

# Aplikasi Metode Eliminasi Gauss di dalam Metode Numerik

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

**Program Studi Teknik Informatika  
STEI-ITB**

# Apa itu Metode Numerik?

- **Numerik**: segala sesuatu yang berkaitan dengan angka
- **Metode**: cara yang sistematis untuk menyelesaikan suatu persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan
- **Metode numerik**: cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi aritmetika (+, -, \*, /) pada angka

- Dua cara penyelesaian persoalan matematika:
  1. Secara analitik → solusinya eksak (tepat)
  2. Secara numerik → solusinya berupa hampiran (aproksimasi)
- *Secara analitik*: menggunakan rumus dan teorema yang sudah baku di dalam matematika → metode analitik
- *Secara numerik*: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmetika biasa → metode numerik.

- Contoh: Menghitung integral  $\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

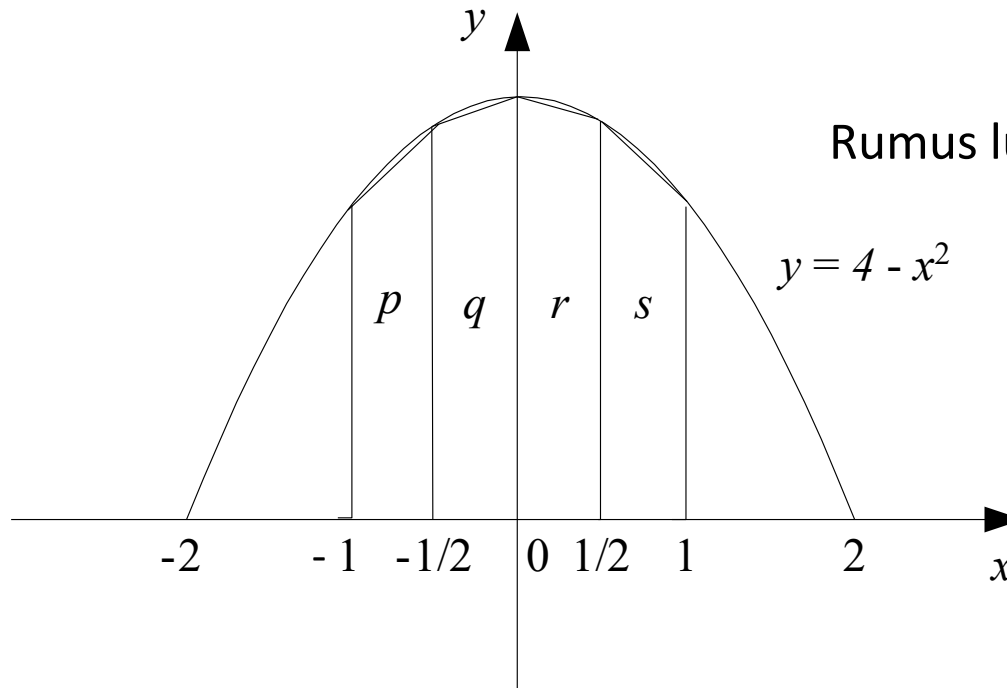
*Metode analitik:*

Rumus:  $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &= \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left[ 4(1) - \frac{1}{3}(1) \right] - \left[ 4(-1) - \frac{1}{3}(-1) \right] = 22/3 = 7.33\end{aligned}$$

- *Metode numerik*

Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Rumus luas trapesium = (jumlah sisi sejajar x tinggi )/2

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &\approx p + q + r + s \approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \\
 &\quad \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\} \\
 &\approx 0.5/2 \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\} \\
 &\approx 0.5/2 \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\
 &\approx 7.25
 \end{aligned}$$

