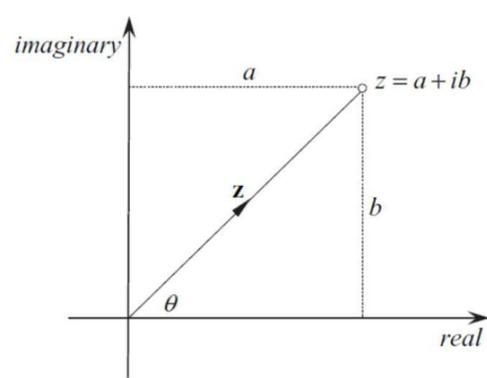
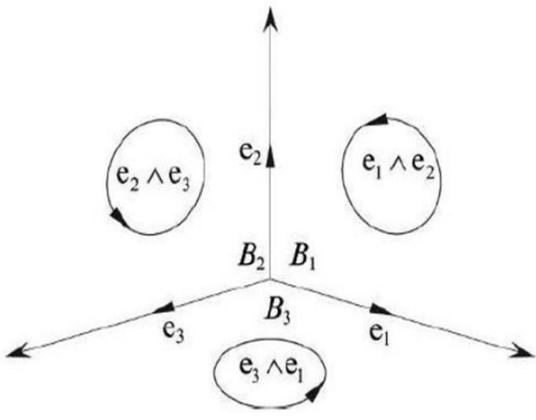


Solusi Ujian Akhir Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
 Semester I tahun akademik 2024/2025
 Kamis, 2 Januari 2024
 Waktu: 120 menit

Berdoalah terlebih dahulu sebelum ujian dimulai.

A. Pilihan Ganda

Tuliskan jawaban soal pilihan ganda di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 3.

<p>1. Diketahui diagram bilangan kompleks seperti pada gambar di samping kanan. Sudut yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor adalah θ. Untuk kuadran 2 dan 3, $a < 0$, maka :</p> <p>A. $\theta = \tan(b/a)$ B. $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ C. $\theta = \tan(a/b)$ D. $\theta = \tan^{-1}(a/b)$ E. $\theta = 180^\circ + \tan(b/a)$ F. $\theta = 180^\circ + \tan(a/b)$ G. $\theta = 180^\circ + \tan^{-1}(a/b)$ H. $\theta = 180^\circ + \tan^{-1}(b/a)$ I. Jawaban di atas semua kurang tepat.</p> <p>Jawaban: H</p>	
<p>2. Perhatikan tiga bilah B_1, B_2, dan B_3 yang dibentuk oleh vektor-vektor satuan. Perpotongan bilah B_2 dan B_3 dapat diturunkan sebagai berikut :</p> $ \begin{aligned} B_2 \vee B_3 &= B_2^* \cdot B_3 \\ &= (e_{123}e_{23}) \cdot e_{31} \\ &= -e_1 \cdot e_{31} \\ &= \frac{1}{2}(-e_{212} + e_{122}) \\ &= e_3 \end{aligned} $ <p>Menurut anda, penurunan di atas adalah:</p> <p>A. Benar B. Salah C. Tidak dapat ditentukan.</p>	

D. Semua jawaban salah

Jawaban: B

3. Pada operasi *wedge product* maka $e_1 \wedge e_2 \wedge e_1$ menyatakan sebuah volume. Pernyataan ini adalah pernyataan yang :

- A. Benar
- B. Salah
- C. Tidak dapat ditentukan.
- D. Semua jawaban salah

Jawaban: B

4. Diketahui z adalah sebuah bilangan kompleks. Jika $z^3 = -1$ maka akar-akar dari z terdiri dari:

- A. Dua akar bilangan real dan 1 akar bilangan kompleks
- B. Ketiga akarnya berupa bilangan kompleks
- C. Satu akar bilangan real dan dua akar yang lain bilangan kompleks
- D. Tidak punya akar real maupun kompleks
- E. Tidak ada jawaban yang benar.

