

Seri bahan kuliah Algeo #9 - 2025

Determinan (bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

**Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB**

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor

- Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}

= determinan upa-matriks (*submatrix*) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Misalkan A adalah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, untuk menghitung M_{11} tidak melibatkan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

Untuk menghitung M_{23} tidak melibatkan elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (6)(5) - (-3)(1) = 33$$

Contoh 1: Tinjau matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Minor entri dan kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(1) = 10$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (2)(1) = 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (6)(3) - (1)(1) = 17$$

dan seterusnya untuk $M_{21}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}$ dihitung dengan cara yang sama

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 26$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 8$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = 17$$

dan seterusnya untuk $C_{21}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$ dihitung dengan cara yang sama

- Jadi, kofaktor C_{ij} berkoresponden dengan minor entri M_{ij} , hanya berbeda tanda (positif atau negatif, tergantung nilai i dan j)
- Cara mengingat tanda positif dan negative untuk C_{ij} adalah dengan memperhatikan pola berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan kofaktor, maka determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan salah satu dari persamaan berikut:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$$

$$\vdots$$

$$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara baris

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$$

$$\vdots$$

$$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

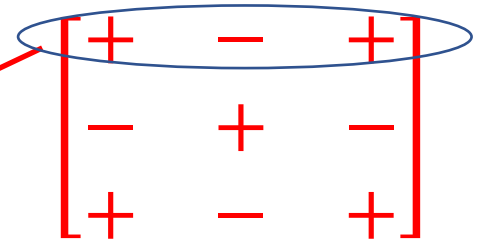
Secara kolom

Contoh 2: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ determinan matriks A dihitung

dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut (misalkan acuannya adalah baris pertama matriks A):

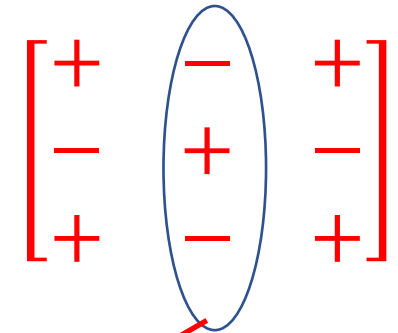
$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\{(0)(-3) - (4)(2)\} + 1\{(5)(-3) - (4)(8)\} + 2\{(5)(2) - (0)(8)\} \\ &= 3(-8) + (-47) + 2(10) \\ &= -24 - 47 + 20 \\ &= -51 \end{aligned}$$



- Misalkan digunakan kolom kedua sebagai acuan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$\det(A) = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \{(5)(-3) - (4)(8)\} + 0 - 2\{(3)(4) - (2)(5)\}$$

$$= (-15 - 32) - 2(12 - 10)$$

$$= (-47) - 2(2)$$

$$= -51$$

Contoh 3: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \left\{ 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \right\} - 5 \left\{ 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right\} + \dots \\ &= -18 \end{aligned}$$

- **Tips 1:** gunakan acuan baris/kolom yang banyak 0 untuk menghemat perhitungan.

Contoh 4: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = -3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-4) + 0 + 0$$

$$= 12$$

- **Tips 2:** terapkan OBE untuk memperoleh baris yang mengandung 0

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (dari Contoh 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{R1} - 3\text{R2} \\ \sim \\ \text{R3} - 2\text{R2} \\ \text{R4} - 3\text{R2}}]{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{R3} + \text{R1}} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Matriks Kofaktor

- Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij} .
- Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Adjoin* dari A adalah transpose matriks kofaktor:

$$\text{adj}(A) = \text{transpose matriks kofaktor}$$

Contoh 6: Tentukan matriks kofaktor dan adjoin dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks kofaktor:
$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Mencari matriks balikan menggunakan adjoin

- Balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Contoh 7. Determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ setelah dihitung adalah $\det(A) = 64$.

Maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & -10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/64 & 4/64 & 12/64 \\ 6/64 & 2/64 & -10/64 \\ -16/64 & -10/64 & 16/64 \end{bmatrix}$$

Kaidah Cramer

- Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga $\det(A) \neq 0$, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} , \quad \dots , \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke- j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Diberikan SPL

$$-x + 2y - 3z = 1$$

$$2x \quad \quad + \quad z = 0$$

$$3x - 4y + 4z = 2$$

Hitung solusinya dengan kaidah Cramer!

Penyelesaian: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

- Hitung determinan masing-masing A_j :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

- Hitung nilai x_i sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

Contoh 7 (Kuis 2021). Diketahui sebuah sistem persamaan linier homogen $Ax = 0$ sebagai berikut:

$$2x - y - 3z = 0$$

$$-x + 2y - 3z = 0$$

$$x + y + 4z = 0$$

- (a) Tentukan determinan matriks A pada persamaan di atas dengan ekspansi kofaktor
- (b) Tentukan $\text{adj}(A)$, yaitu matriks adjoin A
- (c) Tentukan balikan (inverse) matriks A dengan menggunakan $\text{adj}(A)$
- (d) Apakah sistem persamaan linier homogen di atas memiliki solusi trivial atau non-trivial? Jelaskan

Jawaban:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(8 - (-3)) + (-4 + 3) - 3(-1 - 2) \\ &= 22 - 1 + 9 = 30 \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Matriks kofaktor} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ 1 & 11 & -3 \\ 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \text{transpose matriks cofactor} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 9 \\ 1 & 11 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 & 1 & 9 \\ 1 & 11 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/30 & 1/30 & 9/30 \\ 1/30 & 11/30 & 9/30 \\ -3/30 & -3/30 & 3/30 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 11/30 & 1/30 & 3/10 \\ 1/30 & 11/30 & 3/10 \\ -1/10 & -1/10 & 1/10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(d) Karena A memiliki balikan (A^{-1} ada), maka SPL homogen $Ax = 0$ memiliki solusi trivial (yaitu solusinya hanyalah $x_1 = x_2 = x_3 = 0$)

Contoh 8 (Kuis 2022) Diketahui sistem persamaan linear sbb:

$$\begin{aligned}x_1 + \quad \quad + 2x_3 &= 6 \\-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8\end{aligned}$$

Selesaikan dengan menggunakan kaidah Cramer

Jawaban: $Ax = b$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, A2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A1) = -40 \det(A2) = 72$$

$$\det(A3) = 152$$

$$x_1 = \det(A1)/\det(A) = -40/44 = -10/11$$

$$x_2 = \det(A2)/\det(A) = 72/44 = 18/11$$

$$x_3 = \det(A3)/\det(A) = 152/44 = 38/11$$

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut dengan ekspansi kofaktor:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$