2$. Proyeksi $a \wedge b$ pada bidang $e_1 \wedge e_2$ adalah $-2(e_1 \wedge e_2)$,sehingga luas bertandanya (*signed area*) adalah –2.

Latihan Soal Mandiri

1. (Soal UAS 2017)

Diberikan tiga buah vektor:

$$\mathbf{a} = 2e_1 + e_2 + e_3$$
$$\mathbf{b} = 3e_1 + 5e_2 - 2e_3$$
$$\mathbf{c} = -e_1 + 2e_2 - e_3$$

Hitunglah :

1). $a \wedge b$ 2). $\|a \wedge b\|$

2. (Soal UAS 2017)

Diketahui tiga buah vektor :

$$\mathbf{a} = e_1 + e_2 - 2e_3; \qquad \mathbf{b} = e_1 - e2_2 + 2e_3; \qquad \mathbf{c} = 2e_1 + e_2 - 2e_3$$

1. Tentukan luas bayangan yang merupakan proyeksi dari bidang yang dibentuk oleh vektor **a** dan vektor **b** pada bidang $(e_1 \wedge e_2)$