

**Seri bahan kuliah Algeo #16 - 2025**

# Ruang Vektor Umum (bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

**Program Studi Teknik Informatika  
STEI-ITB**

**Sumber:**

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10<sup>th</sup> Edition*

# Basis

- Jika  $V$  adalah ruang vektor dan  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor  $V$ , maka  $S$  dinamakan **basis** untuk  $V$  jika:
  - (a)  $S$  bebas linier
  - (b)  $S$  membangun  $V$
- Jika  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  adalah basis untuk ruang vektor  $V$ , maka setiap vektor  $\mathbf{v}$  di  $V$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

tepat dengan satu cara

**Contoh 11:** Vektor-vektor satuan standard  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ , dan  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  adalah basis standard untuk  $\mathbb{R}^3$ , karena

- (a) Sudah ditunjukkan pada Contoh 10 bahwa  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  bebas linier
- (b) Sudah ditunjukkan pada Contoh 3 bahwa  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  membangun  $\mathbb{R}^3$

Secara umum, vektor-vektor satuan standard,

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ..., dan  $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ ,  
adalah basis standard untuk  $\mathbb{R}^n$

**Contoh 12:** Perhatikan bahwa  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  dan  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$  adalah basis untuk  $\mathbb{R}^3$ .

Jawaban:

(a) Harus ditunjukkan bahwa  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , dan  $\mathbf{v}_3$  bebas linier sbb:

$$k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) = \mathbf{0}$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 0$

(b) Harus ditunjukkan bahwa  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , dan  $\mathbf{v}_3$  membangun  $\mathbb{R}^3$  sbb:

Misalkan vektor sembarang  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  dapat dinyatakan sebagai  $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$

$$(w_1, w_2, w_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= w_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= w_2 \\ k_1 + 4k_3 &= w_3 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (a) dan (b) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu  $\det(A) \neq 0$ . Karena  $\det(A) = -1$  (periksa!), maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$$

$$k_1 + 4k_3 = 0$$

memiliki solusi trivial, dan SPL:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = w_1$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = w_2$$

$$k_1 + 4k_3 = w_3$$

dapat dipecahkan. Jadi,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , dan  $\mathbf{v}_3$  adalah basis untuk  $\mathbb{R}^3$ .

- Contoh basis lainnya:

1.  $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  adalah basis untuk ruang vektor polinom  $P_n$

2.  $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , dan  $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  adalah basis untuk ruang vektor matriks  $2 \times 2$ , yaitu  $M_{22}$

# Dimensi

- **Dimensi** ruang vektor  $V$  yang berhingga, dinyatakan dengan  $\dim(V)$ , adalah banyaknya vektor di dalam basis.
- Contoh:
  - (i)  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , sebab basis standardnya memiliki 2 vektor ( $\mathbf{i}$  dan  $\mathbf{j}$ )
  - (ii)  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , sebab basis standardnya memiliki 3 vektor ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{k}$ )
  - (iii)  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ , sebab basis standardnya memiliki  $n$  vektor
  - (iv)  $\dim(P_n) = n + 1$ , sebab basis standardnya memiliki  $n + 1$  vektor, yaitu
$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$
  - (v)  $\dim(M_{mn}) = mn$ , sebab basis standardnya memiliki  $mn$  vektor

**Contoh 13:** Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi SPL homogen berikut:

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

Jawaban: Bila SPL tersebut diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, maka dihasilkan solusinya sebagai berikut:

$$x_1 = -s - t; x_2 = s, x_3 = -t; x_4 = 0, x_5 = t$$

Solusi SPL dalam bentuk vektor (matriks kolom):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi SPL dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

yang dalam hal ini,  $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$  dan  $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$

Solusi SPL tersebut membentuk ruang vektor  $V$ . Jadi,  $V$  dibangun oleh  $\mathbf{v}_1$  dan  $\mathbf{v}_2$ .

Dapat ditunjukkan bahwa  $\mathbf{v}_1$  dan  $\mathbf{v}_2$  bebas linier (buktikan!).

Jadi basis ruang vektor solusi SPL adalah  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  dan  $\dim(V) = 2$ .

# Latihan (Kuis 2021)

Diketahui sistem persamaan linear sbb :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$$

- a) Tentukanlah basisnya
- b) Tentukanlah dimensinya.

