Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Eigen, dekomposisi matriks, aljabar kompleks, aljabar quaternion
Dosen: Rila Mandala, Rinaldi M, Judhi Santoso/Arrival Dwi Sentosa
Selasa, 10 Desember 2024
Waktu: 110 menit

---

1. Dengan menggunakan metode diagonalisasi, hitunglah hasil A^{2301} dan $\det(A^{2301})$ untuk matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Nilai: 10 + 5)

Jawaban:

Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1$

Ruang eigen untuk $\lambda = 0$ memiliki basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dan ruang eigen untuk $\lambda = 1$ memiliki basis $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Jadi, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{2301} = P\, D^{2301}\, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2301} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A^{2301}) = 0$

2. Lakukan dekomposisi QR untuk matriks A dan B berikut:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Nilai: 7,5 + 7,5)

Jawaban:

a) $A = QR = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

b) $B = QR = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. Faktorkan matriks koefisien SPL di bawah ini menjadi matriks L dan U (menggunakan operasi baris elementer), lalu gunakan L dan U tersebut untuk menyelesaikan SPL:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(Nilai: 15)

Jawaban:

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$Ly = b \rightarrow y = (5, -1, 3, 7)^T$

$Ux = y \rightarrow x = (-3, 1, 2, 1)^T$

4. Dekomposisi LU dari matriks A diberikan sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Buatlah matriks A (Nilai: 5)

b) Hitung invers dari U menggunakan eliminasi Gauss-Jordan (Nilai: 10)

Jawaban:

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \\ -3 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

b.

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lakukan OBE berikut: $R_1' = R_1 - 2R_2$ dan $R_2' = R_2 - 2R_3$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -9\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Lakukan OBE berikut: $R_1' = R_1 - 3R_3$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Lakukan OBE berikut: $R_2 \,/\, \frac{1}{2}$ dan $R_3 \,/\, \frac{1}{2}$, menghasilkan U^{-1}

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1/2 & -1\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$$

5. Sederhanakan bilangan kompleks berikut menjadi bentuk $a + bi$:

a). $(2 - 3i)(3 + 4i)$ b). $(3 + 2i) / (2 - 2i)$ c). $(e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})/2$ (Nilai: 10)

Jawaban:

a) $(2 - 3i)(3 + 4i)$ = 6 + 8i – 9i – 12i^2 = 6 – i + 12 = 18 – I

b) $(3 + 2i) / (2 - 2i)$ = $\frac{3+2i}{2-2i}\,\frac{2+2i}{2+2i}$ = $\frac{6+6i+4i+4i^2}{4+4} = \frac{6+10i-4}{8} = \frac{2+10i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

c) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})/2 = \frac{0+i+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}+i\,\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2+\sqrt{3}}{4}\,i$

7. Diketahui dua buah quaternion $q_1 = 1 + 2\mathrm{i} - \mathrm{j} + 2\mathrm{k}$ dan $q_2 = 2 - \mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 2\mathrm{k}$, hitunglah

a). $q_1 * q_2$ b). $(q_1 + q_2)^{-1}$ c). $(q_1 + q_2) / (q_1 - q_2)$ (Nilai: 10)

Jawaban:

a) q1 * q2 = 3 - 5i - 5j + 11k

b) $(q_1 + q_2)^{-1}$ = (3 + i + 2j + 4k)$^{-1}$ = $\frac{\overline{q1+q2}}{\|q1+q2\|^2} = \frac{3-i-2j-4k}{9+1+4+16} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30}i - \frac{1}{15}j - \frac{2}{15}k$

c) $(q_1 + q_2) / (q_1 - q_2)$ = $\frac{3+i+2j+4k}{-1+3i-4j}$ = $(3 + i + 2j + 4k)(-1 + 3i - 4j)^{-1}$

$(-1 + 3i - 4j)^{-1}$ = $\frac{-1-3i+4j}{26}$ = -1/26 – 3/26 i + 2/13 j

$(3 + i + 2j + 4k)(-1 + 3i - 4j)^{-1}$ = $(3 + i + 2j + 4k)(-\frac{1}{26} - \frac{3}{26}i + \frac{2}{13}j)$

= -8/26 – i - 2/26 j + 6/26 k

= **-0.3076923076923077 - i - 0.07692307692307693j + 0.23076923076923078k**

8. Misalkan **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor di C^n (C = ruang kompleks).

(a) Hitung **x** sedemikian sehingga i**x** – 3**u** = $\bar{\mathbf{v}}$ jika **u** = (3 – 4i, 2 + i, –6i) dan **v** = (1 + i, 2 – i, 4) (Nilai: 5)

(b) Hitunglah ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}})$) jika diketahui $\mathbf{u} = (2 - 3i, i, 4 - 6i)$ dan $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 0)$, dan $\mathbf{w} = (3 - 5i, 2 + i, 4 - 2i)$ (Nilai: 5)

(c) Berapakah i^i (Nilai: 5)

(d) Bilangan kompleks $z = -3 - 5i$ diputar sejauh 60 derajat berlawanan arah jarum jam, tentukan bayangannya. (Nilai: 5)

Jawaban:

a) x = (-13 – 10i, 4 – 8i, -18 – 4i)
b) -460 – 73i
c) $e^{-\frac{\pi}{2}}$
d) $\frac{5\sqrt{3}-3}{2} + (\frac{-5-3\sqrt{3}}{2})i$