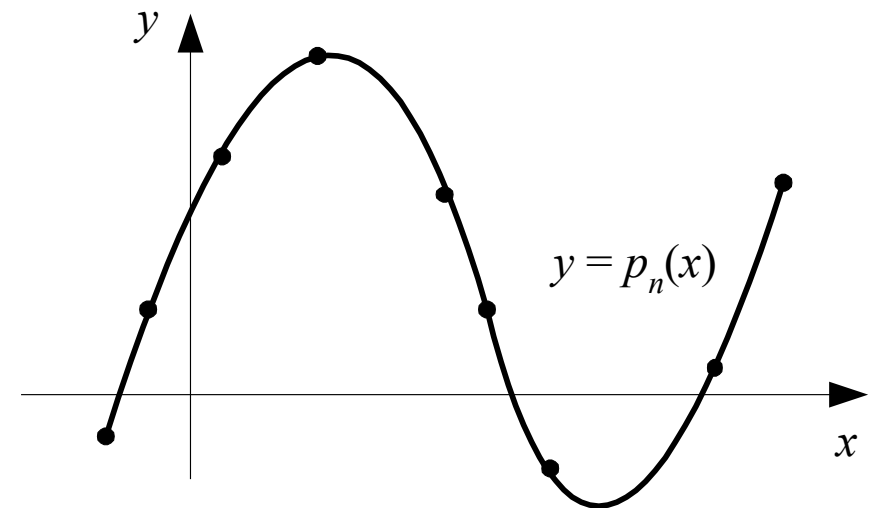
- Solusi dengan metode numerik adalah solusi hampiran (aproksimasi)
- Hampiran terhadap solusi eksak
- Oleh karena itu, solusi numerik mengandung galat.
- **Galat** ( $\varepsilon$ ): perbedaan antara solusi eksak dengan solusi hampiran.
- Definisi:  $\varepsilon = a - \hat{a}$
- Salah satu sumber galat adalah galat pembulatan (*rounding error*).

# Interpolasi

- Salah satu persoalan di dalam metode numerik adalah **interpolasi**
- **Persoalan interpolasi:** Diberikan  $n+1$  buah titik berbeda,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Tentukan persamaan polinom  $p_n(x)$  yang melalui semua titik-titik tersebut sedemikian sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Setelah polinom interpolasi  $p_n(x)$  ditemukan, maka  $p_n(x)$  dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai  $y$  pada  $x = a$ , yaitu  $y = p_n(a)$ .



## Contoh persoalan interpolasi dalam bidang fisika:

Sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

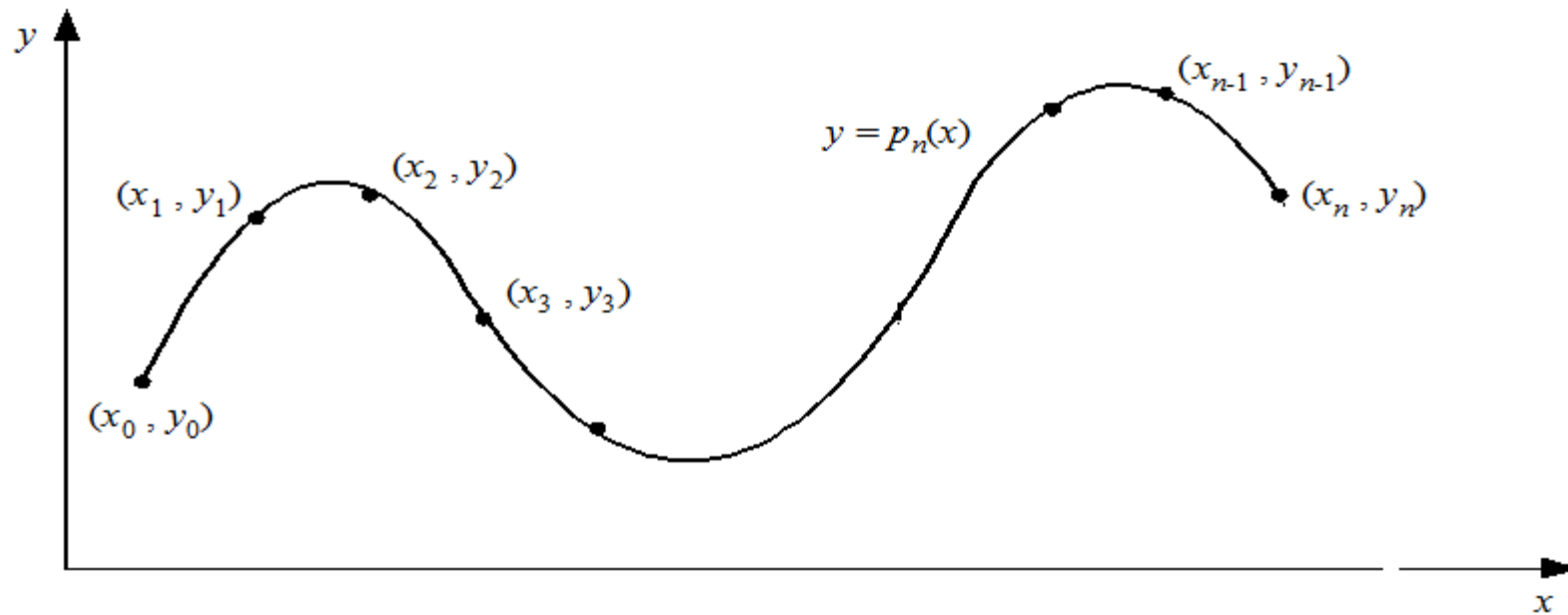
|                                                    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Tegangan yang diterapkan, $x$ , kg/mm <sup>2</sup> | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| Waktu patah, $y$ , jam                             | 40 | 30 | 25 | 40 | 18 | 20 | 22 | 15 |