## Jawaban:

Harus dicari solusi SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \longrightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = -2x_2 + 5x_4 - 7x_5$$

Solusinya :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka yang menjadi basisnya adalah :

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan dimensinya adalah 3 (karena basisnya ada 3)

# Vektor Koordinat (relatif pada basis)

- Jika  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  adalah basis untuk ruang vektor  $V$ , sedemikian sehingga setiap vektor  $\mathbf{v}$  di dalam  $V$  dapat dinyatakan sebagai

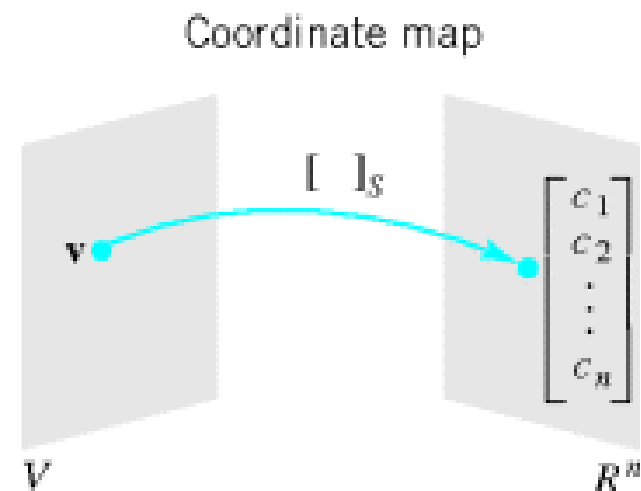
$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

maka koordinat  $\mathbf{v}$  relatif terhadap basis  $S$  adalah

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

atau dalam bentuk matriks koordinat:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



**Contoh 14:** Sudah dibuktikan pada Contoh 12 bahwa  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$  dan  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$  adalah basis untuk  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Tentukan vektor koordinat  $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$  relatif terhadap basis  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

(b) Carilah vektor di  $\mathbb{R}^3$  yang koordinat vektornya adalah  $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$

Jawaban:

(a)  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 & = & -1 \\ c_1 & + & 4c_3 = 9 \end{array}$$

Solusi SPL tersebut adalah  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = 2$ , maka  $(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$

(b)  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$

# Mengubah Basis

- Jika  $\mathbf{v}$  adalah vektor di dalam  $V$  dan kita mengubah basis  $V$  dari basis  $B$  menjadi basis  $B'$ , bagaimana mengubah koordinat vektor  $[\mathbf{v}]_B$  menjadi  $[\mathbf{v}]_{B'}$ ?
- Jika kita mengubah basis ruang vektor  $V$  dari basis lama  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  menjadi basis baru  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ , maka untuk setiap vektor  $\mathbf{v}$  di dalam  $V$ , koordinat lama vektor  $[\mathbf{v}]_B$  menjadi  $[\mathbf{v}]_{B'}$  dihubungkan dengan relasi berikut:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$$

yang dalam hal ini, kolom-kolom  $P$  adalah koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yakni kolom-kolom  $P$  adalah

$$[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \dots, [\mathbf{u}'_n]_B$$

- $P$  disebut **matriks transisi** dari basis  $B'$  ke basis  $B$ .
- Jika  $P$  adalah matriks transisi dari basis  $B'$  ke basis  $B$  untuk ruang vektor  $V$ , maka matriks  $P$  dapat dibalikkan dan  $P^{-1}$  adalah matriks transisi dari  $B$  ke  $B'$ .

- **Algoritma menghitung  $P_{B \rightarrow B'}$  :**

Step 1: Bentuklah matriks  $[B' \mid B]$

Step 2: Lakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks dari step 1 menjadi matriks eselon baris tereduksi.

Step 3: Matriks hasil step 2 akan menjadi  $[I \mid P_{B \rightarrow B'}]$

Step 4: Ruas kanan dari hasil step 3 (sebelah tanda  $|$ ) menjadi  $P_{B \rightarrow B'}$

- Algoritma di atas dapat diringkas ke dalam diagram:

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] \xrightarrow{\text{OBE}} [I \mid P_{B \rightarrow B'}]$$

**Contoh 15:** Di dalam  $R^2$ , basis standardnya adalah  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{(1,0), (0, 1)\}$ . Basis yang lain untuk  $R^2$  adalah  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$

(a) Tentukan matriks transisi dari  $B'$  ke  $B$

(b) Tentukan matriks transisi dari  $B$  ke  $B'$

Jawaban:

(a) Pada kasus ini,  $B' =$  basis lama, dan  $B =$  basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} [I \mid P_{B' \rightarrow B}]$$