Jawaban: C

5. Salah satu kegunaan dari *quaternion* adalah untuk rotasi titik (atau vektor). Jika diketahui $P(0,1,1)$ akan diputar terhadap sumbu $\hat{u}(0,1,0)$ dan hasil rotasi nya adalah $P'(0,1,-1)$, maka besar sudut putarannya adalah:

- A. $\pi/4$ berlawanan arah jarum jam
- B. $\pi/4$ searah jarum jam
- C. $\pi/2$ berlawanan jarum jam
- D. $\pi/2$ searah jarum jam
- E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: E

6. Multivektor di \mathbb{R}^5 terdiri dari skalar, vektor, bivektor, trivektor, quadvektor dan quintvektor. Jika vektor-vektornya terdiri dari e_1, e_2, e_3, e_4 dan e_5 , maka jumlah trivektornya sebanyak:

- A. 3
- B. 5
- C. 10
- D. 15
- E. 20
- F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: C

7. Pernyataan manakah yang benar?

- A. Jika λ adalah sebuah nilai eigen matriks A , maka sistem linier $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial.
- B. Jika 0 adalah sebuah nilai eigen matriks A , maka himpunan yang terdiri dari kolom-kolom matriks A bebas linier

- C. Nilai-nilai eigen matriks A sama dengan nilai-nilai eigen dari matriks eselon baris tereduksi dari matriks A.
- D. Jika persamaan karakteristik matriks A adalah $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, maka matriks A memiliki balikan
- E. Semua pernyataan di atas benar
- F. Hanya A dan D yang benar
- G. Hanya A dan B yang benar
- H. Hanya A, B, dan C yang benar
- I. Hanya B dan D yang benar
- J. Semua jawaban di atas salah

Jawaban: D

8. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, maka $D = P^{-1}AP$. Jawaban yang benar adalah:

- A. $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- C. $P = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- D. $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: B

9. Matriks A yang berukuran 4×1 didekomposisi menjadi $A = QR$, maka:

- A. Matriks Q berukuran 4×1 dan R berukuran 1×1
- B. Determinan matriks Q sama dengan 1
- C. Determinan A sama dengan nilai mutlak determinan R
- D. Q selalu matriks ortonormal
- E. Jawaban B dan D benar
- F. Jawaban B, C, dan D benar
- G. Jawaban A, B, C, dan D benar
- H. Jawaban A dan B benar
- I. Semua jawaban salah

Jawaban: A, D

10. Misalkan $B_1 = e_2 \wedge e_3$, $B_2 = e_3 \wedge e_1$, $B_3 = e_1 \wedge e_2$, maka selalu berlaku:

- A. $B_1B_2 = B_3$
- B. $B_3B_1 = B_2$
- C. $B_1B_2B_3 = -1$
- D. $B_2B_3 = -B_1$
- E. $B_3B_3 = 1$
- F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: D

B. Soal essay

Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban

1. Dekomposisi A dengan SVD menjadi $A = U\Sigma V^T$, misalkan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ adalah vektor-vektor kolom pada matriks U, $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ adalah elemen-elemen di dalam matriks Σ , dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ adalah vektor-vektor kolom pada matriks V.
- a) Tuliskan bentuk **SVD tereduksi** dari matriks A sampai rank k dalam notasi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, dan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.
- b) Tuliskan bentuk SVD tereduksi dari matriks A yang memiliki SVD sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

- c) Tentukan matriks A tersebut

(Nilai = 15)

Jawaban:

a)

$$A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_k] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

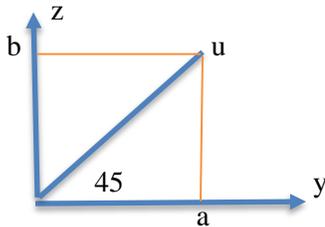
c)

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 4 & -8 & 10 \\ 4 & -8 & 10 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Dengan menggunakan aljabar quaternion, tentukanlah bayangan titik $(1, -1, 2)$ setelah dirotasi sejauh 90° terhadap sumbu putar yang terletak pada bidang YZ. Sumbu tersebut berinklinasi dengan sudut 45° terhadap sumbu Y positif. Catatan : Kalau ketemu angka "akar kuadrat" maka tetap dalam bentuk akar kuadrat, tidak dihitung pakai kalkulator. **(Nilai = 20)**