Persoalan: Berapa waktu patah  $y$  jika tegangan  $x$  yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm<sup>2</sup>.

Fungsi  $y$  terhadap  $x$  tidak diketahui, namun kita dapat mengestimasi nilai  $y$  dengan metode interpolasi

- Polinom interpolasi derajat  $n$  yang melalui titik-titik  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  adalah

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



# 1. Interpolasi Linier

- Interpolasi linier adalah menginterpolasi dua buah titik dengan sebuah persamaan garis lurus.
- Misal diberikan dua buah titik,  $(x_0, y_0)$  dan  $(x_1, y_1)$ . Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

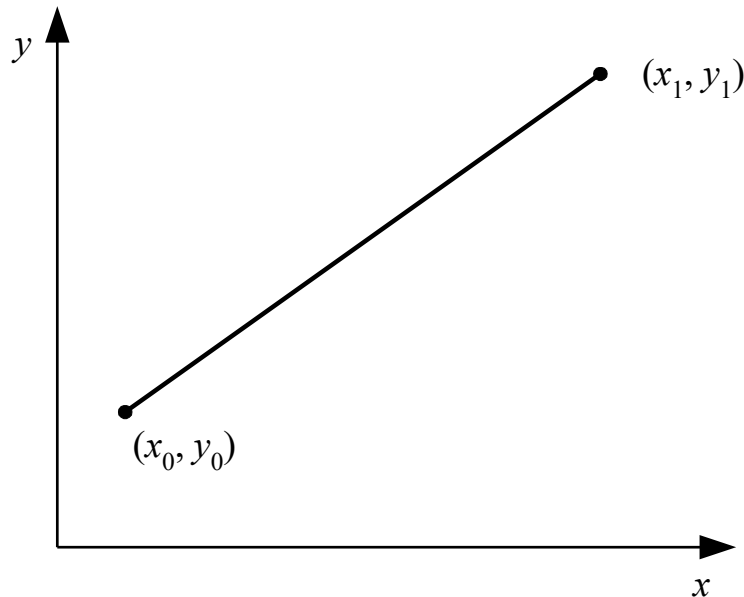
$$p_1(x) = a_0 + a_1x \rightarrow \text{persamaan garis lurus}$$

Sulihkan  $(x_0, y_0)$  dan  $(x_1, y_1)$  ke dalam  $p_1(x)$ :

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1x_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1x_1 \end{aligned}$$



Pecahkan SPL ini dengan metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan untuk memperoleh nilai  $a_0$  dan  $a_1$



**Contoh 1:** Perkirakanlah jumlah penduduk Amerika Serikat pada tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut:

| Tahun                  | 1960  | 1970  |
|------------------------|-------|-------|
| Jumlah penduduk (juta) | 179.3 | 203.2 |

