Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum
Dosen: Rila Mandala, Rinaldi M, Judhi Santoso/Arrival Dwi Sentosa
Selasa, 23 Oktober 2024
Waktu: 90 menit

---

1. Diberikan tiga buah vector di R^3 yaitu **u** = (-3, 1, 2) **v** = (4, 5, 1) **w** = (1, 2, -4), semua vektor berawal dari titik (0, 0, 0).
   a) Hitung $\|\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w}\|(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})$
   b) Apakah {**u**, **v**, **w**} himpunan ortogonal?
   c) Jika vektor **v** dan **w** terletak pada sebuah bidang, tentukan persamaan bidang tersebut
   d) Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (3, -1, 2) dan paralel dengan bidang pada jawaban c
   e) Tentukan jarak antara kedua bidang paralel (jawaban c dan d)
   f) Tentukan jarak titik (3, -1, 2) ke bidang pada jawaban c
   g) Tentukan volume *paralelpiped* yang dibentuk oleh vektor **u**, **v**, dan **w**.

(Nilai: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)

Jawaban:

(a) $\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w}$ = (-3, 1, 2) + 3(4, 5, 1) – (1, 2, -4) = (-3, 1, 2) + (12, 15, 3) – (1, 2, -4)
= (-3 + 12 – 1, 1 + 15 – 2, 2 + 3 + 4)
= (8, 14, 9)

$\|\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = \sqrt{8^2+14^2+9^2} = \sqrt{64+196+81} = \sqrt{341}$

$\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}$ = (1)(-3) + (2)(1) + (-4)(2) = -3 + 2 – 8 = -9

$\|\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w}\|(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}) = -9\sqrt{341}$ atau = -166.1956678

(b) Tes $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = -9 \neq 0$, oleh karena itu dapat disimpulkan {**u**, **v**, **w**} bukan himpunan ortogonal

(c) Tentukan vektor normal bidang:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathrm{k} \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -22\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Jadi, **n** = (-22, 17, 3)

Persamaan bidang dengan n = (-22, 17, 3) yang melalui titik (4, 5, 1) adalah:
a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-22(x – 4) + 17(y – 5) + 3(z – 1) = 0
-22x + 88 + 17y – 85 + 3z – 3 = 0
-22x + 17y + 3z = 0
22x – 17y – 3z = 0

Jika melalui titik (1, 2, -4):
-22(x – 1) + 17(y – 2) + 3(z + 4) = 0
-22x + 22 + 17y – 34 + 3z + 12 = 0
-22x + 17y + 3z = 0
22x – 17y – 3z = 0

Hasilnya sama

(d) Bidang yang paralel dengan bidang pada jawaban c memiliki normal yang sama, yaitu **n** = (-22, 17, 3), atau kelipatannya, dan melalui titik (3, -1, 2) adalah

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-22(x – 3) + 17(y + 1) + 3(z – 2) = 0
-22x + 66 + 17y + 17 + 3z – 6 = 0
-22x + 17y + 3z + 77 = 0
22x – 17y – 3z – 77 = 0

(e) Jarak kedua bidang adalah (diketahui sebuah tiitk pada bidang d adalah (3, -1, 2), maka jarak titik itu ke bidang c (22x – 17y – 3z = 0) adalah

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|22(3)-17(-1)+(-3)(2)-0|}{\sqrt{22^2+(-17)^2+(-3)^2}} = \frac{|66+17-6|}{\sqrt{484+289+9}} = \frac{77}{\sqrt{782}} = \frac{77}{27.964} = 2.7535$$

(f) Sama dengan jawaban c, yaitu 2.7535

(g) Volume paralelpiped:

$$V = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 66 + 17 + 6 = 79$$

2. Misalkan basis $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ dan basis $B' = \{\mathbf{u_1}', \mathbf{u_2}'\}$ untuk R^2 dimana

$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u'}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u'}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

a). Tentukan matrik transisi P dari *B'* ke *B*
b). Tentukan matrik transisi P dari *B* ke *B'*
c). Hitunglah vektor koordinat $[\mathbf{w}]_B$, dimana $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$
d). Hitunglan vektor koordinat $[\mathbf{w}]_{B'}$, menggunakan matrik transisi

(Nilai: 5 + 5 + 5 + 5)

