Jawaban Soal UTS IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Semester 1 Tahun Akademik 2024/2025

A. Soal Pilihan Ganda

1. F
2. C
3. C
4. D
5. E
6. B
7. D
8. J
9. B
10. B

B. Soal Essay

1. Tunjukkan bahwa vektor-vektor **v1** = (2/3, 1/3, 2/3) dan **v2** = (1/3, 2/3, -2/3) adalah vektor-vektor yang *orthonormal*. Tentukan vektor **v3** sedemikian sehingga himpunan {**v1**, **v2**, **v3**} adalah himpunan yang *orthornomal*. **(Nilai = 15)**

Jawaban:

$$\|\boldsymbol{v1}\| = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + (-\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}} = 1$$

$$\|\boldsymbol{v2}\| = \sqrt{(\tfrac{1}{3})^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + (-\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9}} = 1$$

$$\mathbf{v1} \cdot \mathbf{v2} = (2/3)(1/3) + (1/3)(2/3) + (2/3)(-2/3) = 2/9 + 2/9 - 4/9 = 0$$

Karena **v1** dan **v2** adalah vector satuan dan **v1** · **v2** = 0, maka {**v1**, **v2**} adalah himpunan vector orthonormal

Untuk mencari **v3**, maka **v3** adalah vektor yang orthogonal dengan **v1** dan **v2**:

$$\mathbf{v3} = \mathbf{v1} \times \mathbf{v2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}$$

= (-2/9 – 4/9) **i** – (-4/9 – 2/9)**j** + (4/9 – 1/9)**k**

= -6/9i + 6/9**j** + 3/9 **k**

Jadi, **v3** = (-6/9, 6/9, 3/9) = (-2/3, 2/3, 1/3)

Dapat ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{v3}\| = \sqrt{(\frac{-2}{3})^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1$

Sehingga, {**v1**, **v2, v3**} adalah himpunan vector orthonormal

2. Perlihatkan bahwa ketiga vektor berikut bebas linier:

   x1 = (3, 1, 5), **x2** = (-3, 7, 10), **x3** = (5, 5, 15)

   lalu nyatakan vektor (4, 7, -3) sebagai kombinasi linier dari ketiga vektor di atas.

(Nilai = 15)

Jawaban:

a) Agar **x1**, **x2**, dan **x3** bebas linier, maka

$k_1\mathbf{x1} + k_2\mathbf{x2} + k_3\mathbf{x3} = 0$

k1(3, 1, 5) + k2(-3, 7, 10) + k3(5, 5, 15) = 0

Diperoleh SPL:

3k1 – 3k2 + 5k3 = 0
k1 + 7k2 + 5k3 = 0
5k1 + 10k2 + 15k3 = 0

Agar SPL memiliki solusi trivial, maka haruslah $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} \neq 0$

Dapat dihitung bahwa $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Oleh karena itu, **x1**, **x2**, dan **x3** bebas linier

b) (4, 7, -3) = k1(3, 1, 5) + k2(-3, 7, 10) + k3(5, 5, 15)

Diperoleh SPL:

3k1 – 3k2 + 5k3 = 4
k1 + 7k2 + 5k3 = 7
5k1 + 10k2 + 15k3 = -3

Selesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & -3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 103.5 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -48.7 \end{pmatrix}$$

Jadi, (4, 7, -3) = 103.5 **x1** + 21 **x2** – 48.7 **k3**

atau dalam bentuk pecahan: (4, 7, -3) = 207/2 **x1** + 21 **x2** – 487/10 **k3**

3. Diberikan transformasi $T: R^4 \to R^3$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

(Nilai = 20)

a. Tentukan matriks transformasi T. (Perlihatkan cara perhitungan dengan menggunakan vektor basis satuan).
b. Dengan menggunakan jawaban pada bagian a), tentukan bayangan dari vektor (2,–1,3,4).

Jawaban:

a. Terapkan transformasi T pada vektor basis satuan di R^4, yaitu $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

T(e_1) = T $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

T(e_2) = T $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

T(e_3) = T $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

T(e_4) = T $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matriks transformasi T adalah:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. $$T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 2\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 2 - 1\cdot(-1) + 4\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 - 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 3 - 6 + 4 \\ 2 + 1 + 12 \\ 4 + 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Diketahui basis dari polinom orde dua adalah $\{1 + x, -x + x^2, 1 + x - x^2\}$.
   Jika $T : P_2 \to R^3$ adalah transformasi linier, yang dalam hal ini: **(Nilai = 20)**

   $T(1 + x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $T(-x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T(1 + x - x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka tentukan $T(1 - x + x^2)$.

Jawaban:

Perhatikan bahwa

Himpunan 3 polinom tersebut adalah basis bagi polinom orde 2

Maka polinom tersebut ditulis menjadi

$$1 - x + x^2 = k_1(1 + x) + k_2(-x + x^2) + k_3(1 + x - x^2)$$

Dengan menyederhakan persamaan diatas, didapat SPL sebagai berikut

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 - k_2 + k_3 = -1 \\ k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

Dengan solusi $k_1 = 0, k_2 = 2,$ dan $k_3 = 1$

Jadi kombinasi linear tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$1 - x + x^2 = 0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2)$$

Atau

$$T(1 - x + x^2) = T\big(0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2)\big)$$

Karena T merupakan Transformasi linear maka

$$T(1 - x + x^2) = 0T(1 + x) + 2T(-x + x^2) + 1T(1 + x - x^2)$$

$$= 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$