**Jawaban:**

Persamaan polinom derajat 1:  $p_1(x) = a_0 + a_1x$

$$x = 1960 \rightarrow y = 179.3 \rightarrow 179.3 = a_0 + 1960a_1$$

$$x = 1970 \rightarrow y = 203.2 \rightarrow 203.2 = a_0 + 1970a_1$$

← SPL

Solusi SPL tersebut adalah:  $a_0 = -4505.1$  dan  $a_1 = 2.39$

Persamaan polinom interpolasi (garis lurus):  $p_1(x) = -4505.1 + 2.39x$

Estimasi penduduk AS pada tahun 1968 adalah:

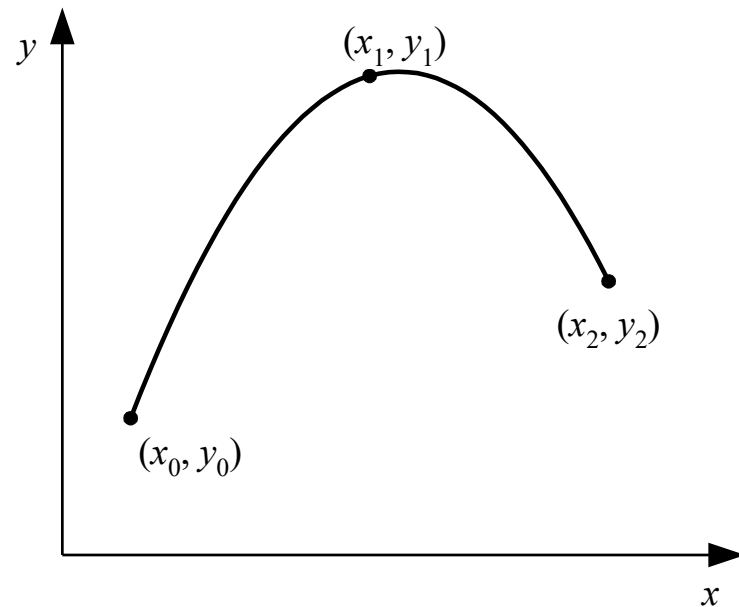
$$p_1(1968) = -4505.1 + (2.39)(1968) = 198.42 \text{ juta}$$

## 2. Interpolasi Kuadrat

- Misal diberikan tiga buah titik data,  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , dan  $(x_2, y_2)$ .
- Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola



- Polinom  $p_2(x)$  ditentukan dengan cara berikut:

1) Sulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan  $p_2(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu  $a_0$ ,  $a_1$ , dan  $a_2$ :

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

2) hitung  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

**Contoh 2:** Diberikan titik (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadrat yang menginterpolasi ketiga titik tersebut lalu estimasi nilai fungsi di  $x = 9.2$ .

**Jawaban:**

Sisten persamaan linjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan

$$a_0 = 0.6762, \quad a_1 = 0.2266, \quad \text{dan} \quad a_3 = -0.0064.$$

Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

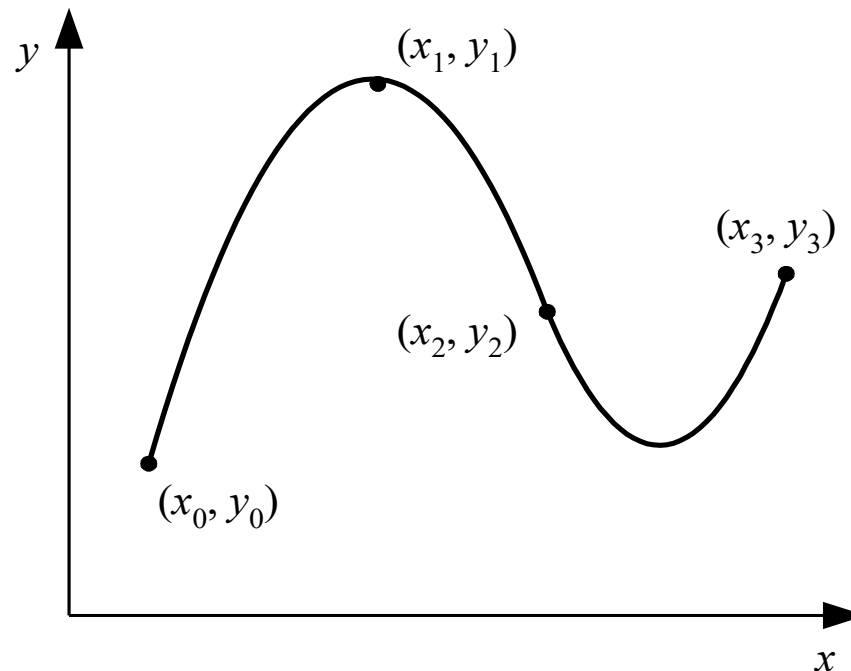
sehingga

$$p_2(9.2) = 2.2192$$

### 3. Interpolasi Kubik

- Misal diberikan empat buah titik data,  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , dan  $(x_3, y_3)$ .
- Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