Jawaban:

Misalkan $\mathbf{u} = (0, a, b)$



$$\tan(45^\circ) = b/a$$

$$1 = b/a \rightarrow a = b$$

$$\text{Jadi, } \mathbf{u} = (0, a, a) = 0 + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{0^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Karena } \|\mathbf{u}\| \text{ harus sama dengan 1, maka } 1 = a\sqrt{2} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Jadi, } \hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

$$\text{Cara lain: } \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{j} \cos 45 + \mathbf{k} \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k} \quad (\text{sudah dalam bentuk vektor satuan, periksa!})$$

Bayangan vektor:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$$

$$\mathbf{q} = \cos(90^\circ/2) + \sin(90^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \cos(90^\circ/2) - \sin(90^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = (1, -1, 2) = 0 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right)(0 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

Jadi, bayangan titik $(1, -1, 2)$ adalah $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Diberikan tiga buah vektor (satu vektor belum diketahui) sebagai berikut:

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

- a) Jika B adalah multivektor, $B = \mathbf{a}\mathbf{b}$, maka jika $B = \mathbf{c}\mathbf{b}$, hitunglah vektor \mathbf{c}
 b) Tentukan hasil perkalian $\mathbf{I}\mathbf{a}$ dan $\mathbf{a}\mathbf{I}$ dimana \mathbf{I} adalah *pseudoscalar* **(Nilai = 15)**

Jawaban:

$$\begin{aligned} \text{a) } B = \mathbf{a}\mathbf{b} &= (4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 4 - 4\mathbf{e}_{12} - 4\mathbf{e}_{13} + 2\mathbf{e}_{21} - 2 - 2\mathbf{e}_{23} - 2\mathbf{e}_{31} + 2\mathbf{e}_{32} + 2 \\ &= 4 - 6\mathbf{e}_{12} - 4\mathbf{e}_{23} + 2\mathbf{e}_{31} \end{aligned}$$

$$B = \mathbf{c}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = B\mathbf{b}^{-1} = (4 - 6\mathbf{e}_{12} - 4\mathbf{e}_{23} + 2\mathbf{e}_{31})(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/3 = (12\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3)/3 = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$$

$$b) \quad la = e_{123}(4e_1 + 2e_2 - 2e_3) = 4e_{1231} + 2e_{1232} - 2e_{1233} = 4e_{23} - 2e_{13} - 2e_{12}$$

$$al = (4e_1 + 2e_2 - 2e_3)(e_{123}) = 4e_{1123} - 2e_{2123} - 2e_{3123} = 4e_{23} - 2e_{13} - 2e_{12}$$

4. Diketahui $a = -e_1 + e_2$, $b = -e_1 + e_3$, $B = e_2 \wedge e_3$, dan $A = a \wedge b$. Tentukan perpotongan bidang A dan B (gunakan operasi *meet*). (Nilai = 20)

Jawaban:

Solusi

$$B = e_2 e_3 = e_{23}$$

$$A = (-e_1 + e_2) \wedge (-e_1 + e_3)$$

$$= -e_{13} + e_{12} + e_{23}$$

$$A \vee B = A^* \cdot B$$

$$= e_{123}(-e_{13} + e_{12} + e_{23}) \cdot e_{23}$$

$$= (-e_{123}e_{13} + e_{123}e_{12} + e_{123}e_{23}) \cdot e_{23}$$

$$= (-e_2 - e_3 - e_1) \cdot (e_{23})$$

$$= \frac{1}{2} \{ (-e_3 + e_2 - e_{123}) - (e_3 - e_2 - e_{123}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ -2e_3 + 2e_2 \}$$

$$= -e_3 + e_2$$

5. Nilai perkiraan atau harapan anda untuk mata kuliah ini (A/AB/B/BC/C/D/E) (Nilai = 2)

$$\text{Total nilai} = 30 + 72 = 102$$

Batas pengumpulan makalah Algegeo; 4 Januari 2025 pukul 23.59.

Terlambat mengumpulkan nilai makalah = 0