Karena ruas kiri sudah berbentuk matriks identitas, maka tidak perlu dilakukan OBE, sehingga matriks transisi adalah  $P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Pada kasus ini,  $B =$  basis lama, dan  $B' =$  basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Matriks transisi adalah  $P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Menghitung koordinat vektor  $\mathbf{v}$  dari basis  $B$  ke  $B'$ :

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [\mathbf{v}]_B$$

- Menghitung koordinat vektor  $\mathbf{v}$  dari basis  $B'$  ke  $B$ :

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\mathbf{v}]_{B'}$$

**Contoh 16:** Berdasarkan Contoh 15, misalkan koordinat vektor  $\mathbf{v}$  pada basis  $B'$  adalah  $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ , maka koordinat  $\mathbf{v}$  pada basis  $B$  adalah

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \rightarrow B} [\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Contoh 17 (soal kuis 2 tahun 2019):** Diketahui basis  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  dan basis  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$  sebagai berikut:  $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$  dan  $\mathbf{u}'_1 = (3, 1, -5)$ ,  $\mathbf{u}'_2 = (1, 1, -3)$ ,  $\mathbf{u}'_3 = (-1, 0, 2)$ .

- (a) Tentukan matriks transisi dari B ke B'
- (b) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B
- (c) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B'
- (d) Tentukan koordinat vektor  $\mathbf{w}$  pada basis B, jika koordinat W pada basis standard (S) adalah  $(\mathbf{w})_S = (-5, 8, -5)$ .

Jawaban:

- (a) Matriks transisi dari B ke B':

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) = (I | P_{B \rightarrow B'})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) Matriks transisi dari basis standard ke basis B

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) = (I|P_{S \rightarrow B})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{S \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Matriks transisi dari basis standard ke basis B'

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = (I|P_{S \rightarrow B'})$$

$$\text{Jadi, matriks transisi } P_{S \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Koordinat vektor  $\mathbf{w}$  pada basis B, jika koordinat  $\mathbf{w}$  pada basis standard adalah  $[\mathbf{w}]_S = (-5, 8, -5)$  dihitung sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

# Latihan (Kuis 2021)

Misalkan  $B1 = \{u1, u2\}$  dan  $B2 = \{v1, v2\}$  adalah basis-basis untuk ruang vektor  $R2$ , yang dalam hal ini  $u1 = (2, 2)$ ,  $u2 = (4, -1)$ ,  $v1 = (1, 3)$  dan  $v2 = (-1, -1)$

- a) Tentukan matriks transisi dari  $B1$  ke  $B2$
- b) Tentukan koordinat vektor  $\mathbf{w} = (5, -3)$  relatif pada basis  $B1$  lalu gunakan matriks transisi dari  $B1$  ke  $B2$  untuk menghitung koordinat vektor  $\mathbf{w}$  relatif pada basis  $B2$
- c) Lalu tentukan vektor  $\mathbf{w}$  dengan basis  $B2$  tersebut.

## Jawaban:

a) Pada kasus ini, B1 = basis lama, dan B2 = basis baru

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 & -13/2 \end{array} \right)$$

$$\text{Matriks transisi adalah } P_{B1 \rightarrow B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix}$$

b)  $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \rightarrow (5, -3) = c_1(2, 2) + c_2(4, -1)$

Diperoleh SPL:

$$2c_1 + 4c_2 = 5$$

$$2c_1 - c_2 = -3$$

$$\text{Solusi: } c_1 = -7/10; c_2 = 8/5$$

Jadi, koordinat  $\mathbf{w}$  relative pada basis B1 adalah  $(\mathbf{w})_{B1} = (-7/10, 8/5)$

Koordinat vektor  $\mathbf{w}$  relative pada basis B2 adalah:

$$(\mathbf{w})_{B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/10 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(Periksa kebenaran koordinat relative  $w$  pada basis  $B_2$  sbb:

$$(5, -3) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1(1, 3) + c_2(-1, -1)$$

Diperoleh SPL:

$$c_1 - c_2 = 5$$

$$3c_1 - c_2 = -3$$

$$\text{Solusi: } c_1 = -4 \text{ dan } c_2 = -9$$

Jadi, koordinat  $w$  relative pada basis  $B_2$  adalah  $(w)_{B_2} = (-4, -9)$

c) Vektor  $w$  pada basis  $B_2$  adalah:  $w' = c_1 v_1 + c_2 v_2 = -4(1, 3) - 9(-1, -1)$   
 $= (-4, -12) + (9, 9) = (5, -3)$

Tidak berubah (tetap). Yang berubah adalah koordinatnya.

Bersambung ke Bagian 3