- Polinom  $p_3(x)$  ditentukan dengan cara berikut:
  - 1) sulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan (P.5.9) ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu  $a_0$  ,  $a_1$  ,  $a_2$  , dan  $a_3$ :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

- 2) hitung  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , dan  $a_3$  dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

- Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat  $n$ :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

asalkan tersedia  $(n+1)$  buah titik data  $(x_i, y_i)$ .

- Dengan menyulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan polinom di atas  $y = p_n(x)$  untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , akan diperoleh  $n + 1$  buah persamaan linier dalam  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

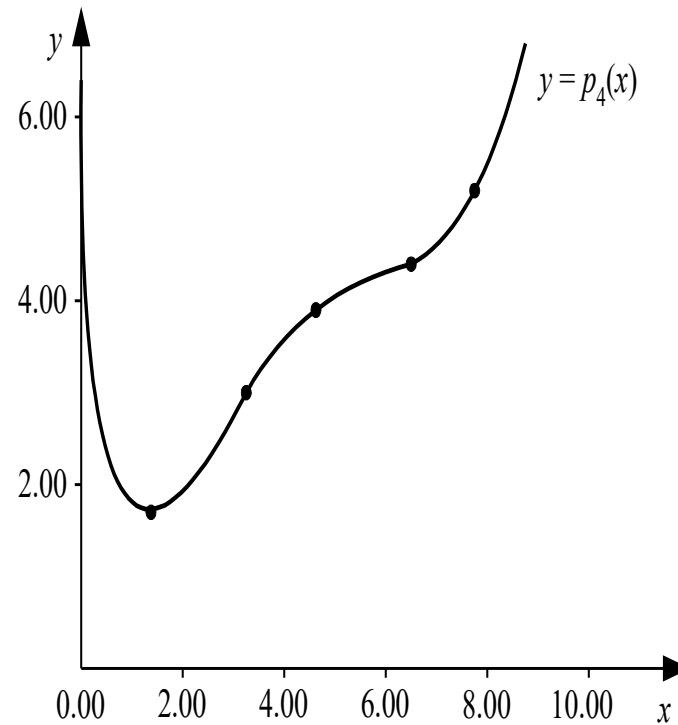
- Solusi sistem persamaan linier ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.

# Regresi

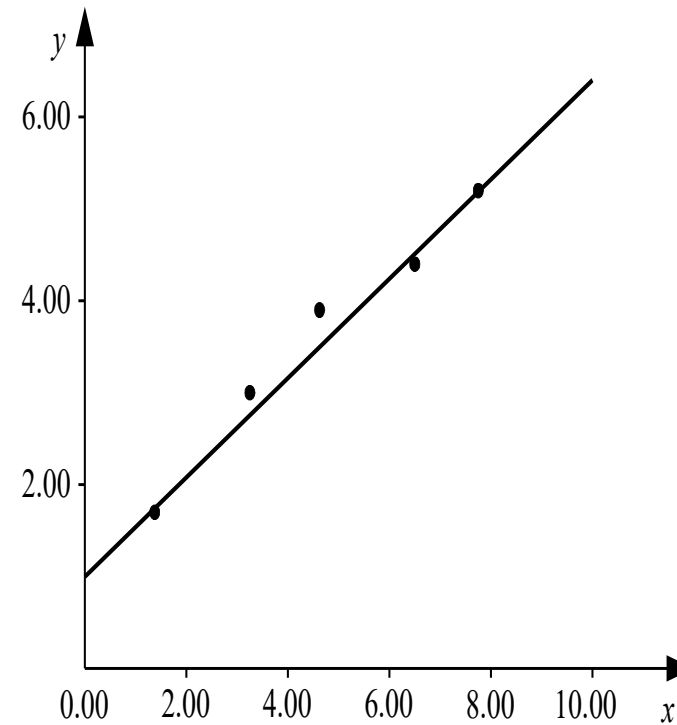
- Regresi adalah teknik pencocokan kurva untuk data yang berketelitian rendah.
- Contoh data yang berketelitian rendah adalah data hasil pengamatan, percobaan di laboratorium, atau data statistik. Data seperti itu kita sebut *data hasil pengukuran*.
- Untuk data hasil pengukuran, pencocokan kurva berarti membuat fungsi **menghampiri** (*approximate*) titik-titik data.
- Kurva fungsi hampiran tidak perlu melalui semua titik data tetapi dekat dengannya tanpa perlu menggunakan polinom berderajat tinggi.