Jawaban:

a) [basis baru | basis lama] = $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) R2 - R1 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) R1/2$; R2/(-5)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{array}\right) R1 - 2R2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{array}\right)$$

Matriks transisi adalah $P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix}$

b) [basis baru | basis lama] = $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) R2 - 3R1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -13 \end{array}\right) R2/2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13/2 \end{array}\right) R1 + R2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 & -13/2 \end{array}\right)$$

Matriks transisi adalah $P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix}$

c) (3, -5) = c1(2, 2) + c2(4, -1)

2c1 + 4c2 = 3
2c1 – c2 = -5 -

5c2 = 8
c2 = 8/5

2c1 + 4c2 = 3
2c1 + 4(8/5) = 3
2c1 = 3 – 32/5
c1 = (-17/5)/2 = -17/10

Jadi, koordinatt **w** = (3, -5) pada basis B adalah (-17/10, 8/5)

d) $\begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

3. Diketahui himpunan vektor polinom di P_2 sebagai berikut: S = {**p1** = $3 + x - 4x^2$, **p2** = $2 + 5x + 6x^2$, **p3** = $1 + 4x + 8x^2$}.
   (a) Tunjukkan bahwa p1, p2, dan p3 adalah basis untuk P_2
   (b) Tentukan dimensi P_2
   (c) Tentukan polinom **p** di P_2 yang koordinatnya vektornya adalah $(\mathbf{p})_S = (-1, 3, 2)$

(**Nilai: 10 + 4 + 5)**

Jawaban:

(a) **p1** = $3 + x - 4x^2$ → **p1** = (3, 1, -4)
p2 = $2 + 5x + 6x^2$ → **p2** = (2, 5, 6)
p3 = $1 + 4x + 8x^2$ → **p3** = (1, 4, 8)

Apakah S = {**p1**, **p2**, **p3**} basis untuk P_2? Syarat sebuah himpunan vektor menjadi basis adalah:
(a) S bebas linier
(b) S membangun P_2

Penyelesaian:
(i) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, dan $\mathbf{p_3}$ bebas linier sbb:
$k_1(3, 1, -4) + k_2(2, 5, 6) + k_3(1, 4, 8) = 0$

Diperoleh SPL homogen:
$3k_1 + k_2 - 4k_3 = 0$
$2k_1 + 5k_2 + 6k_3 = 0$
$k_1 + 4k_2 + 8k_3 = 0$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$

(ii) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, dan $\mathbf{p_3}$ membangun P_2 sbb:
Misalkan vektor sembarang $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di P_2 dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{w} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2} + k_3\mathbf{p_3}$

$(w_1, w_2, w_3) = k_1(3, 1, -4) + k_2(2, 5, 6) + k_3(1, 4, 8)$

Diperoleh SPL:
$3k_1 + k_2 - 4k_3 = w_1$
$2k_1 + 5k_2 + 6k_3 = w_2$
$k_1 + 4k_2 + 8k_3 = w_3$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (i) dan (ii) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 3(40-24) - (16-6) - 4(8-5) = 48 - 10 - 12 = 26$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu $\det(A) \neq 0$. Karena $\det(A) = 26$, maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:
$3k_1 + k_2 - 4k_3 = 0$
$2k_1 + 5k_2 + 6k_3 = 0$
$k_1 + 4k_2 + 8k_3 = 0$
memiliki solusi trivial, dan SPL:
$3k_1 + k_2 - 4k_3 = w_1$
$2k_1 + 5k_2 + 6k_3 = w_2$
$k_1 + 4k_2 + 8k_3 = w_3$

dapat dipecahkan. Jadi, S = {**p1**, **p2**, **p3**} adalah basis untuk P_2.

