**Jawaban Soal UTS IF2123 Aljabar Linier dan Geometri**

**Semester 1 Tahun Akademik 2024/2025**

**A. Soal Pilihan Ganda**

1. F

2. C

3. C

4. D

5. E

6. B

7. D

8. J

9. B

10. B

**B. Soal Essay**

1. Tunjukkan bahwa vektor-vektor **v1** = (2/3, 1/3, 2/3) dan **v2** = (1/3, 2/3, -2/3) adalah vektor-vektor yang *orthonormal*. Tentukan vektor **v3** sedemikian sehingga himpunan {**v1**, **v2**, **v3**} adalah himpunan yang *orthornomal*. **(Nilai = 15)**

**Jawaban:**

 $\left‖v1\right‖$ = $\sqrt{(\frac{2}{3})^{2 }+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+ (-\frac{2}{3})^{2}}$ = $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}$ = 1

 $\left‖v2\right‖$ = $\sqrt{(\frac{1}{3})^{2 }+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+ (-\frac{2}{3})^{2}}$ = $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}$ = 1

 **v1** ⋅ **v2** = (2/3)(1/3) + (1/3)(2/3)+ (2/3)(-2/3) = 2/9 + 2/9 – 4/9 = 0

Karena **v1** dan **v2** adalah vector satuan dan **v1** ⋅ **v2** = 0, maka {**v1**, **v2**} adalah himpunan vector orthonormal

Untuk mencari **v3**, maka **v3** adalah vektor yang orthogonal dengan **v1** dan **v2**:

**v3** = **v1** × **v2 =** $\left|\begin{matrix}i&j&k\\2/3&1/3&2/3\\1/3&2/3&-2/3\end{matrix}\right|$ **= i** $\left|\begin{matrix}1/3&2/3\\2/3&-2/3\end{matrix}\right|$ **– j** $\left|\begin{matrix}2/3&2/3\\1/3&-2/3\end{matrix}\right|$ **+ k** $\left|\begin{matrix}2/3&1/3\\1/3&2/3\end{matrix}\right|$

 = (-2/9 – 4/9) **i** – (-4/9 – 2/9)**j** + (4/9 – 1/9)**k**

 = -6/9i + 6/**9j** + 3/9 **k**

Jadi, **v3** = (-6/9, 6/9, 3/9) = (-2/3, 2/3, 1/3)

 Dapat ditunjukkan bahwa $\left‖v3\right‖$ = $\sqrt{(\frac{-2}{3})^{2 }+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+ (\frac{1}{3})^{2}}$ = $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}$ = 1

 Sehingga, {**v1**, **v2, v3**} adalah himpunan vector orthonormal

1. Perlihatkan bahwa ketiga vektor berikut bebas linier:

 **x1** = (3, 1, 5), **x2** = (-3, 7, 10), **x3** = (5, 5, 15)

 lalu nyatakan vektor (4, 7, -3) sebagai kombinasi linier dari ketiga vektor di atas.

**(Nilai = 15)**

 **Jawaban:**

1. Agar **x1**, **x2**, dan **x3** bebas linier, maka

 *k1***x1** + *k2***x2** + *k3***x3** = 0

 k1(3, 1, 5) + k2(-3, 7, 10) + k3(5, 5, 15) = 0

 Diperoleh SPL:

 3k1 – 3k2 + 5k3 = 0

 k1 + 7k2 + 5k3 = 0

 5k1 + 10k2 + 15k3 = 0

 Agar SPL memiliki solusi trivial, maka haruslah $\left|\begin{matrix}3&-3&5\\1&7&5\\5&10&15\end{matrix}\right|$ ≠ 0

 Dapat dihitung bahwa $\left|\begin{matrix}3&-3&5\\1&7&5\\5&10&15\end{matrix}\right|$ = 10 ≠ 0

 Oleh karena itu, **x1**, **x2**, dan **x3** bebas linier

1. (4, 7, -3) = k1(3, 1, 5) + k2(-3, 7, 10) + k3(5, 5, 15)

 Diperoleh SPL:

 3k1 – 3k2 + 5k3 = 4

 k1 + 7k2 + 5k3 = 7

 5k1 + 10k2 + 15k3 = -3

 Selesaikan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan:

 $\left(\begin{matrix}3&-3&5&4\\1&7&5&7\\5&10&15&-3\end{matrix}\right)$ ~ … ~ $\left(\begin{matrix}1&0&0&103.5\\0&1&0&21\\0&0&1&-48.7\end{matrix}\right)$

Jadi, (4, 7, -3) = 103.5 **x1** + 21 **x2** – 48.7 **k3**

atau dalam bentuk pecahan: (4, 7, -3) = 207/2 **x1** + 21 **x2** – 487/10 **k3**

1. Diberikan transformasi $T:R^{4}\rightarrow R^{3}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

 $T=\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\\begin{matrix}x\_{3}\\x\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}5x\_{1}+3x\_{2}-2x\_{3}+x\_{4}\\x\_{1}-x\_{2}+4x\_{3}\\2x\_{1}+x\_{3}-x\_{4}\end{matrix}\right)$

 **(Nilai = 20)**

* 1. Tentukan matriks transformasi T. (Perlihatkan cara perhitungan dengan menggunakan vektor basis satuan).
	2. Dengan menggunakan jawaban pada bagian a), tentukan bayangan dari vektor (2,−1,3,4).

**Jawaban:**

1. Terapkan transformasi T pada vektor basis satuan di $R^{4}$, yaitu $e\_{1}=\left(1,0,0,0\right)$, $e\_{2}=\left(0,1,0,0\right)$, $e\_{3}=\left(0,0,1,0\right)$, $e\_{4}=\left(0,0,0,1\right)$.

T($e\_{1}$) = T $\left(\begin{matrix}1\\0\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}5\\1\\2\end{matrix}\right)$

T($e\_{2}$) = T $\left(\begin{matrix}0\\1\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}3\\-1\\0\end{matrix}\right)$

T($e\_{3}$) = T $\left(\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}-2\\4\\1\end{matrix}\right)$

T($e\_{4}$) = T $\left(\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right)$

Matriks transformasi T adalah:

$$T= \left(\begin{matrix}5&3&-2\\1&-1&4\\2&0&1\end{matrix} \begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right)$$

1. $T=\left(\begin{matrix}2\\-1\\\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}5∙2+3∙\left(-1\right)-2∙3+1∙4\\1∙2-1∙\left(-1\right)+4∙3\\2∙2+0∙\left(-1\right)+1∙3-1∙4\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}10-3-6+4\\2+1+12\\4+3-4\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}5\\15\\3\end{matrix}\right)$
2. Diketahui basis dari polinom orde dua adalah {1 + *x*, –*x* + *x*2, 1 + *x* – *x*2}.

 Jika *T* : *P*2 → *R*3 adalah transformasi linier, yang dalam hal ini: **(Nilai = 20)**

 *T*(1 + *x*) = $\left(\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right)$; *T*(–*x*  + *x*2) = $\left(\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right)$; *T*(1 + *x – x*2) = $\left(\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right)$, maka tentukan *T*(1 – *x* + *x*2).

 **Jawaban:**