- **Contoh:** diberikan data jarak tempuh ( $y$ ) sebuah kendaraan -dalam mil- setelah  $x$  bulan seperti pada tabel di bawah ini

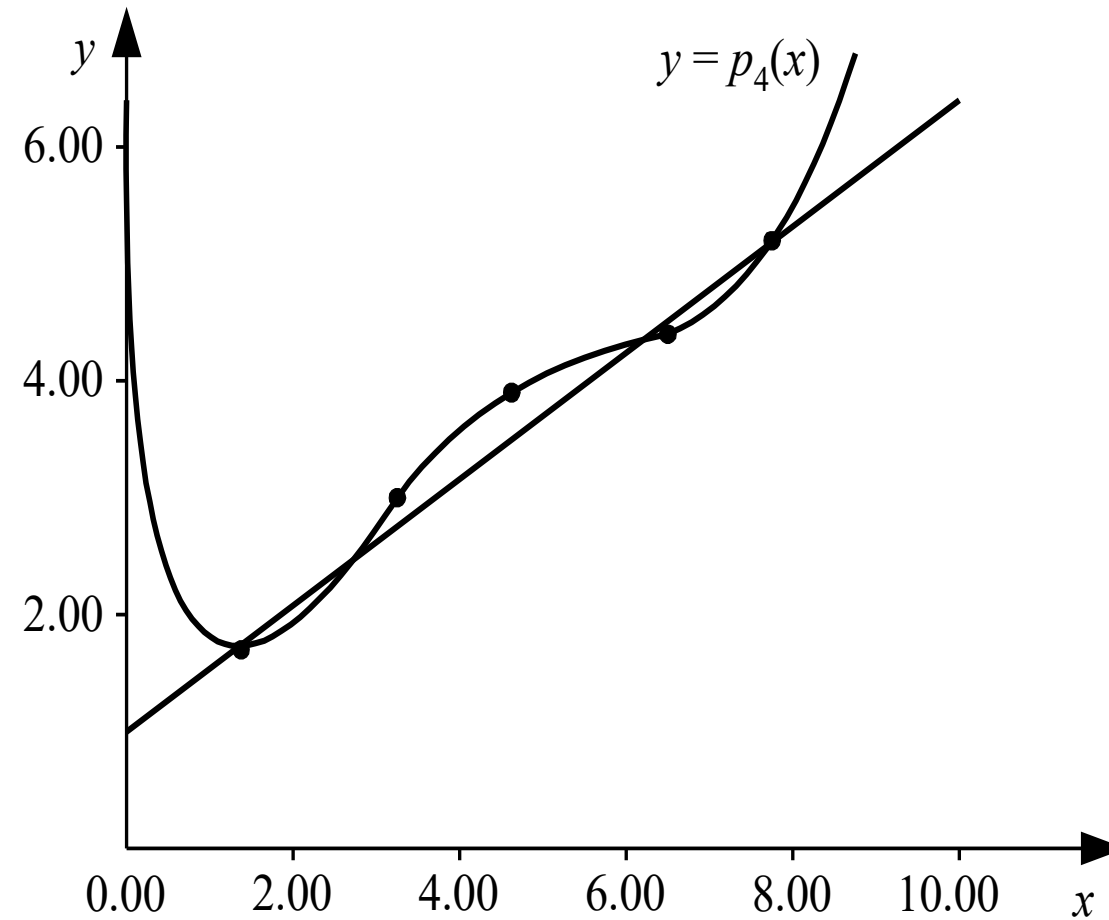
|     |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
| $x$ | 1.38 | 3.39 | 4.75 | 6.56 | 7.76 |
| $y$ | 1.83 | 2.51 | 3.65 | 4.10 | 5.01 |