(b) Dimensi = 3

(c) **p** = (-1)**p1** + 3**p2** + 2**p3** = $-(3 + x - 4x^2) + 3(2 + 5x + 6x^2) + 2(1 + 4x + 8x^2)$

$= -3 - x + 4x^2 + 6 + 15x + 18x^2 + 2 + 8x + 16x^2$

$= 5 + 22x + 38x^2$

4. Diberikan sebuah matriks A berukuran 4 x 5 sebagai beriku

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Tentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null untuk matriks A
(b) Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A

(Nilai: 15 + 5)

Jawaban:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} R2 + 2R1; R3 - 3R1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix} (-1)R2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & -1 & -3 & -2\\0 & -3 & 3 & 4 & 1\\0 & 0 & 0 & -13 & -13\end{bmatrix} R3+3R2 \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & -1 & -3 & -2\\0 & 0 & 0 & -5 & -5\\0 & 0 & 0 & -13 & -13\end{bmatrix} R3/(-5)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & -1 & -3 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -13 & -13\end{bmatrix} R4+13R3 \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & -1 & -3 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

r1 = [1 2 0 2 5]
r2 = [0 1 -1 -3 −2]
r3 = [0 0 0 1 1]

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang mengandung 1 utama:

$$c1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\\3\end{bmatrix} \qquad c2 = \begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\6\end{bmatrix} \qquad c3 = \begin{bmatrix}2\\-1\\4\\-7\end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null diperoleh dengan menyelesaian Ax = 0:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5 & 0\\-2 & -5 & 1 & -1 & -8 & 0\\0 & -3 & 3 & 4 & 1 & 0\\3 & 6 & 0 & -7 & 2 & 0\end{bmatrix} \sim \text{...OBE...} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5 & 0\\0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan sbb:

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 0$
$x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0$
$x_4 + x_5 = 0$

$x_4 = -x_5$
$x_2 = x_3 + 3x_4 + 2x_5 = x_3 - 3x_5 + 2x_5 = x_3 - x_5$
$x1 = -2x_2 - 2x_4 - 5x_5 = -2x_2 + 2x_5 - 5x_5 = -2x_2 - 3x_5 = -2(x_3 - x_5) - 3x_5 = -2x_3 - x_5$

Misalkan $x_3 = s$, $x_5 = t$, $s, t \in R$
Maka:
$x_4 = -t$
$x_2 = x_3 - x_5 = s - t$
$x_1 = -2x_3 - x_5 = -2s - t$

$$\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\\x4\\x5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2s-t\\s-t\\s\\-t\\t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Basis ruang null adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Rank(A) = dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom = 3

Nullity(A) = dimensi ruang null = 2

Memenuhi kesamaan : Rank(A) + Nullity(A) = n

3 + 2 = 5

5. Diketahui $T : P_2 \rightarrow R^3$, P_2 adalah polinom derajat 2, yang dalam hal ini,

$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ c \end{pmatrix}$

(a) Apakah T merupakan transformasi linier? Buktikan!

(b) Tentukan $T(2 + 3x + 4x^2)$

(Nilai: 8 + 2)

Jawaban:

(a) Jika T transformasi linier maka harus memenuhi T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) dan T(k**u**) = kT(**u**)

Misalkan **u** = $u_1 + u_2x + u_3x^2$, **v** = $v_1 + v_2x + v_3x^2$

T(**u** + **v**) = $T(u_1 + u_2x + u_3x^2 + v_1 + v_2x + v_3x^2)$ =

= $T((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2)$

$$= \begin{pmatrix} (u1+v1)+(u2+v2) \\ (u1+v1)+(u3+v3) \\ (u3+v3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u1+u2)+(v1+v2) \\ (u1+u3)+(v1+v3) \\ (u3+v3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u1+u2) \\ (u1+u3) \\ u3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (v1+v2) \\ (v1+v3) \\ v3 \end{pmatrix}$$

= T(**u**) + T(**v**)

T(k**u**) = $T(ku_1 + ku_2x + ku_3x^2)$ = $\begin{pmatrix} (ku1+ku2) \\ (ku1+ku3) \\ ku3 \end{pmatrix}$ = k $\begin{pmatrix} (u1+u2) \\ (u1+u3) \\ u3 \end{pmatrix}$ = kT(**u**)

Jadi, T adalah transformasi linier

(b) $T(2 + 3x + 4x^2) = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 2+4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Temukan matriks standar untuk operator T : R3→R3 yang pertama-tama memutar sebuah vektor berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu z melalui sudut θ, kemudian mencerminkan vektor yang dihasilkan terhadap bidang yz, dan kemudian memproyeksikan vektor tersebut secara ortogonal ke bidang xy.

(Nilai: 10)

Jawaban:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$