

Ujian Tengah Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Semester I tahun akademik 2024/2025
Selasa, 29 Oktober 2024
Waktu: 100 menit

A. Pilihan Ganda

Tuliskan jawaban soal pilihan ganda di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3.

1. Diberikan SPL dengan matriks augmented sebagai berikut. Nilai a dan b menentukan apakah SPL memiliki solusi unik, solusi banyak (dalam bentuk parametrik), atau tidak ada solusi. Pernyataan mana yang benar?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

- A. SPL mempunyai solusi unik jika $a \neq 0$ dan $b = 2$
 - B. SPL mempunyai solusi dengan satu parameter jika $a \neq 0$ dan $b \neq 2$
 - C. SPL mempunyai solusi dengan dua parameter jika $a \neq 0$ dan $b = 2$
 - D. Tidak mempunyai solusi jika $a = 0$ dan $b = 2$
 - E. Semua jawaban di atas benar
 - F. Semua jawaban di atas salah
2. Diketahui A adalah determinan dari matrik pertama dan B adalah determinan matrik kedua, maka berlaku

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix}$$

- A. $B = A$
 - B. $B = -A$
 - C. $B = -2A$
 - D. $B = -3A$
 - E. Tidak ada jawaban yang benar
3. Dua buah vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} di \mathbb{R}^n dikatakan orthogonal jika dipenuhi :
- A. Dua vektor tersebut saling tegak lurus
 - B. Dua vektor tersebut membentuk sudut 90 derajat
 - C. Hasil kali skalar dua vektor tersebut bernilai nol
 - D. Jawaban A,B, dan C benar semua
 - E. Tidak ada jawaban yang benar
4. Jika \mathbf{x} adalah vektor proyeksi dari vektor \mathbf{u} terhadap vektor \mathbf{a} , pernyataan berikut yang benar adalah:
- A. Vektor \mathbf{x} merupakan vektor satuan yang tegak lurus dengan vektor \mathbf{a}
 - B. Vektor \mathbf{x} merupakan vektor satuan yang berimpit dengan vektor \mathbf{a}
 - C. Vektor yang tegak lurus dengan vektor \mathbf{a} , tidak harus vektor satuan
 - D. Vektor yang berimpit dengan vektor \mathbf{a} , tidak harus vektor satuan
 - E. Tidak ada jawaban yang benar

5. Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor berhingga V , maka himpunan vektor di S dapat menjadi basis di V jika dipenuhi sifat-sifat berikut:
- A. Setiap vektor di S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor yang lain
 - B. Dimensi dari ruang vektor V lebih besar dari r
 - C. Jika u adalah vektor sebarang maka u dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di S
 - D. Ada dua diantara jawaban A,B, dan C yang benar
 - E. Tidak ada jawaban yang benar

6. Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks standar matriks untuk operator :

- A. Proyeksi orthogonal terhadap bidang xy
- B. Proyeksi orthogonal terhadap bidang xz
- C. Proyeksi orthogonal terhadap bidang yz
- D. Refleksi terhadap bidang xy
- E. Refleksi terhadap bidang xz
- F. Refleksi terhadap bidang yz
- G. Tidak ada jawaban yang benar.

7. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka hal-hal di bawah ini adalah ekuivalen, kecuali :
- A. A adalah *invertible*
 - B. Vektor-vektor kolom A adalah *linearly independent*
 - C. A bisa diekspresikan sebagai perkalian dari matriks-matriks elementer
 - D. *Nullity* A tidak 0
 - E. Vektor baris A membentuk sebuah basis untuk \mathbf{R}^n
 - F. $Ax = b$ mempunyai tepat satu buah solusi untuk setiap $n \times 1$ matriks b .

8. Manakah pernyataan di bawah ini yang paling benar :

- A. Jika u adalah sebuah matriks kolom dan v adalah sebuah matriks kolom maka pastilah:

$$u \cdot v = u^T v = v^T u$$

- B. Jika u adalah sebuah matriks baris dan v adalah sebuah matriks kolom maka pastilah:

$$u \cdot v = uv = v^T u^T$$

- C. Jika u adalah sebuah matriks kolom dan v adalah sebuah matriks baris maka pastilah:

$$u \cdot v = vu = u^T v^T$$

- D. Jika u adalah sebuah matriks baris dan v adalah sebuah matriks baris maka pastilah:

$$u \cdot v = uv^T = vu^T$$

- E. Jawaban A dan B benar
- F. Jawaban A dan C benar
- G. Jawaban B dan C benar
- H. Jawaban A,B dan C benar
- I. Jawaban B,C dan D benar
- J. Semua jawaban benar
- K. Semua jawaban salah

9. Sebuah vektor $\mathbf{v} = (2, -1)$ di \mathbb{R}^2 mula-mula dicerminkan terhadap $y = x$, selanjutnya hasilnya diregang (*shear*) dalam arah x dengan faktor $k = 3$, maka, bayangan akhir \mathbf{v} adalah:
- $(2, -5)$
 - $(5, 2)$
 - $(2, 5)$
 - $(5, -2)$
 - $(-5, 2)$
 - $(-2, 5)$
 - Tidak ada jawaban yang benar
10. Misalkan \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , dan \mathbf{v}_3 adalah vektor-vektor di \mathbb{R}^3 . Vektor-vektor manakah yang terletak sebidang?
- $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$
 - $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$
 - $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 6, -4)$
 - $\mathbf{v}_1 = (4, -7, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (5, -1, 3)$
 - Tidak ada jawaban yang benar

B. Essay

Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

1. Tunjukkan bahwa vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$ dan $\mathbf{v}_2 = (1/3, 2/3, -2/3)$ adalah vektor-vektor yang *orthonormal*. Tentukan vektor \mathbf{v}_3 sedemikian sehingga himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah himpunan yang *orthornomal*. **(Nilai = 15)**

2. Perhatikan bahwa ketiga vektor berikut bebas linier:

$$\mathbf{x}_1 = (3, 1, 5), \mathbf{x}_2 = (-3, 7, 10), \mathbf{x}_3 = (5, 5, 15)$$

lalu nyatakan vektor $(4, 7, -3)$ sebagai kombinasi linier dari ketiga vektor di atas. **(Nilai = 15)**

3. Diberikan transformasi $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{(Nilai = 20)}$$

- Tentukan matriks transformasi T . (Perlihatkan cara perhitungan dengan menggunakan vektor basis satuan).
 - Dengan menggunakan jawaban pada bagian a), tentukan bayangan dari vektor $(2, -1, 3, 4)$.
4. Diketahui basis dari polinom orde dua adalah $\{1 + x, -x + x^2, 1 + x - x^2\}$.
Jika $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linier, yang dalam hal ini: **(Nilai = 20)**

$$T(1 + x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; T(-x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; T(1 + x - x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ maka tentukan } T(1 - x + x^2).$$