Interpolasi



Regresi

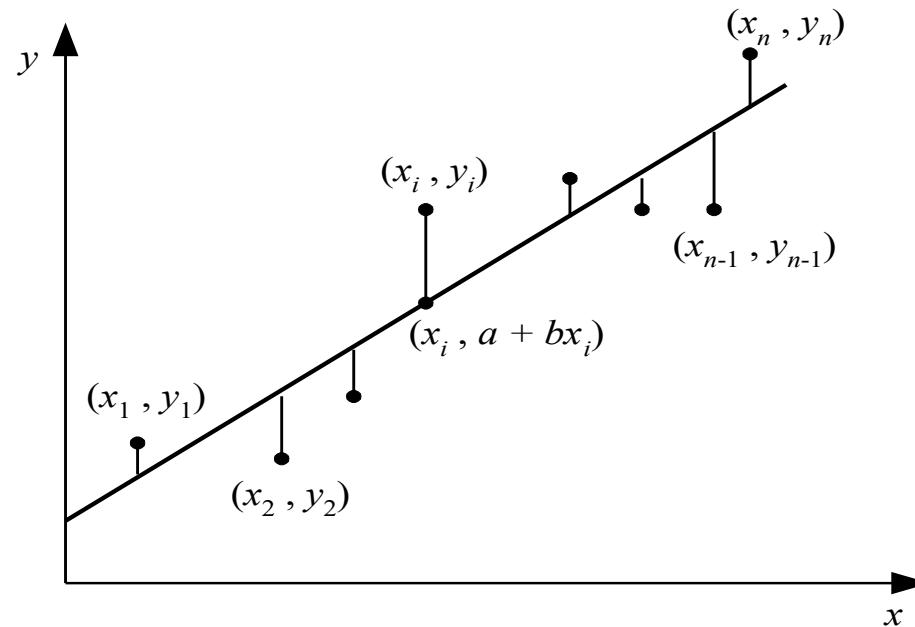


Dari kedua pencocokan tersebut, terlihat bahwa garis lurus memberikan hampiran yang *bagus*, tetapi belum tentu yang *terbaik*. Pengertian terbaik di sini bergantung pada cara kita mengukur galat hampiran.

- Prinsip penting yang harus diketahui dalam mencocokkan kurva untuk data hasil pengukuran adalah:
  - Fungsi mengandung sesedikit mungkin parameter bebas
  - Deviasi fungsi dengan titik data dibuat minimum.
- Kedua prinsip di atas mendasari metode **regresi kuadrat terkecil**.
- Manfaat pencocokan kurva untuk data hasil pengukuran:
  1. Bagi ahli sains/rekayasa: mengembangkan formula empirik untuk sistem yang diteliti.
  2. Bagi ahli ekonomi: menentukan kurva kecenderungan ekonomi untuk “meramalkan” kecenderungan masa depan.

# Regresi Linier

- Misalkan  $(x_i, y_i)$  adalah data hasil pengukuran. Kita akan menghampiri titik-titik tersebut dengan sebuah garis lurus.
- Garis lurus tersebut dibuat sedemikian sehingga galatnya sekecil mungkin dengan titik-titik data.



- Karena data mengandung galat, maka nilai data sebenarnya,  $g(x_i)$ , dapat ditulis sebagai

$$g(x_i) = y_i + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

- yang dalam hal ini,  $e_i$  adalah galat setiap data. Diinginkan fungsi linier

$$f(x) = a + bx \quad (2)$$

- yang mencocokkan data sedemikian sehingga deviasinya,

$$r_i = y_i - f(x_i) = y_i - (a + bx_i) \quad (3)$$

minimum.

Total kuadrat deviasi persamaan (4) adalah

$$R = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Agar  $R$  minimum, maka haruslah

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2 \sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

Untuk selanjutnya, notasi ditulis “ $\sum$ ” saja.

***Penyelesaian:***

Masing-masing ruas kedua persamaaan dibagi dengan -2:

$$\begin{aligned}\sum(y_i - a - bx_i) &= 0 &\Rightarrow \sum y_i - \sum a - \sum bx_i &= 0 \\ \sum x_i(y_i - a - bx_i) &= 0 &\Rightarrow \sum x_i y_i - \sum ax_i - \sum bx_i^2 &= 0\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\sum a + \sum bx_i &= \sum y_i \\ \sum ax_i + \sum bx_i^2 &= \sum x_i y_i\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}na + b\sum x_i &= \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 &= \sum x_i y_i\end{aligned}$$

Kedua persamaan terakhir ini dinamakan **persamaan normal**, dan dapat dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Solusi (nilai  $a$  dan  $b$ ) bisa dicari dengan metode eliminasi Gauss

Untuk menentukan seberapa bagus fungsi hampiran mencocokkan data, kita dapat mengukurnya dengan **galat RMS** (*Root-mean-square error*):

$$E_{RMS} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|^2 \right)^2$$

Semakin kecil nilai  $E_{RMS}$  semakin bagus fungsi hampiran mencocokkan titik-titik data.

- **Contoh:** Tentukan persamaan garis lurus yang mencocokkan data pada tabel di bawah ini. Kemudian, perkirakan nilai  $y$  untuk  $x = 1.0$ .
- **Penyelesaian:**

| $i$ | $x_i$            | $y_i$             | $x_i^2$             | $x_i y_i$              |
|-----|------------------|-------------------|---------------------|------------------------|
| 1   | 0.1              | 0.61              | 0.01                | 0.061                  |
| 2   | 0.4              | 0.92              | 0.16                | 0.368                  |
| 3   | 0.5              | 0.99              | 0.25                | 0.495                  |
| 4   | 0.7              | 1.52              | 0.49                | 1.064                  |
| 5   | 0.7              | 1.47              | 0.49                | 1.029                  |
| 6   | 0.9              | 2.03              | 0.81                | 1.827                  |
|     | $\sum x_i = 3.3$ | $\sum y_i = 7.54$ | $\sum x_i^2 = 2.21$ | $\sum x_i y_i = 4.844$ |

Diperoleh sistem persamaan linjar:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL di atas adalah:  $a = 0.2862$   
 $b = 1.7645$

Persamaan garis regresinya adalah:  $f(x) = 0.2862 + 1.7645x$ .

Perbandingan antara nilai  $y_i$  dan  $f(x_i)$ :

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i) = a + bx_i$ | deviasi  | (deviasi) <sup>2</sup> |
|-----|-------|-------|---------------------|----------|------------------------|
| 1   | 0.1   | 0.61  | 0.46261             | 0.147389 | 0.02172                |
| 2   | 0.4   | 0.92  | 0.99198             | -0.07198 | 0.00518                |
| 3   | 0.5   | 0.99  | 1.16843             | -0.17844 | 0.03184                |
| 4   | 0.7   | 1.52  | 1.52135             | -0.00135 | 0.00000                |
| 5   | 0.7   | 1.47  | 1.52135             | -0.05135 | 0.00264                |
| 6   | 0.9   | 2.03  | 1.87426             | 0.15574  | 0.02425                |
|     |       |       |                     |          | $\Sigma = 0.08563$     |

Taksiran nilai  $y$  untuk  $x = 1.0$  adalah

$$y = f(1.0) = 0.2862 + 1.7645(1.0) = 2.0507$$

Galat RMS adalah  $E_{RMS} = \left(\frac{0.08563}{6}\right)^{1/2} = 0.119464$

# Persamaan regresi linier untuk dua variabel

- Bentuk persamaan regresi:  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$
- Untuk mendapatkan nilai setiap  $\beta$ , digunakan SPL berikut:

$$\begin{array}{ccccccc}
 nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} & + & \cdots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n y_i \\
 b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & + & \cdots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 b_0 \sum_{i=1}^n x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^n x_{ki}x_{2i} & + & \cdots & + & b_k \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^n x_{ki}y_i
 \end{array}$$